I. *Ueber die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Gränzen ihrer Wirkung;
von R. Clausius.*

(Vorgetragen in der Züricher naturforschenden Gesellschaft am
22. Juni 1863.)

Bei der Behandlung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bin ich davon ausgegangen, daß zwischen dem Wärmeübergange aus einem wärmeren in einen kälteren Körper und demjenigen aus einem kälteren in einen wärmeren Körper der Unterschied stattfindet, daß der letztere nicht, wie der erstere, von selbst geschehen kann. Wenn man diesen Unterschied zwischen den beiden Arten von Wärmeübergängen als im Voraus feststehend annimmt, so kann man daraus beweisen, daß ein ganz entsprechender Unterschied auch zwischen der Verwandlung aus Arbeit in Wärme und der Verwandlung aus Wärme in Arbeit bestehen muß, daß nämlich die Wärme sich nicht von selbst in Arbeit verwandeln kann, sondern daß dazu immer eine gleichzeitig stattfindende andere Veränderung nöthig ist, welche als Compensation dient, während dagegen die umgekehrte Verwandlung aus Arbeit in Wärme ohne Compensation vor sich gehen kann.

In diesen Sätzen (welche sich in gleicher Weise noch auf einen dritten, auf die Zustandsänderungen der Körper bezüglichen Vorgang ausdehnen lassen, worauf ich aber hier nicht eingehen will) drückt sich eine allgemein in der Natur obwaltende Tendenz zu Veränderungen in einem bestimmten Sinne aus. Wendet man dieses auf das Weltall

im Ganzen an, so gelangt man zu einer eigenthümlichen Schlussfolgerung, auf welche zuerst W. Thomson aufmerksam machte ¹⁾, nachdem er die Abänderung, welche ich mit dem Carnot'schen Satze vorgenommen hatte, als richtig anerkannt, und sich meiner Auffassung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie angeschlossen hatte. Wenn nämlich im Weltall fortwährend Fälle der Art vorkommen, wo Bewegungen, welche größeren Massen innewohnen, und welche durch Arbeit von Naturkräften entstanden sind, oder doch, falls wir die Entstehung der Bewegungen nicht kennen, als durch Arbeit entstanden gedacht werden können, sich durch Reibung oder andere der Reibung ähnliche Bewegungshindernisse in Wärme, d. h. in Bewegungen der kleinsten Theilchen, umsetzen; und wenn ferner die Wärme stets das Bestreben zeigt, ihre Vertheilung in der Weise zu ändern, dafs dadurch die bestehenden Temperaturdifferenzen ausgeglichen werden, so mufs sich das Weltall allmählich mehr und mehr dem Zustande nähern, wo die Kräfte keine neuen Bewegungen mehr hervorbringen können, und keine Temperaturdifferenzen mehr existiren.

Durch diese Schlussfolgerung wurde Rankine zu einem Aufsatze veranlaßt, welcher den Titel führt: »*On the Re-concentration of the Mechanical Energy of the Universe,*« ²⁾ und worin die Frage behandelt ist, ob nicht im Gegensatze zu jenen Vorgängen, durch welche die mechanische Energie immer mehr zerstreut wird, auch ein Procefs von der umgekehrten Wirkung denkbar sey, durch welchen die mechanische Energie wieder concentrirt und in einzelnen Massen angehäuft werden könne.

Nachdem Rankine davon gesprochen hat, dafs in mannichfacher Weise durch Arbeit von Naturkräften Wärme entstehen könne, und die Wärme sich in den Körpern immer mehr zu verbreiten und dadurch die bestehenden Temperaturdifferenzen auszugleichen suche, und hinzugefügt hat,

1) *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. IV, p. 304.*

2) *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. IV, p. 358.*

dafs die in den Körpern vorhandene Wärme auch das Bestreben habe, sich in strahlende Wärme zu verwandeln, so dafs die Weltkörper fort und fort mehr von ihrer Wärme an den den Weltenraum ausfüllenden Aether verlieren, fährt er fort: ¹⁾

»Es möge nun angenommen werden, dafs nach allen Richtungen, rund um die sichtbare Welt, das interstellare Medium (der Aether) Gränzen habe, jenseit deren sich ein leerer Raum befinde.«

»Wenn diese Voraussetzung richtig ist, dann wird die strahlende Wärme der Welt, indem sie jene Gränzen erreicht, total reflectirt und schliesslich in Brennpunkten wieder concentrirt werden. Die Intensität der Wärme, welche man in jedem dieser Brennpunkte zu erwarten hat, mag so grofs seyn, dafs, wenn ein Stern (zu einer Zeit, wo er schon eine erloschene Masse von trägen Verbindungen wäre) im Laufe seiner Bewegungen in jenen Raum käme, er in Dampf verwandelt und in seine Elemente aufgelöst würde. Auf diese Weise würde ein Reservoir von chemischer Kraft auf Kosten einer entsprechenden Menge von strahlender Wärme reproducirt.«

»Es ergibt sich hieraus, dafs, obwohl nach dem, was man von der bekannten Welt sehen kann, sie einem solchen Endzustande zuzustreben scheint, wo alle physische Energie in der Form von strahlender Wärme gleichmäfsig zerstreut ist, die Sterne erloschen sind, und alle Naturerscheinungen aufgehört haben, dennoch die Welt, wie sie geschaffen ist, möglicher Weise in sich selbst die Mittel besitzen kann, ihre physischen Energien wieder zu concentriren und ihre Thätigkeit und ihr Leben wieder zu erneuern.«

Hiernach scheint Rankine die Ansicht zu haben, es sey möglich, die Wärmestrahlen durch Reflexion in solcher Weise zu concentriren, dafs in dem dadurch entstehenden Brennpunkte ein Körper zu einer höheren Temperatur erhitzt werden könne, als die Körper haben, welche

1) A. a. O. p. 360.

die Strahlen aussenden. Wenn diese Ansicht richtig wäre, so müßte der von mir als Grundsatz angenommene Satz, daß die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, falsch seyn, und der mit Hülfe dieses Grundsatzes geführte Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie wäre somit zu verwerfen.

Da ich wünschte, den Grundsatz gegen jeden Zweifel dieser Art zu sichern, und da die Concentration der Wärmestrahlen, mit welcher auch diejenige der Lichtstrahlen in unmittelbarem Zusammenhange steht, ein Gegenstand ist, welcher, auch abgesehen von jener speciellen Frage, in vieler Beziehung Interesse darbietet, so habe ich die Gesetze, denen die Strahlenconcentration unterworfen ist, und den Einfluß, welchen sie auf den unter den Körper stattfindenden Strahlenaustausch haben kann, einer näheren mathematischen Untersuchung unterworfen, deren Resultate ich im Folgenden mittheilen will.

I. Grund, weshalb die bisherige Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung zweier Flächen für den vorliegenden Fall nicht ausreicht.

§ 1. Wenn zwei Körper sich in einem für Wärmestrahlen durchdringlichen Mittel befinden, so senden sie einander durch Strahlung Wärme zu. Von den Strahlen, welche auf einen Körper fallen, wird im Allgemeinen ein Theil absorbirt, während ein anderer theils reflectirt, theils durchgelassen wird, und es ist bekannt, daß das Absorptionsvermögen mit dem Emissionsvermögen in einem einfachen Zusammenhange steht. Da es sich für uns jetzt nicht darum handelt, die Unterschiede und die Gesetzmäßigkeiten, welche in dieser Beziehung stattfinden, zu untersuchen, so wollen wir einen einfachen Fall annehmen, nämlich den, wo die betrachteten Körper von der Art sind, daß sie alle Strahlen, welche auf sie fallen, sofort an der Oberfläche, oder in einer so dünnen Schicht, daß man die Dicke vernachlässigen kann, vollständig absorbiren. Solche Kör-

per hat Kirchhoff in seiner bekannten ausgezeichneten Abhandlung über das Verhältniß zwischen Emission und Absorption ¹⁾ *vollkommen schwarze Körper* genannt.

Körper dieser Art haben auch das größtmögliche Emissionsvermögen, und es war früher schon als sicher angenommen, daß die Stärke ihrer Emission nur von ihrer Temperatur abhängt, so daß alle vollkommen schwarzen Körper bei gleicher Temperatur von gleich großen Stücken ihrer Oberflächen gleich viel Wärme ausstrahlen. Da nun die Strahlen, welche ein Körper aussendet, nicht gleichartig, sondern der Farbe nach verschieden sind, so muß man die Emission in Bezug auf die verschiedenen Farben besonders betrachten, und Kirchhoff hat den obigen Satz dahin erweitert, daß vollkommen schwarze Körper von gleicher Temperatur nicht nur im Allgemeinen, sondern auch von jeder Strahlengattung im Besonderen, gleich viel ausstrahlen. Da auch diese Unterschiede bei unserer Untersuchung nicht in Betracht kommen sollen, so wollen wir im Folgenden immer voraussetzen, daß wir es nur mit einer bestimmten Strahlengattung, oder, genauer ausgedrückt, mit Strahlen, deren Wellenlängen nur innerhalb eines unendlich kleinen Intervalls variiren, zu thun haben. Da dasjenige, was von dieser Strahlengattung gilt, in entsprechender Weise auch von jeder andern Strahlengattung gelten muß, so lassen sich die Resultate, welche für homogene Wärme gefunden sind, ohne Schwierigkeit auch auf solche Wärme ausdehnen, die verschiedene Strahlengattungen gemischt enthält.

Ebenso wollen wir, um unnöthige Complicationen zu vermeiden, von Polarisationserscheinungen absehen und annehmen, daß wir es nur mit unpolarisirten Strahlen zu thun haben. In welcher Weise bei derartigen Betrachtungen die Polarisation zu berücksichtigen ist, ist von Helmholtz und Kirchhoff auseinander gesetzt.

§. 2. Seyen nun irgend zwei Flächen s_1 und s_2 als Oberflächen vollkommen schwarzer Körper von gleicher Temperatur gegeben, und auf ihnen die Elemente ds_1 und

¹⁾ Diese Ann. Bd. CIX, S. 275.

ds_2 zur Betrachtung ausgewählt, um die Wärmemengen, welche dieselben sich gegenseitig durch Strahlung zu senden, zu bestimmen und unter einander zu vergleichen. Wenn das Mittel, welches die Körper umgiebt und den Zwischenraum zwischen ihnen ausfüllt, gleichförmig ist, so daß die Strahlen sich einfach geradlinig von der einen Fläche zur anderen fortpflanzen, so ist leicht zu sehen, daß die Wärmemenge, welche das Element ds_1 nach ds_2 sendet, ebenso groß seyn muß, wie die, welche ds_2 nach ds_1 sendet. Ist dagegen das Mittel, welches die Körper umgiebt, nicht gleichförmig, sondern finden Verschiedenheiten statt, welche Brechungen und Reflexionen der Strahlen veranlassen, so ist der Vorgang weniger einfach, und es bedarf einer eingehenderen Betrachtung, um sich davon zu überzeugen, ob auch in diesem Falle jene vollkommene Reciprocität stattfindet.

Diese Betrachtung ist in sehr eleganter Weise von Kirchhoff ausgeführt, und ich will sein Resultat, so weit es sich auf den Fall bezieht, wo die Strahlen auf ihrem Wege von dem einen Elemente zum anderen keine Schwächung erleiden, wo also die vorkommenden Brechungen und Reflexionen ohne Verlust geschehen und die Fortpflanzung ohne Absorption stattfindet, hier kurz anführen. Dabei werde ich mir nur in der Bezeichnung und in der Wahl der Coordinatensysteme zur besseren Uebereinstimmung mit dem Folgenden einige Aenderungen erlauben.

Wenn zwei Punkte gegeben sind, so kann von den unendlich vielen Strahlen, welche der eine Punkt aussendet, im Allgemeinen nur einer nach dem anderen Punkte gelangen, oder, falls durch Brechungen oder Reflexionen bewirkt wird, daß mehrere Strahlen in dem anderen Punkte zusammentreffen, so ist es doch im Allgemeinen nur eine beschränkte Anzahl von getrennten Strahlen, deren jeden man besonders betrachten kann ¹⁾. Der Weg eines solchen von

1) Die Ausdrucksweise, daß ein Punkt unendlich viele Strahlen aussende, könnte vielleicht im streng mathematischen Sinne als ungenau bezeichnet werden, da die Aussendung von Wärme oder Licht nur von

dem einen Punkte zum anderen gelangenden Strahls ist dadurch bestimmt, daß die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege gebraucht, verglichen mit den Zeiten, welche er auf allen anderen nahe liegenden Wegen zwischen denselben beiden Punkten gebrauchen würde, ein Minimum ist. Dieses Minimum der Zeit ist, wenn man in solchen Fällen, wo mehrere getrennte Strahlen vorkommen, einen einzelnen zur Betrachtung ausgewählt hat, durch die Lage der beiden Punkte bestimmt, und wir wollen es, wie Kirchhoff, mit T bezeichnen.

Indem wir nun zu den beiden Flächenelementen ds_1 und ds_2 zurückkehren, wollen wir uns in einem Punkte jedes Elementes eine Tangentialebene an die betreffende Fläche gelegt denken, und die Elemente ds_1 und ds_2 als Elemente dieser Ebenen betrachten. In jeder dieser Ebenen führen wir ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem ein, welches in der einen x_1, y_1 , und in der anderen x_2, y_2 heiße ¹⁾. Nehmen wir nun in jeder Ebene einen Punkt, so ist die Zeit T , welche der Strahl gebraucht, um vom einen Punkte zum anderen zu gelangen, wie oben gesagt, durch die Lage der beiden Punkte bestimmt, und sie ist

einer Fläche und nicht von einem *mathematischen Punkte* geschehen kann. Es würde darnach genauer seyn, die Aussendung von Wärme oder Licht, statt auf den betrachteten Punkt selbst, vielmehr auf ein bei ihm befindliches Flächenelement zu beziehen. Da indessen schon der Begriff eines Strahles nur eine mathematische Abstraction ist, so kann man, ohne Furcht vor Mißverständnissen, die Vorstellung beibehalten, daß von jedem Punkte einer Fläche unendlich viele Strahlen ausgehen. Wenn es sich darum handelt, die Wärme oder das Licht, welche eine Fläche ausstrahlt, der *Quantität* nach zu bestimmen, so versteht es sich von selbst, daß dabei die Größe der Fläche mit in Betracht kommt, und daß, wenn man die Fläche in Elemente zerlegt, diese Elemente nicht Punkte, sondern unendlich kleine Flächen sind, deren Größe in derjenigen Formel, welche die von einem Flächenelemente ausgestrahlte Wärme- oder Lichtmenge darstellen soll, als Factor vorkommen muß.

- 1) Kirchhoff hat zwei Ebenen, welche auf den Strahlenrichtungen, wie sie in der Nähe der Elemente stattfinden, senkrecht sind, angenommen, und in diese Ebenen hat er die Coordinatensysteme gelegt, und zugleich die Flächenelemente auf diese Ebenen projectirt.

somit als eine Function der vier Coordinaten der beiden Punkte zu betrachten.

Dieses vorausgesetzt gilt für die Wärmemenge, welche das Element ds_1 dem Elemente ds_2 während der Zeiteinheit zusendet, nach Kirchhoff folgender Ausdruck ¹⁾:

$$\frac{e_1}{\pi} \left(\frac{d^2 T}{dx_1 dx_2} \cdot \frac{d^2 T}{dy_1 dy_2} - \frac{d^2 T}{dx_1 dy_2} \cdot \frac{d^2 T}{dy_1 dx_2} \right) ds_1 ds_2,$$

worin π die bekannte Zahl ist, welche das Verhältniß der Kreisperipherie zum Durchmesser ausdrückt, und e_1 die Stärke der Emission der Fläche s_1 an der Stelle, wo das Element ds_1 liegt, bedeutet, in der Weise, daß $e_1 ds_1$ die ganze Wärmemenge darstellt, welche das Element ds_1 während der Zeiteinheit ausstrahlt.

Um die Wärmemenge auszudrücken, welche umgekehrt das Element ds_2 dem Elemente ds_1 zusendet, braucht man in dem vorigen Ausdrucke nur an die Stelle von e_1 die Größe e_2 , die Stärke der Emission der Fläche s_2 , zu setzen. Alles Uebrige bleibt ungeändert, weil es in Bezug auf beide Elemente symmetrisch ist, denn die Zeit T , welche ein Strahl braucht, um den Weg zwischen zwei Punkten der beiden Elemente zu durchlaufen, ist dieselbe, mag der Strahl sich in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung bewegen. Nimmt man nun an, daß die Flächen, unter der Voraussetzung gleicher Temperatur, gleich viel Wärme ausstrahlen, daß also $e_1 = e_2$ ist, so ist hiernach die Wärmemenge, welche das Element ds_1 nach ds_2 sendet, ebenso groß, wie die, welche ds_2 nach ds_1 sendet.

§. 3. Es wurde vorher gesagt, zwischen zwei gegebenen Punkten sey im Allgemeinen nur Ein Strahl oder eine beschränkte Anzahl getrennter Strahlen möglich. In besonderen Fällen aber kann es vorkommen, daß *unendlich viele* Strahlen, welche von dem einen Punkte ausgehen und entweder einen in einer Fläche liegenden Winkel, oder auch einen ganzen körperlichen Winkel, oder einen Kegelraum ausfüllen, sich in dem anderen Punkte wieder vereinigen. Dasselbe gilt natürlich von den Lichtstrahlen ebenso,

1) Diese Ann. Bd. CIX, S. 286.

wie von den Wärmestrahlen, und man pflegt in der Optik einen solchen Punkt, wo sämtliche Strahlen, die ein gegebener Punkt innerhalb eines gewissen Kegelraumes aussendet, sich wieder vereinigen, das *Bild* des gegebenen Punktes zu nennen, oder, da bei umgekehrter Strahlenrichtung auch der erste Punkt das Bild des zweiten ist, so nennt man beide Punkte zwei *conjugirte Brennpunkte*. Wenn das, was hier von zwei einzelnen Punkten gesagt ist, von den sämtlichen Punkten zweier Flächen gilt, so daß jeder Punkt der einen Fläche der conjugirte Brennpunkt eines Punktes der anderen Fläche ist, so nennt man die eine Fläche das optische Bild der anderen.

Es fragt sich nun, wie zwischen den Elementen zweier solcher Flächen der Strahlenaustausch stattfindet, ob da auch die obige Reciprocität besteht, daß bei gleicher Temperatur jedes Element der einen Fläche einem Elemente der anderen gerade so viel Wärme zusendet, als es von jenem zurück erhält, und daß daher ein Körper den anderen nicht zu einer höheren Temperatur, als seiner eigenen, erwärmen kann, oder ob in solchen Fällen durch die Concentration der Strahlen die Möglichkeit gegeben ist, daß ein Körper einen anderen zu einer höheren Temperatur erwärmen kann, als er selbst hat.

Auf diesen Fall ist der Kirchhoff'sche Ausdruck nicht direct anwendbar. Ist nämlich die Fläche s_2 ein optisches Bild der Fläche s_1 , so vereinigen sich alle Strahlen, welche ein Punkt p_1 der Fläche s_1 innerhalb eines gewissen Kegelraumes aussendet, in einem bestimmten Punkte p_2 der Fläche s_2 , und alle anderen umliegenden Punkte der Fläche s_2 erhalten von jenem Punkte p_1 keine Strahlen. Es sind also, wenn die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes p_1 gegeben sind, die Coordinaten x_2, y_2 des Punktes p_2 nicht mehr willkürlich, sondern sie sind gleich mit bestimmt; und ebenso, wenn die Coordinaten x_2, y_2 gegeben sind, so sind die Coordinaten x_1, y_1 gleich mit bestimmt. Ein Differentialcoefficient von der Form $\frac{d^2 T}{dx_1 dx_2}$, worin bei der Differen-

tiation nach x_1 die Coordinate x_1 als veränderlich betrachtet wird, während die zweite Coordinate y_1 desselben Punktes und die beiden Coordinaten x_2 und y_2 des anderen Punktes als constant vorausgesetzt werden, und ebenso bei der Differentiation nach x_2 die Coordinate x_2 als veränderlich gilt, während y_2 , x_1 und y_1 constant sind, kann demnach keine reelle Gröfse von endlichem Werthe seyn.

Es muß daher für diesen Fall ein Ausdruck von etwas anderer Form, als der Kirchhoff'sche, abgeleitet werden, und zu diesem Zwecke mögen zunächst einige Betrachtungen ähnlicher Art, wie die, welche Kirchhoff zu seinem Ausdrücke geführt haben, folgen.

II. Bestimmung zusammengehöriger Punkte und zusammengehöriger Flächenelemente in drei von den Strahlen durchschnittenen Ebenen.

§. 4. Es seyen drei Ebenen a, b, c gegeben, von denen b zwischen a und c liege (Fig. 1 Taf. I). In jeder derselben führe man ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, welche mit $x_a, y_a; x_b, y_b$ und x_c, y_c bezeichnet seyen. Wenn nun in der Ebene a ein Punkt p_a , und in der Ebene b ein Punkt p_b gegeben ist, und man betrachtet den Strahl, welcher von dem einen zum anderen geht, so hat man zur Bestimmung des Weges, welchen dieser Strahl nimmt, die Bedingung, daß die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege braucht unter den Zeiten, welche er auf allen anderen nahe liegenden Wegen gebrauchen würde, ein Minimum ist. Dieses Minimum der Zeit, welches als Function der Coordinaten der Punkte p_a und p_b , also als Function der vier Gröfsen x_a, y_a, x_b, y_b zu betrachten ist, heiße T_{ab} . Ebenso sey T_{ac} die Zeit des Strahles zwischen zwei Punkten p_a und p_c in den Ebenen a und c , und T_{bc} die Zeit des Strahles zwischen zwei Punkten p_b und p_c in den Ebenen b und c . T_{ab} ist als Function der vier Gröfsen x_a, y_a, x_b, y_b , und T_{bc} als Function der vier Gröfsen x_b, y_b, x_c, y_c anzusehen.

Da nun ein Strahl, welcher durch zwei Ebenen geht, im Allgemeinen auch durch die dritte Ebene schneidet, so

haben wir für jeden Strahl drei Durchschnittspunkte, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, daß durch zwei derselben im Allgemeinen der dritte bestimmt ist. Die Gleichungen, welche zu dieser Bestimmung dienen können, lassen sich nach der obigen Bedingung leicht aufstellen.

Wir wollen zunächst annehmen, die Punkte p_a und p_c (Fig. 1 Taf. I) in den Ebenen a und c seyen im Voraus gegeben, dagegen der Punkt, wo der Strahl die Zwischenebene b schneidet, und welchen wir zum Unterschiede von anderen in der Ebene b gelegenen Punkten mit p'_b bezeichnen wollen, sey noch unbekannt. Dann wählen wir in dieser Ebene einen beliebigen Punkt p_b und betrachten zwei Strahlen, die wir Hilfsstrahlen nennen wollen, deren einer von p_a nach p_b , und der andere von p_b nach p_c geht. In der Fig. 1 sind die Hilfsstrahlen punktirt gezeichnet, während der Hauptstrahl, um den es sich eigentlich handelt, welcher direct von p_a nach p_c geht, voll ausgezogen ist ¹⁾. Nennen wir, dem Vorigen entsprechend, die Zeiten der beiden Hilfsstrahlen T_{ab} und T_{bc} , und bilden die Summe $T_{ab} + T_{bc}$, so ist der Werth dieser Summe von der Lage des gewählten Punktes p_b abhängig, und die Summe ist daher, sofern die Punkte p_a und p_c als gegeben vorausgesetzt werden, als eine Function der Coordinaten x_b, y_b des Punktes p_b zu betrachten. Unter allen Werthen, welche diese Summe annehmen kann, wenn man dem Punkte p_b verschiedene Lagen in der Nähe des Punktes p'_b giebt, muß nun derjenige, welchen man erhält, wenn man p_b mit p'_b zusammenfallen läßt, und dadurch bewirkt, daß die beiden Hilfsstrahlen Theile des direct von p_a nach p_c gehenden Strahls

1) In der Figur sind die Wege der Strahlen etwas gekrümmt gezeichnet. Dadurch soll nur angedeutet werden, daß der Weg, welchen ein Strahl zwischen zwei gegebenen Punkten zurücklegt, nicht einfach die zwischen den beiden Punkten gezogene gerade Linie zu seyn braucht, sondern daß durch Brechungen oder Reflexionen ein anderer Weg entstehen kann, welcher entweder eine aus mehreren Geraden bestehende gebrochene Linie ist, oder auch, wenn das Mittel, in welchem der Strahl sich fortpflanzt, sich nicht plötzlich, sondern allmählich ändert, eine gekrümmte Linie seyn kann.

werden, ein *Minimum* seyn. Demnach erhält man zur Bestimmung der Coordinaten dieses Punktes p_b' folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$(1) \quad \frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b} = 0; \quad \frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dy_b} = 0.$$

Da die Gröfsen T_{ab} und T_{bc} aufser den Coordinaten x_b , y_b des vorher als unbekannt betrachteten Punktes auch die Coordinaten x_a , y_a und x_c , y_c der vorher als gegeben vorausgesetzten Punkte enthalten, so kann man die beiden vorigen Gleichungen, nachdem sie einmal aufgestellt sind, einfach als zwei Gleichungen zwischen den sechs Coordinaten der drei Punkte, in welchen die drei Ebenen von einem Strahle getroffen werden, ansehen. Diese Gleichungen lassen sich daher nicht blos dazu anwenden, die Coordinaten des in der Mittelebene gelegenen Punktes aus den Coordinaten der beiden anderen Punkte zu bestimmen, sondern können allgemein dazu dienen, irgend zwei der sechs Coordinaten aus den vier übrigen zu bestimmen.

Nun wollen wir ferner annehmen, die beiden Punkte p_a und p_b (Fig. 2 Taf. I), wo der Strahl die beiden Ebenen a und b schneidet, seyen im Voraus gegeben, dagegen der Punkt, wo er die Ebene c trifft, und welchen wir zum Unterschiede von anderen in der Ebene c gelegenen Punkten wieder mit p_c' bezeichnen wollen, sey noch unbekannt. Dann wählen wir in der Ebene c einen beliebigen Punkt p_c , und betrachten zwei Hilfsstrahlen, deren einer von p_a nach p_c , und der andere von p_b nach p_c geht. In der Fig. 2 auf Taf. I sind sie wieder punktirt gezeichnet, während der Hauptstrahl voll ausgezogen ist. Nennen wir die Zeiten der beiden Hilfsstrahlen T_{ac} und T_{bc} , und bilden die Differenz $T_{ac} - T_{bc}$, so ist der Werth dieser Differenz abhängig von der Lage des in der Ebene c gewählten Punktes p_c . Unter den verschiedenen Werthen, welche man erhält, wenn man dem Punkte p_c verschiedene Lagen in der Nähe des Punktes p_c' giebt, muß nun derjenige, welchen man erhält, wenn man p_c mit p_c' zusammenfallen läßt, ein *Maximum* seyn.

In diesem Falle schneidet nämlich der von p_a nach p_c

gehende Strahl die Ebene b in dem gegebenen Punkte p_b , und er besteht daher aus den beiden Strahlen, welche von p_a nach p_b und von p_b nach p_c gehen. Demnach kann man setzen:

$$T_{ac} = T_{ab} + T_{bc}$$

und daraus ergibt sich für die fragliche Differenz in diesem speciellen Falle die Gleichung:

$$T_{ac} - T_{bc} = T_{ab}.$$

Fällt dagegen der Punkt p_c nicht mit p_c' zusammen, dann fällt auch der von p_a nach p_c gehende Strahl nicht mit den beiden Strahlen, welche von p_a nach p_b und von p_b nach p_c gehen, zusammen, und da der directe Strahl zwischen p_a und p_c die kürzeste Zeit braucht, so muß seyn:

$$T_{ac} < T_{ab} + T_{bc},$$

und demnach hat man für die fragliche Differenz im Allgemeinen die Beziehung:

$$T_{ac} - T_{bc} < T_{ab}.$$

Die Differenz $T_{ac} - T_{bc}$ ist somit im Allgemeinen kleiner, als in jenem speciellen Falle, wo der Punkt p_c in der Fortsetzung des von p_a nach p_b gehenden Strahles liegt, und jener specielle Werth der Differenz bildet somit ein Maximum¹⁾. Daraus ergeben sich wieder zwei Bedingungsgleichungen, welche lauten:

$$(2) \quad \frac{d(T_{ac} - T_{bc})}{dx_c} = 0; \quad \frac{d(T_{ac} - T_{bc})}{dy_c} = 0.$$

Nimmt man endlich an, die Punkte p_b und p_c in den Ebenen b und c seyen im Voraus gegeben, und dagegen der Punkt, wo der Strahl die Ebene a trifft, noch unbe-

1) In der Abhandlung von Kirchhoff S. 285 steht von der dort betrachteten GröÙe, welche im Wesentlichen der hier zuletzt betrachteten Differenz entspricht, nur mit dem Unterschiede, daß sie sich auf vier Ebenen statt auf drei bezieht, sie müsse ein *Minimum* seyn. Es kann seyn, daß diese Angabe nur auf einem Druckfehler beruht, und ohnehin würde eine Verwechslung zwischen Maximum und Minimum an jener Stelle ohne weitere Bedeutung seyn, weil der Satz, welcher in den darauf folgenden Rechnungen benutzt wird, daß die Differentialcoefficienten gleich Null seyn müssen, für das Maximum und das Minimum gemeinsam gilt.

kannt, so erhält man aus einer Betrachtung, welche ganz der vorigen entspricht, und welche ich daher nicht weiter ausführen will, die beiden Bedingungsgleichungen:

$$(3) \quad \frac{d(T_{ac} - T_{ab})}{dx_a} = 0; \quad \frac{d(T_{ac} - T_{ab})}{dy_a} = 0.$$

Auf diese Weise sind wir zu drei Paar Gleichungen gelangt, von denen jedes Paar dazu dienen kann, die gegenseitige Beziehung der drei Punkte, in welchen ein Strahl die drei Ebenen a , b , c schneidet, auszudrücken, so daß, wenn zwei der Punkte gegeben sind, der dritte gefunden werden kann, oder noch allgemeiner, wenn von den sechs Coordinaten der drei Punkte vier gegeben sind, die beiden anderen sich bestimmen lassen.

§. 5. Wir wollen nun folgenden Fall betrachten. In einer der drei Ebenen, z. B. in a , sey ein Punkt p_a gegeben, und in einer zweiten, z. B. in b , ein Flächenelement, welches wir ds_b nennen wollen. Wenn nun von p_a aus Strahlen nach den verschiedenen Punkten des Elementes ds_b gehen, und man denkt sich dieselben fortgesetzt, bis sie die dritte Ebene c schneiden, so treffen alle diese Strahlen die Ebene c im Allgemeinen auch in einem unendlich kleinen Flächenelemente, welches wir ds_c nennen wollen (s. Fig. 3 Taf. I). Es soll nun das Verhältniß zwischen den Flächenelementen ds_b und ds_c bestimmt werden.

In diesem Falle sind von den sechs Coordinaten, welche bei jedem Strahle in Betracht kommen (den Coordinaten der drei Punkte, in welchen der Strahl die drei Ebenen schneidet), zwei, nämlich x_a und y_a , im Voraus gegeben. Wenn dann für die Coordinaten x_b und y_b irgend welche Werthe angenommen werden, so sind dadurch im Allgemeinen die Coordinaten x_c und y_c gleich mit bestimmt. Man kann also in diesem Falle jede der Coordinaten x_c und y_c als eine Function der beiden Coordinaten x_b und y_b betrachten. Giebt man nun dem Flächenelement ds_b in der Ebene b , dessen Gestalt willkürlich ist, die Gestalt eines Rechteckes $dx_b dy_b$, und sucht zu jedem Punkte seines Umfanges den entsprechenden Punkt in der Ebene c , so

erhält man hier ein unendlich kleines Parallelogramm, welches das entsprechende Flächenelement ds_s bildet. Die GröÙe dieses Parallelogrammes wird, wie man sich durch einfache geometrische Betrachtungen überzeugen kann, abgesehen vom Vorzeichen, durch

$$\left(\frac{dx_c}{dx_b} \cdot \frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b} \cdot \frac{dy_c}{dx_b} \right) dx_b dy_b$$

dargestellt. Wir wollen den Umstand, daÙ wir bei der Bestimmung des Flächenelementes von dem positiven oder negativen Vorzeichen absehen und nur die absolute GröÙe betrachten, dadurch ausdrücken, daÙ wir vor den Differentialausdruck, welcher möglicher Weise positiv oder negativ werden kann, die Buchstaben *v. n.* (*valor numericus*) setzen. Dann können wir schreiben:

$$(4) \quad ds_s = v. n. \left(\frac{dx_c}{dx_b} \cdot \frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b} \cdot \frac{dy_c}{dx_b} \right) ds_b.$$

Um die Abhängigkeit der Coordinaten x_c und y_c von den Coordinaten x_b und y_b zu bestimmen, müssen wir eines der drei Paare von Gleichungen in §. 4 anwenden. Wir wollen dazu zuerst die Gleichungen (1) wählen. Wenn man diese beiden Gleichungen nach x_b und nach y_b differentiirt, indem man bedenkt, daÙ jede der mit T bezeichneten GröÙen von den drei Paaren von Coordinaten x_a, y_a ; x_b, y_b ; x_c, y_c zwei Paare enthält, welche durch die Indices angedeutet sind, und wenn man bei der Differentiation x_c und y_c als Functionen von x_b und y_b behandelt, während man x_a und y_a als constant voraussetzt, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{(dx_b)^2} + \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dx_c} \cdot \frac{dx_c}{dx_b} + \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dy_c} \cdot \frac{dy_c}{dx_b} = 0 \\ \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b dy_b} + \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dx_c} \cdot \frac{dx_c}{dy_b} + \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dy_c} \cdot \frac{dy_c}{dy_b} = 0 \\ \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b dy_b} + \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dx_c} \cdot \frac{dx_c}{dx_b} + \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dy_c} \cdot \frac{dy_c}{dx_b} = 0 \\ \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{(dy_b)^2} + \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dx_c} \cdot \frac{dx_c}{dy_b} + \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dy_c} \cdot \frac{dy_c}{dy_b} = 0. \end{cases}$$

Wenn wir mit Hülfe dieser Gleichungen die vier Differentialcoefficienten $\frac{dx_c}{dx_i}$, $\frac{dx_c}{dy_b}$, $\frac{dy_c}{dx_i}$, $\frac{dy_c}{dy_b}$ bestimmen, und die gefundenen Werthe in die Gleichung (4) einsetzen, so erhalten wir die gesuchte Beziehung zwischen den Flächenelementen ds_i und ds_c . Um das Resultat, welches sich auf diese Weise ergibt, kürzer schreiben zu können, wollen wir folgende Zeichen einführen:

$$(6) \quad A = v. n. \left(\frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dx_c} \cdot \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dy_c} - \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dy_c} \cdot \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dx_c} \right)$$

$$(7) \quad E = v. n. \left\{ \frac{d^2 (T_{ab} + T_{bc})}{(dx_b)^2} \cdot \frac{d^2 (T_{ab} + T_{bc})}{(dy_b)^2} - \left[\frac{d^2 (T_{ab} + T_{bc})}{dx_b dy_b} \right]^2 \right\}.$$

Dann kann man die gesuchte Beziehung in folgender Gleichung schreiben:

$$(8) \quad \frac{ds_c}{ds_b} = \frac{E}{A}.$$

Nehmen wir nun in entsprechender Weise an, es sey in der Ebene c (Fig. 4 Taf. I) ein bestimmter Punkt p_c gegeben, und suchen in der Ebene a das Flächenelement ds_a , welches dem in der Ebene b gegebenen Elemente ds_b entspricht, so können wir das Resultat aus dem vorigen einfach dadurch ableiten, dafs wir überall die Indices a und c vertauschen. Führen wir zur Abkürzung noch das Zeichen ein:

$$(9) \quad C = v. n. \left(\frac{d^2 T_{ab}}{dx_a dx_b} \cdot \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a dy_b} - \frac{d^2 T_{ab}}{dx_a dy_b} \cdot \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a dx_b} \right)$$

so kommt:

$$(10) \quad \frac{ds_a}{ds_b} = \frac{E}{C}.$$

Nehmen wir endlich an, es sey in der Ebene b ein bestimmter Punkt p_b gegeben (Fig. 5 Taf. I) und wählen in der Ebene a irgend ein Flächenelement ds_a und denken uns, von den verschiedenen Punkten dieses Elementes gehen Strahlen durch den Punkt p_b , welche wir uns bis zur Ebene c fortgesetzt denken; und suchen wir nun die Gröfse des Flächenelementes ds_c , in welchem diese sämtlichen Strahlen die Ebene c treffen, so finden wir unter Anwendung der vorher eingeführten Zeichen:

$$(11) \quad \frac{ds_c}{ds_a} = \frac{C}{A}.$$

Man sieht hieraus, daß die beiden in diesem Falle zusammengehörigen Flächenelemente sich zu einander gerade so verhalten, wie die beiden Flächenelemente, welche man erhält, wenn in der Ebene b ein bestimmtes Element ds , gegeben ist, und man dazu erst in der Ebene a und darauf in der Ebene c einen Punkt als Ausgangspunkt der Strahlen annimmt, und dann jedesmal in der dritten Ebene das dem Elemente ds , entsprechende Flächenelement bestimmt.

§. 6. Bei den Rechnungen des vorigen §. ist unter den drei Paaren von Gleichungen des §. 4, welche dazu benutzt werden können, nur das erste angewandt. Man kann nun aber in derselben Weise die Rechnungen auch mit den beiden anderen Paaren (2) und (3) ausführen. Durch jedes Paar von Gleichungen gelangt man zu drei Größen der Art, wie die vorher mit A , C und E bezeichneten, welche dazu dienen können, die Verhältnisse der Flächenelemente auszudrücken. Unter den neun Größen, welche man auf diese Weise im Ganzen erhält, kommen aber dreimal je zwei vor, welche unter einander gleich sind, wodurch sich die Anzahl der Größen auf sechs reducirt. Die Ausdrücke dieser sechs Größen will ich hier der Vollständigkeit wegen zusammenstellen, obwohl drei davon schon früher mitgetheilt sind.

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} A &= v. n. \left(\frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dx_c} \cdot \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dy_c} - \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b dy_c} \cdot \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b dx_c} \right) \\ B &= v. n. \left(\frac{d^2 T_{ac}}{dx_a dx_c} \cdot \frac{d^2 T_{ac}}{dy_a dy_c} - \frac{d^2 T_{ac}}{dx_a dy_c} \cdot \frac{d^2 T_{ac}}{dy_a dx_c} \right) \\ C &= v. n. \left(\frac{d^2 T_{ab}}{dx_a dx_b} \cdot \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a dy_b} - \frac{d^2 T_{ab}}{dx_a dy_b} \cdot \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a dx_b} \right) \\ D &= v. n. \left\{ \frac{d^2 (T_{ac} - T_{ab})}{(dx_a)^2} \cdot \frac{d^2 (T_{ac} - T_{ab})}{(dy_a)^2} - \left[\frac{d^2 (T_{ac} - T_{ab})}{dx_a dy_a} \right]^2 \right\} \\ E &= v. n. \left\{ \frac{d^2 (T_{ab} + T_{bc})}{(dx_b)^2} \cdot \frac{d^2 (T_{ab} + T_{bc})}{(dy_b)^2} - \left[\frac{d^2 (T_{ab} + T_{bc})}{dx_b dy_b} \right]^2 \right\} \\ F &= v. n. \left\{ \frac{d^2 (T_{ac} - T_{bc})}{(dx_c)^2} \cdot \frac{d^2 (T_{ac} - T_{bc})}{(dy_c)^2} - \left[\frac{d^2 (T_{ac} - T_{bc})}{dx_c dy_c} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Mit Hülfe dieser sechs Gröfsen kann man jedes Verhältnifs zweier Flächenelemente durch drei verschiedene Brüche darstellen, wie es die folgende tabellarische Zusammenstellung zeigt.

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_c}{ds_b} = \frac{E}{A} = \frac{A}{F} = \frac{C}{B} \\ \frac{ds_b}{ds_a} = \frac{C}{E} = \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \\ \frac{ds_a}{ds_c} = \frac{A}{C} = \frac{F}{B} = \frac{B}{D} \end{array} \right.$$

Wie man leicht sieht, beziehen sich die drei Horizontalreihen auf die drei Fälle, wo entweder in der Ebene a , oder in c , oder in b ein bestimmter Punkt angenommen ist, durch den die Strahlen gehen müssen. Von den drei Vertikalreihen der Brüche, welche die Verhältnisse der Flächenelemente darstellen, ist die erste aus den Gleichungen (1), die zweite aus den Gleichungen (2), und die dritte aus den Gleichungen (3) des §. 4 abgeleitet.

Da die drei Brüche, welche ein bestimmtes Verhältnifs zweier Flächenelemente darstellen, unter einander gleich seyn müssen, so erhält man zwischen den sechs Gröfsen, aus welchen die Brüche gebildet sind, folgende Gleichungen:

$$(12) \quad D = \frac{BC}{A}; \quad E = \frac{CA}{B}; \quad F = \frac{AB}{C}.$$

$$(13) \quad A^2 = EF; \quad B^2 = FD; \quad C^2 = DE.$$

Mit diesen sechs Gröfsen sind nun die weiteren Rechnungen anzustellen, und da jedes Verhältnifs je zweier Flächenelemente durch drei verschiedene Brüche dargestellt ist, so hat man unter diesen die Wahl, und kann in jedem speciellen Falle den Bruch anwenden, welcher für diesen Fall der geeignetste ist.

III. Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung für den Fall, daß keine Concentration der Strahlen stattfindet.

§. 7. Wir wollen zunächst denselben Fall betrachten, auf welchen der Kirchhoff'sche Ausdruck sich bezieht,

indem wir zu bestimmen suchen, wieviel Wärme zwei Flächenelemente sich gegenseitig zusenden, unter der Voraussetzung, daß jeder Punkt des einen Elementes von jedem Punkte des anderen einen Strahl und auch nur Einen Strahl, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen, die man gesondert betrachten kann, erhält.

Seyen zwei Elemente ds_a und ds_c in den Ebenen a und c (Fig. 6 Taf. I) gegeben, so wollen wir zuerst die Wärme bestimmen, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet.

Dazu denken wir uns die Mittelebene b parallel der Ebene a gelegt in einem Abstände ρ , welchen wir als so klein voraussetzen, daß bei jedem von ds_a nach ds_c gehenden Strahle der Theil, welcher zwischen den Ebenen a und b liegt, als geradlinig, und das Mittel, welches er auf dieser Strecke durchläuft, als homogen anzusehen ist. Nehmen wir nun in dem Elemente ds_a irgend einen Punkt, und betrachten das Strahlenbüschel, welches von diesem Punkte aus nach dem Elemente ds_c geht, so schneidet dieses die Ebene b in einem Elemente ds_b , dessen Gröfse durch einen der drei in der obersten Horizontalreihe von (II) stehenden Brüche ausgedrückt werden kann. Wir wollen den letzten Bruch wählen, und erhalten dadurch die Gleichung:

$$(14) \quad ds_b = \frac{B}{C} ds_a.$$

Die hierin vorkommende Gröfse C läfst sich nun in diesem Falle wegen der eigenthümlichen Lage der Ebene b in eine besonders einfache Form bringen.

Es sey, wie es auch von Kirchhoff geschehen ist, das Coordinatensystem in b so gewählt, daß es dem Coordinatensysteme in der parallelen Ebene a vollkommen correspondirt. Nämlich die Anfangspunkte beider Coordinatensysteme sollen in einer auf beiden Ebenen senkrechten Geraden liegen, und die Coordinaten des einen Systemes sollen den entsprechenden des anderen Systemes parallel seyn. Dann ist der Abstand r zwischen zwei in den bei-

den Ebenen liegenden Punkten mit den Coordinaten x, y_a und x_b, y_b bestimmt durch die Gleichung:

$$(15) \quad r = \sqrt{\rho^2 + (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Denken wir uns nun einen Strahl von dem einen dieser Punkte nach dem anderen gehend, so wird die Länge seines Weges, da die Fortpflanzung zwischen beiden Ebenen als geradlinig vorausgesetzt wird, einfach durch den Abstand r der beiden Punkte dargestellt, und wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Ebene a , welche sich der Voraussetzung nach auf der Strecke bis zur Ebene b nicht merklich ändert, mit v_a bezeichnen, so ist die Zeit, welche der Strahl auf dieser Strecke gebraucht, bestimmt durch die Gleichung:

$$T_{ab} = \frac{r}{v_a}.$$

Demgemäß läßt sich der Ausdruck von C so schreiben:

$$C = v_a \cdot n \cdot \frac{1}{v_a^2} \left(\frac{d^2 r}{dx_a dx_b} \cdot \frac{d^2 r}{dy_a dy_b} - \frac{d^2 r}{dx_a dy_b} \cdot \frac{d^2 r}{dy_a dx_b} \right).$$

Setzt man hierin für r seinen Werth aus (15), so kommt:

$$(16) \quad C = \frac{1}{v_a^2} \frac{\rho^2}{r^4}.$$

Hierdurch geht die Gleichung (14) über in:

$$(17) \quad ds_b = v_a^2 \frac{r^4}{\rho^2} B ds_a.$$

Bezeichnen wir noch den Winkel, welchen das betrachtete, von einem Punkte des Elementes ds_a ausgehende unendlich schmale Strahlenbüschel mit der auf dem Elemente errichteten Normale bildet, mit ϑ , so ist

$$\cos \vartheta = \frac{\rho}{r},$$

und man kann daher der vorigen Gleichung auch folgende Form geben:

$$(18) \quad ds_b = \frac{v_a^2 r^2}{\cos^2 \vartheta} B ds_a.$$

§. 8. Nachdem die Gröfse des Flächenelementes ds , bestimmt ist, läßt sich auch die Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_b zusendet, leicht ausdrücken.

Von jedem Punkte des Elementes ds_s geht nämlich nach ds_s ein unendlich schmales Strahlenbüschel, und die Kegelöffnungen der von den verschiedenen Punkten ausgehenden Büschel sind als gleich anzusehen. Die Gröfse der Kegelöffnung eines solchen Strahlenbüschels wird bestimmt durch die Gröfse und Lage jenes Flächenelementes ds_s , in welchem der Kegel die Ebene b schneidet. Um diese Kegelöffnung geometrisch auszudrücken, denken wir uns um den betreffenden Punkt, von dem die Strahlen ausgehen, mit dem Radius ϱ eine Kugelfläche geschlagen, innerhalb deren wir die Fortpflanzung der Strahlen als geradlinig betrachten. Nennen wir dann das Flächenelement, in welchem diese Kugelfläche von dem Strahlenkegel geschnitten wird, $d\sigma$, so stellt der Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ die Oeffnung des Kegels dar. Da nun das Flächenelement ds_s von der Spitze des Kegels um die Strecke r entfernt ist, und die auf ds_s errichtete Normale, welche mit der vorher erwähnten, auf ds_s errichteten parallel ist, mit dem unendlich schmalen Strahlenkegel den Winkel ϑ bildet, so hat man die Gleichung:

$$(19) \quad \frac{d\sigma}{\varrho^2} = \frac{\cos \vartheta \cdot ds_s}{r^2},$$

und wenn man hierin für ds_s den in (18) gegebenen Ausdruck setzt, so kommt:

$$(20) \quad \frac{d\sigma}{\varrho^2} = \frac{v_a^2}{\cos \vartheta} B ds_s.$$

Es kommt nun darauf an, zu bestimmen, wie grofs derjenige Theil der von dem Elemente ds_s ausgesandten Wärme ist, welcher dieser unendlich schmalen Kegelöffnung entspricht, oder, mit anderen Worten, wie viel Wärme das Element ds_s durch jenes auf der Kugelfläche bestimmte Element $d\sigma$ sendet. Diese Wärmemenge ist erstens proportional der Gröfse des ausstrahlenden Elementes ds_s , ferner proportional der Gröfse der Kegelöffnung, also dem Bruche $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$, und endlich, nach dem bekannten Ausstrahlungsgesetze, proportional dem Cosinus des Winkels ϑ , welchen der un-

endlich schmale Strahlenkegel mit der Normale bildet. Man kann sie also ausdrücken durch das Product:

$$\varepsilon \cos \vartheta \frac{d\sigma}{\varrho^2} ds_a,$$

worin ε ein von der Temperatur des Flächenelementes abhängiger Factor ist. Zur Bestimmung dieses Factors haben wir die Bedingung, dafs die Wärmemenge, welche das Element ds_a im Ganzen ausstrahlt, also der ganzen über der Ebene a befindlichen Halbkugel zustrahlt, gleich dem Producte $e_a ds_a$ seyn mufs, worin e_a die Stärke der Emission der Ebene a an der Stelle, wo das Element ds_a liegt, bedeutet. Man erhält also die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho^2} \int \cos \vartheta d\sigma = e_a,$$

worin die Integration über die Halbkugel auszudehnen ist, und daraus folgt:

$$\varepsilon \pi = e_a.$$

Wenn man den hierdurch bestimmten Werth von ε in den obigen Ausdruck einsetzt, so erhält man für die Wärmemenge, welche das Element ds_a durch $d\sigma$ sendet, die Formel:

$$\frac{e_a}{\pi} \cos \vartheta \frac{d\sigma}{\varrho^2} ds_a.$$

In diese Formel hat man nun für den Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ den oben gewonnenen und in Gleichung (20) angegebenen Werth zu setzen, um den gesuchten Ausdruck der Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet, zu erhalten, nämlich:

$$e_a v_a^2 \frac{B}{\pi} ds_a ds_c.$$

Sucht man in ganz derselben Weise die Wärmemenge, welche umgekehrt das Element ds_c dem Elemente ds_a zusendet, und bezeichnet dabei die Stärke der Emission der Ebene c an der Stelle, wo das Element ds_c liegt, mit e_c , und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen in der Nähe des Elementes mit v_c , so findet man:

$$: v_a^2 \frac{B}{\pi} ds_a ds_e.$$

§. 9. Diese im vorigen §. gewonnenen Ausdrücke sind im Uebrigen gleich dem in §. 2 mitgetheilten Kirchhoff'schen Ausdrücke, nur darin unterscheiden sie sich von demselben, daß sie noch das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Factor enthalten, welches in Kirchhoff's Ausdrücke nicht vorkommt, indem Kirchhoff an der betreffenden Stelle nur von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit *im leeren Raume* spricht, und diese als Einheit nimmt. Da nun aber die Körper, deren gegenseitige Zustrahlung man betrachtet, sich möglicher Weise in verschiedenen Mitteln befinden können, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschieden sind, so ist für solche Fälle dieser Factor nicht unwesentlich, und sein Vorkommen führt sofort zu einem eigenthümlichen, theoretisch interessanten Schlusse.

Wie in §. 1 erwähnt wurde, nahm man bisher an, daß bei vollkommen schwarzen Körpern die Stärke der Emission nur von der Temperatur abhängt, so daß also zwei solche Körper bei gleicher Temperatur von gleichen Stücken ihrer Oberflächen gleich viel Wärme ausstrahlen. Daß die Natur des umgebenden Mittels auch einen Einfluß auf die Stärke der Ausstrahlung haben könne, ist meines Wissens noch nirgends zur Sprache gebracht. Da nun aber in den beiden obigen Ausdrücken für die gegenseitige Zustrahlung zweier Elemente ein Factor vorkommt, der von der Natur des Mittels abhängt, so ist dadurch die Nothwendigkeit, das Mittel zu berücksichtigen, und zugleich die Möglichkeit, seinen Einfluß zu bestimmen, gegeben.

Wenn man aus jenen beiden Ausdrücken ein Verhältniß bildet, und dann denjenigen Factor, welcher in beiden Gliedern gemeinsam vorkommt, nämlich $\frac{B}{\pi} ds_a ds_e$, forthebt, so ergibt sich, daß die Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_e zusendet, sich zu derjenigen, welche das Element ds_e dem Elemente ds_a zusendet, verhält wie

$$e_a v_a^2 : e_e v_e^2.$$

Wollte man nun annehmen, daß bei gleicher Temperatur die Ausstrahlung unbedingt gleich sey, auch wenn die den beiden Elementen angrenzenden Mittel verschieden sind, so müßte man für gleiche Temperatur $e_a = e_c$ setzen, und es würden dann die Wärmemengen, welche sich beide Elemente gegenseitig zustrahlen, nicht gleich seyn, sondern sich wie $v_a^2 : v_c^2$ verhalten. Daraus würde folgen, daß zwei Körper, welche sich in verschiedenen Mitteln befinden, z. B. der eine in Wasser und der andere in Luft, durch gegenseitige Zustrahlung nicht ihre Temperaturen auszugleichen suchen, sondern daß der eine den anderen durch Zustrahlung zu einer höheren Temperatur erwärmen könnte, als er selbst hat.

Gesteht man dagegen jenen von mir als Grundsatz hingestellten Satz, daß die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, ganz allgemein als richtig zu, so muß man die gegenseitige Zustrahlung zweier vollkommen schwarzer Flächenelemente von gleicher Temperatur als gleich betrachten, und somit setzen:

$$(21) \quad e_a v_a^2 = e_c v_c^2,$$

Daraus folgt die Proportion:

$$(22) \quad e_a : e_c = v_c^2 : v_a^2,$$

oder auch, da das Verhältniß der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Brechungscoefficienten der beiden Mittel ist, welche wir mit n_a und n_c bezeichnen wollen, die Proportion:

$$(23) \quad e_a : e_c = n_a^2 : n_c^2.$$

Hiernach ist also die Ausstrahlung vollkommen schwarzer Körper bei gleicher Temperatur in verschiedenen Mitteln verschieden, und verhält sich umgekehrt, wie die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Mitteln, oder direct wie die Quadrate ihrer Brechungscoefficienten. Die Ausstrahlung in Wasser muß sich somit zu der in Luft annähert wie $(\frac{4}{3})^2 : 1$ verhalten.

Berücksichtigt man den Umstand, daß in der von einem vollkommen schwarzen Körper ausgestrahlten Wärme Strah-

len von sehr verschiedenen Farben vorkommen, und giebt man als richtig zu, daß die Gleichheit der gegenseitigen Zustrahlung nicht bloß für die Wärme im Ganzen, sondern auch für jede Farbe im Einzelnen gelten muß, so erhält man für jede Farbe eine Proportion der Art, wie (22) und (23), worin aber das an der rechten Seite stehende Verhältniß, welchem das Verhältniß der Ausstrahlungen gleich gesetzt ist, etwas verschiedene Werthe hat.

Will man endlich statt der vollkommen schwarzen Körper auch Körper von anderer Natur betrachten, bei denen nicht vollkommene, sondern nur theilweise Absorption der auffallenden Wärmestrahlen stattfindet, so muß man statt der Emission einen Bruch, welcher die Emission als Zähler und den Absorptionscoefficienten als Nenner hat, in die Formeln einführen, und erhält dann für diesen Bruch entsprechende Beziehungen, wie vorher für die Emission allein. Auf diese Verallgemeinerung des Resultates, bei welcher auch der Einfluß der Strahlenrichtung auf die Emission und Absorption zur Sprache kommen würde, brauche ich hier nicht einzugehen, weil sie sich bei angemessener Betrachtung des Gegenstandes von selbst ergibt.

IV. Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung zweier Flächenelemente für den Fall, daß das eine Flächenelement das optische Bild des anderen ist.

§. 10. Wir wollen nun zu dem Falle übergehen, wo die bisher gemachte Voraussetzung, daß die Ebenen a und c , soweit sie in Betracht kommen, ihre Strahlen in der Weise austauschen, daß von jedem Punkte der einen nach jedem Punkte der anderen ein Strahl, und auch nur Ein Strahl, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen gelange, nicht erfüllt ist. Die Strahlen, welche von den Punkten der einen Ebene divergirend ausgehen, können durch Brechungen oder Reflexionen convergirend werden, und in der anderen Ebene wieder zusammentreffen, so daß es für einen in der Ebene a zur Betrachtung ausgewählten Punkt p , in der Ebene c einen oder mehrere

Punkte oder Linien giebt, in welchen sich unendlich viele vom Punkte p_a kommende Strahlen schneiden, während andere Stellen der Ebene c gar keine Strahlen von jenem Punkte erhalten. Natürlich findet in einem solchen Falle auch mit den Strahlen, welche von der Ebene c ausgehend nach der Ebene a gelangen, das Entsprechende statt, da die zwischen den beiden Ebenen hin- und zurückgehenden Strahlen gleiche Wege beschreiben.

Unter den unendlich vielen verschiedenen Fällen dieser Art wollen wir, der größeren Anschaulichkeit wegen, zunächst den extremen Fall behandeln, wo alle Strahlen, welche der Punkt p_a der Ebene a innerhalb eines gewissen endlichen Kegelraumes aussendet, in einem einzelnen Punkte p_c der Ebene c wieder zusammentreffen, wie es in Fig. 7 Taf. I angedeutet ist. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Richtungsänderung der Strahlen durch einen sphärischen Spiegel oder eine Linse, oder auch durch irgend ein System von centrirten Spiegeln oder Linsen bewirkt ist, und wenn man von der dabei stattfindenden sphärischen und chromatischen Aberration absieht, wobei zu bemerken ist, daß die chromatische Aberration hier ohnehin nicht zu berücksichtigen ist, da wir uns von vorne herein auf die Betrachtung homogener Strahlen beschränkt haben. Zwei in der angegebenen Weise zusammengehörige Punkte, welche den Ausgangs- und den Vereinigungspunkt der Strahlen bilden, werden, wie schon oben erwähnt, *conjugirte Brennpunkte* genannt.

In einem solchen Falle sind für jeden der betreffenden Strahlen durch die Coordinaten x_a, y_a des Ausgangspunktes p_a auch die Coordinaten x_c, y_c des Punktes p_c , wo der Strahl die Ebene c trifft, gleich mit bestimmt. Die übrigen in der Nähe von p_c liegenden Punkte der Ebene c erhalten vom Punkte p_a keine Strahlen, weil es nach ihnen hin keinen Weg giebt, der die Eigenschaft hätte, daß die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege gebraucht, verglichen mit der Zeit, welche er auf jedem anderen nahe liegenden Wege gebrauchen würde, im mathematischen

Sinne ein Minimum ist. Demnach kann auch die Gröfse T_{ac} , welche dieses Minimum der Zeit darstellt, für keinen der um p_c gelegenen Punkte, sondern nur für den Punkt p_c selbst einen reellen Werth haben. Die Differentialcoefficienten von T_{ac} , in denen die Coordinaten x_a, y_a als constant, und gleichzeitig eine der Coordinaten x_c, y_c als veränderlich, oder umgekehrt x_c, y_c als constant, und zugleich eine der Coordinaten x_a, y_a als veränderlich vorausgesetzt werden, können somit keine endlichen reellen Gröfsen seyn. Daraus ergibt sich, dafs von den sechs durch Gleichung (1) bestimmten Gröfsen A, B, C, D, E, F die drei B, D, F , welche Differentialcoefficienten von T_{ac} enthalten, in unserem gegenwärtigen Falle nicht anwendbar sind.

Die drei anderen Gröfsen A, C, E dagegen enthalten nur Differentialcoefficienten der Gröfsen T_{ab} und T_{bc} . Wenn wir nun annehmen, die Ebene b sey so gewählt, dafs zwischen ihr und den beiden Ebenen a und c , soweit wir die Ebenen betrachten, der Strahlenaustausch in der oben vorausgesetzten Weise stattfinde, dafs von jedem Punkte der Ebene b nach jedem Punkte der Ebenen a und c ein Strahl und auch nur Ein Strahl, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen geht, so haben die Gröfsen T_{ab} und T_{bc} und ihre Differentialcoefficienten für alle in Betracht kommende Punkte reelle und nicht unendlich grofse Werthe. Die Gröfsen A, C und E sind daher im gegenwärtigen Falle ebenso gut, wie in dem früher betrachteten anwendbar.

Eine dieser Gröfsen, nämlich E , nimmt in diesem Falle einen speciellen Werth an, der sich sofort ableiten läfst. Für die drei Punkte, in welchen ein Strahl die drei Ebenen a, b, c schneidet, müssen die beiden unter (1) gegebenen Gleichungen gelten:

$$\frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b} = 0; \quad \frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dy_b} = 0.$$

Da nun in unserem gegenwärtigen Falle durch die Lage der beiden Punkte p_a und p_c in den Ebenen a und c die Lage des Punktes, wo der Strahl die Ebene b schneidet, nicht bestimmt ist, sondern die Ebene b in allen Punkten

eines gewissen endlichen Flächenraumes geschnitten werden kann, so müssen die beiden vorigen Gleichungen für alle diese Punkte gültig seyn, woraus folgt, daß man durch Differentiation dieser Gleichungen nach x_i und y_i ebenfalls wieder gültige Gleichungen erhalten muß, also:

$$(24) \quad \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dx_i^2} = 0; \quad \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dx_i dy_i} = 0; \quad \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dy_i^2} = 0.$$

Wendet man diese Gleichungen auf diejenige der Gleichungen (I) an, durch welche E bestimmt wird, so kommt:

$$(25) \quad E = 0.$$

Die beiden anderen Größen A und C haben im Allgemeinen endliche Werthe, welche je nach Umständen verschieden sind, und diese müssen nun zu den folgenden Bestimmungen angewandt werden.

§. 11. Es sey angenommen, das Element ds_a der Ebene a habe ein optisches Bild, welches in die Ebene c fällt, und welches wir ds_c nennen wollen, so daß also jeder Punkt des Elementes ds_a einen Punkt des Elementes ds_c zum conjugirten Brennpunkte hat, und umgekehrt. Es soll nun untersucht werden, ob die Wärmemengen, welche diese Flächenelemente, wenn sie als Elemente der Oberflächen zweier vollkommen schwarzer Körper von gleicher Temperatur betrachtet werden, sich gegenseitig zusenden, gleich sind.

Um zunächst das zu dem gegebenen Elemente ds_a gehörige Bild ds_c seiner Lage und Größe nach zu bestimmen, nehmen wir in der Zwischenebene b irgend einen Punkt p_i an, und denken uns von sämtlichen Punkten des Elementes ds_a Strahlen durch diesen Punkt p_i gehend. Jeder dieser Strahlen trifft die Ebene c in dem conjugirten Brennpunkte desjenigen Punktes, von welchem er ausgegangen ist, und somit ist das Flächenelement, in welchem dieses Strahlenbüschel die Ebene c schneidet, gerade das mit ds_c bezeichnete optische Bild des Elementes ds_a . Wir können daher, um das Bild ds_c seiner Größe nach im Verhältnisse zu ds_a auszudrücken, einen der drei in der un-

tersten Horizontalreihe von (II) angeführten Brüche anwenden, welche das Verhältniß derjenigen beiden Flächenelemente darstellen, in welchen ein durch einen Punkt p , der Zwischenebene b gehendes unendlich schmales Strahlenbüschel die beiden Ebenen a und c schneidet; und zwar ist von den drei dort stehenden Brüchen in diesem Falle nur der erste brauchbar, weil die beiden anderen unbestimmt sind. Wir haben also die Gleichung:

$$(26) \quad \frac{ds_a}{ds_c} = \frac{A}{C}.$$

Diese Gleichung ist auch in optischer Beziehung von Interesse, indem sie die allgemeinste Gleichung zur Bestimmung des Größenverhältnisses zwischen einem Gegenstande und seinem optischen Bilde ist, wobei zu bemerken ist, daß die Zwischenebene b , auf welche sich die Größen A und C beziehen, beliebig ist, und daher in jedem einzelnen Falle so gewählt werden kann, wie es für die Rechnung am bequemsten ist.

§. 12. Nachdem das Flächenelement ds_c , welches zu ds_a als Bild gehört, bestimmt ist, nehmen wir in der Ebene b statt eines Punktes ein Flächenelement ds , und betrachten die Strahlen, welche die beiden Elemente ds_a und ds_c durch dieses Element ds senden. Alle Strahlen, welche von einem Punkte des Elementes ds_a ausgehend, durch das Element ds gehen, vereinigen sich wieder in einem Punkte des Elementes ds_c , und somit treffen alle Strahlen, welche das Element ds_a durch ds sendet, gerade das Element ds_c , und umgekehrt die Strahlen, welche ds_c durch ds sendet, treffen sämmtlich das Element ds_a . Die beiden Wärmemengen, welche die Elemente ds_a und ds_c dem Elemente ds zusenden, sind somit auch die Wärmemengen, welche die Elemente ds_a und ds_c durch das Zwischenelement ds hindurch einander gegenseitig zusenden. Diese Wärmemengen lassen sich nun dem Früheren nach ohne Weiteres angeben.

Es gilt nämlich für die Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds zusendet, derselbe Ausdruck.

welcher in §. 8 für diejenige Wärmemenge entwickelt wurde, welche das Element ds_a dem Elemente ds_e zusendet, wenn man darin nur für ds_e setzt ds_i , und für die Gröfse B die Gröfse C einführt. Der Ausdruck lautet also:

$$e_a v_a^2 \frac{C}{\pi} ds_a ds_i.$$

Ebenso gilt für die Wärmemenge, welche das Element ds_e dem Elemente ds_i zusendet, derselbe Ausdruck, welcher dort für die Wärmemenge angegeben wurde, welche das Element ds_e dem Elemente ds_a zusendet, wenn man darin für ds_a setzt ds_i , und für die Gröfse B die Gröfse A einführt, also:

$$e_e v_e^2 \frac{A}{\pi} ds_e ds_i.$$

Bedenkt man nun, dafs nach Gleichung (26) ist:

$$C ds_a = A ds_e,$$

so sieht man, dafs die beiden gefundenen Ausdrücke sich unter einander verhalten wie $e_a v_a^2 : e_e v_e^2$.

Ganz dasselbe Resultat finden wir, wenn wir in der Zwischenebene b irgend ein anderes Flächenelement ds_i nehmen, und die Wärmemengen betrachten, welche sich die beiden Elemente ds_a und ds_e durch dieses Element gegenseitig zusenden. Immer stehen die beiden Wärmemengen zu einander in dem Verhältnisse $e_a v_a^2 : e_e v_e^2$. Da nun die Wärmemengen, welche sich die Elemente ds_a und ds_e im Ganzen zusenden, aus denjenigen, welche sie sich durch die einzelnen Elemente der Zwischenebene hindurch zusenden, zusammengesetzt sind, so mufs auch für sie dasselbe Verhältnifs gelten, und wir finden somit als Endresultat, dafs die Wärmemengen, welche die Flächenelemente ds_a und ds_e sich im Ganzen gegenseitig zusenden, sich verhalten wie

$$e_a v_a^2 : e_e v_e^2.$$

Dieses ist dasselbe Verhältnifs, welches in den §§. 8 und 9 für den Fall gefunden wurde, wo keine Concentration von Strahlen stattfindet. Es ergibt sich also, dafs die

Concentration der Strahlen, wie sehr sie auch die *absolute Gröfse* der Wärmemengen, welche zwei Flächenelemente durch Strahlung mit einander austauschen, verändert, doch das *Verhältnifs* derselben ungeändert läfst.

In §. 9 ist gezeigt, dafs, wenn bei der gewöhnlichen, ohne Concentration stattfindenden Zustrahlung der Satz gelten soll, dafs dadurch nicht Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergeführt werden kann, dann die Ausstrahlung in verschiedenen Medien verschieden seyn mufs, und zwar in der Weise, dafs man für vollkommen schwarze Körper von gleicher Temperatur hat:

$$e_a v_a^2 = e_e v_e^2.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so sind auch in unserem gegenwärtigen Falle, wo von den Flächenelementen ds_a und ds_e das eine das Bild des anderen ist, die Wärmemengen, welche sie sich gegenseitig zusenden, unter einander gleich, und es kann daher, trotz der Concentration der Strahlen, das eine Element das andere nicht zu einer höheren Temperatur erwärmen, als es selbst hat.

V. Beziehung zwischen der Vergrößerung und dem Verhältnisse der beiden Kegelöffnungen eines Elementarstrahlenbüschels.

§. 13. Als ein Nebenresultat der vorstehenden Betrachtung möchte ich hier gelegentlich eine Proportion entwickeln, welche mir von allgemeinem Interesse zu seyn scheint, indem sie eine eigenthümliche Verschiedenheit in dem Verhalten der Strahlenbüschel beim Gegenstande und beim Bilde angiebt, welche stets in bestimmter Weise stattfinden mufs, wenn Gegenstand und Bild verschiedene Gröfsen haben.

Wenn wir ein unendlich schmales Strahlenbüschel betrachten, welches von einem Punkte des Elementes ds_a ausgehend durch das Element ds_e der Zwischenebene geht, und sich dann wieder in einem Punkte des Elementes ds_e vereinigt, so können wir die Gröfse der Divergenz, welche die Strahlen an ihrem Ausgangspunkte haben, vergleichen mit der Gröfse der Convergenz, welche dieselben Strahlen

an ihrem Vereinigungspunkte haben. Diese Divergenz und Convergenz, wofür wir auch mit gemeinsamem Ausdrucke sagen können: *die Oeffnungen der unendlich schmalen Kegel*, welche das Strahlenbüschel am Ausgangs- und Vereinigungspunkte bildet, ergeben sich unmittelbar durch dasselbe Verfahren, welches wir in §. 8 angewandt haben.

Wir denken uns um jeden der Punkte eine Kugelfläche mit so kleinem Radius beschrieben, daß wir die Strahlen bis zur Kugelfläche als geradlinig ansehen können, und betrachten dann das Flächenelement, in welchem das Strahlenbüschel die Kugelfläche schneidet. Sey dieses Flächenelement mit $d\sigma$ bezeichnet, und heiße der Radius der Kugel ϱ , so wird die Oeffnung des unendlich schmalen Kegels, welcher die Strahlen, soweit sie als geradlinig zu betrachten sind, einschließt, durch den Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ dargestellt.

Diesen Bruch haben wir in §. 8 für einen ähnlichen Fall durch die Gleichung (20) bestimmt, und in dem dort gegebenen Ausdrucke brauchen wir nur die Buchstaben etwas zu ändern, um die für unseren gegenwärtigen Fall passenden Ausdrücke zu erhalten. Um die Kegelöffnung an dem in der Ebene a liegenden Ausgangspunkte der Strahlen auszudrücken, hat man in dem dortigen Ausdrucke statt des Elementes ds , das Element ds_a , und statt der Gröfse B die Gröfse C zu setzen. Außerdem wollen wir das Zeichen ϑ , welches den Winkel zwischem dem Elementarstrahlenbüschel und der auf dem Flächenelemente ds_a errichteten Normale bedeutet, um bestimmter anzudeuten, daß es sich um den an der Ebene a liegenden Winkel handelt, in ϑ_a umändern, und aus demselben Grunde auch den Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$, welcher die gesuchte Kegelöffnung darstellt, mit dem Index a versehen. Dann kommt:

$$(27) \quad \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a = \frac{v_a^2}{\cos \vartheta_a} C ds_a.$$

Um die andere entsprechende Gleichung zu erhalten, welche die Kegelöffnung an dem in der Ebene c liegenden

Vereinigungspunkte bestimmt, braucht man in der vorigen nur überall, wo der Index a steht, den Index c zu setzen, und außerdem die Gröfse C mit A zu vertauschen, also:

$$(28) \quad \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = \frac{v_c^2}{\cos \vartheta_c} A ds_c.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Proportion:

$$\frac{\cos \vartheta_a}{v_a^2} \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : \frac{\cos \vartheta_c}{v_c^2} \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = C : A$$

und wenn man hierauf die Gleichung (26) anwendet, so kommt:

$$(29) \quad \frac{\cos \vartheta_a}{v_a^2} \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : \frac{\cos \vartheta_c}{v_c^2} \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = ds_c : ds_a.$$

Führt man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Brechungscoëfficienten der Mittel ein, so lautet die Proportion:

$$(30) \quad n_a^2 \cos \vartheta_a \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : n_c^2 \cos \vartheta_c \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = ds_c : ds_a.$$

Das Verhältniß, welches in diesen Proportionen an der rechten Seite steht, ist das Gröfsenverhältniß zwischen einem Flächenelemente des Bildes und dem entsprechenden Flächenelemente des Gegenstandes, also kurz die Flächenvergrößerung, und man erhält also durch diese Proportionen eine einfache Beziehung zwischen der Vergrößerung und dem Verhältnisse der Kegelöffnungen eines Elementarstrahlenbüschels. Dabei ist es, wie man leicht sieht, für die Gültigkeit der Proportionen nicht gerade nöthig, daß die Strahlen schließlic*h* *convergirend* sind, und sich in einem Punkte wirklich schneiden, sondern sie können auch *divergirend* seyn, so daß ihre nach rückwärts gezogenen geradlinigen Verlängerungen sich in einem Punkte schneiden, und das entstehende Bild ein in der Optik sogenanntes virtuelles ist.

Nimmt man als speciellen Fall an, das Mittel am Ausgangs- und am Vereinigungspunkte sey gleich, wie es z. B. stattfindet, wenn die Strahlen von einem in der Luft befindlichen Gegenstande ausgehen, und, nachdem sie irgend

welche Brechungen oder Reflexionen erlitten haben, ein Bild geben, welches sich in der Luft befindet, oder in der Luft gedacht wird, so ist $v_a = v$, und $n_a = n$, zu setzen, und es kommt:

$$\cos \vartheta_a \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2} \right)_a : \cos \vartheta \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2} \right) = ds : ds_a.$$

Fügt man ferner noch als Bedingung hinzu, daß das Elementarstrahlenbüschel mit beiden Flächenelementen gleiche Winkel bilde, z. B. auf beiden senkrecht stehe, so heben sich auch die beiden Cosinus fort, und es kommt:

$$\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2} \right)_a : \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2} \right) = ds : ds_a.$$

In diesem Falle stehen also die Kegelöffnungen des Elementarstrahlenbüschels am Gegenstande und am Bilde einfach im umgekehrten Verhältnisse, wie die Gröfsen der einander entsprechenden Flächenelemente von Gegenstand und Bild.

In der ebenso inhaltreichen als klaren Auseinandersetzung der Gesetze der Brechung in Systemen kugeligter Flächen, welche Helmholtz in seiner „Physiologischen Optik“¹⁾ gegeben hat, um daran die Betrachtung derjenigen Brechungen zu knüpfen, welche im Auge vorkommen, findet sich auf S. 50, und erweitert auf S. 54 eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen der Bildgröfse und der Convergenz der Strahlen für den Fall ausdrückt, wo die Richtungsänderung der Strahlen durch Brechung oder auch durch Reflexion in centrirten Kugelflächen bewirkt wird, und wo die Strahlen auf den betreffenden Ebenen, welche Gegenstand und Bild enthalten, angenähert senkrecht stehen. In der Allgemeinheit, wie in den Proportionen (29) und (30) ist die Beziehung, so viel ich weifs, noch nirgends angegeben.

VI. Allgemeine Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung zwischen Flächen, in denen beliebige Concentrationen vorkommen können.

§. 14. Es mufs nun die Betrachtung dahin verallgemeinert werden, daß sie nicht blofs den extremen Fall, wo alle von einem Punkte der Ebene a innerhalb eines gewis-

1) Allgemeine Encyclopädie der Physik, herausgegeben von G. Karsten.

sen endlichen Kegelraumes ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte der Ebene c zusammentreffen, so daß dort ein conjugirter Brennpunkt entsteht, sondern jeden beliebigen Fall der Strahlenconcentration umfaßt.

Um den Begriff der Concentration näher festzustellen sey folgende Definition eingeführt. Wenn von irgend einem Punkte p_a Strahlen ausgehen und auf die Ebene c fallen, und diese Strahlen haben in der Nähe dieser Ebene solche Richtungen, daß an einer Stelle der Ebene die Dichtigkeit der auffallenden Strahlen gegen die mittlere Dichtigkeit unendlich groß ist, so wollen wir sagen, es finde an dieser Stelle Concentration der von p_a ausgehenden Strahlen statt.

Nach dieser Definition können wir den Fall der Strahlenconcentration leicht mathematisch kenntlich machen. Wir nehmen zwischen dem Punkte p_a und der Ebene c irgend eine Zwischenebene b , welche so gelegen ist, daß in dieser keine Concentration der von p_a ausgehenden Strahlen stattfindet, und daß auch die Ebenen b und c , soweit sie hierbei in Betracht kommen, zu einander in solcher Beziehung stehen, daß die von den Punkten der einen ausgehenden Strahlenbüschel in der anderen keine Concentration erleiden. Dann denken wir uns ein von p_a ausgehendes, unendlich schmales Strahlenbüschel, welches die Ebenen b und c schneidet, und vergleichen die Größen der Flächenelemente ds_b und ds_c , in denen der Durchschnitt stattfindet. Wenn dann das Element ds_c im Verhältnisse zu ds_b verschwindend klein ist, so daß man setzen kann:

$$(31) \quad \frac{ds_c}{ds_b} = 0,$$

so ist das ein Zeichen, daß in der Ebene c Strahlenconcentration in dem oben angegebenen Sinne stattfindet.

Gehen wir nun zu den in §. 6 gegebenen Gleichungen (II) zurück, so sind die in der ersten Horizontalreihe stehenden Gleichungen auf unseren gegenwärtigen Fall bezüglich, und unter den drei dort befindlichen Brüchen, welche das Verhältniß der Flächenelemente darstellen, ist wie-

derum der erste in unserem Falle anwendbar, weil nach der gemachten Annahme über die Lage der Zwischenebene die Gröfsen A und E sich in gewöhnlicher Weise bestimmen lassen. Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{ds_c}{ds_b} = \frac{E}{A}.$$

Soll dieser das Verhältniß der beiden Flächenelemente ausdrückende Bruch Null werden, so muß es dadurch geschehen, daß der Zähler E Null wird, denn der Nenner A kann nach der gemachten Annahme über die Lage der Ebene b nicht unendlich groß werden. Wir haben also als mathematisches Criterium zur Entscheidung, ob die vom Punkte p_a ausgehenden Strahlen an der betreffenden Stelle der Ebene c eine Concentration erleiden oder nicht, die Bedingungsgleichung:

$$(32) \quad E = 0,$$

welche im Falle der Concentration erfüllt seyn muß.

Nehmen wir nun umgekehrt an, es sey in der Ebene c ein Punkt p_c gegeben, und es soll entschieden werden, ob die von diesem ausgehenden Strahlen an irgend einer Stelle der Ebene a eine Concentration erleiden, so haben wir in ganz entsprechender Weise die Bedingung:

$$\frac{ds_a}{ds_b} = 0,$$

und da wir nach (II) setzen können:

$$\frac{ds_a}{ds_b} = \frac{E}{C},$$

so erhalten wir wieder dieselbe Bedingungsgleichung:

$$E = 0.$$

In der That ist auch leicht zu sehen, daß in dem Falle, wo die von einem Punkte der Ebene a ausgehenden Strahlen in einem Punkte der Ebene c eine Concentration erleiden, auch umgekehrt die von diesem letzteren Punkte ausgehenden Strahlen in dem ersteren eine Concentration erleiden müssen.

Da wir in den Gleichungen (12) und (13) die Beziehungen ausgedrückt haben, welche zwischen den sechs Grö-

fsen A, B, C, D, E, F stattfinden, so können wir diese Gleichungen anwenden, um zu erkennen, was in einem solchen Falle, wo $E = 0$ wird, während A und C von Null verschiedene endliche Werthe haben, aus den drei Gröfsen B, D und F wird. Nach jenen Gleichungen hat man:

$$(33) \quad B = \frac{AC}{E}; \quad D = \frac{C^2}{E}; \quad F = \frac{A^2}{E}.$$

Daraus ergibt sich, dafs alle drei Gröfsen für den gegenwärtigen Fall unendlich grofs werden.

§. 15. Wir wollen nun das Verhältnifs der Wärmemengen, welche zwei Flächen durch Strahlung mit einander austauschen, in solcher Weise zu bestimmen suchen, dafs das Resultat, unabhängig davon, ob eine Concentration von Strahlen stattfindet, oder nicht, in allen Fällen gültig seyn mufs.

Der gröfseren Allgemeinheit wegen seyen statt der bisher betrachteten Ebenen a und c , zwei beliebige Flächen gegeben, welche s_a und s_c heifsen mögen. Zwischen ihnen nehmen wir irgend eine dritte Fläche s_z an, welche nur die Bedingung zu erfüllen braucht, dafs die Strahlen, welche von s_a nach s_c oder umgekehrt gehen, in s_z keine Concentration erleiden. Nun sey in s_a irgend ein Element ds_a gewählt, und in s_c ein Element ds_c , welches so liegt, dafs die von ds_a durch ds_c gehenden Strahlen auf ihrer Fortsetzung die Fläche s_z treffen. Dann wollen wir zunächst bestimmen: *wie viel Wärme das Element ds_a durch das Element ds_c hindurch der Fläche s_z zusendet, und wie viel Wärme es durch eben jenes Element der Zwischenfläche hindurch von der Fläche s_z zurück erhält.*

Um die zuerst genannte Wärmemenge zu erhalten, brauchen wir nur zu bestimmen, wieviel Wärme das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet, denn nach der gemachten Annahme über die Lage des Elementes ds_c mufs alle diese Wärme, nachdem sie das Element ds_c passirt hat, die Fläche s_z treffen. Diese Wärmemenge läfst sich mit Hülfe der früher entwickelten Formeln sofort ausdrücken. Wir denken uns in einem Punkte des Elementes ds_c eine Tangen-

tialebene an die Fläche s_2 gelegt, und ebenso in einem Punkte des Elementes ds_2 eine Tangentialebene an s_2 , und betrachten die gegebenen Flächenelemente als Elemente dieser Ebenen. Wenn wir dann in diesen Tangentialebenen die Coordinatensysteme x_2, y_2 und x_1, y_1 einführen, und die in der dritten der Gleichungen (I) bestimmte GröÙe C bilden, so wird die gesuchte Wärmemenge, welche das Element ds_2 nach dem Elemente ds_1 , und durch dieses hindurch nach s_1 sendet, dargestellt durch den Ausdruck:

$$e_2 v_2^2 \frac{C}{\pi} ds_2 ds_1.$$

Was nun die Wärmemenge betrifft, welche das Element ds_2 durch ds_1 hindurch von der Fläche s_1 erhält, so findet in Bezug auf die Punkte der Fläche s_1 , von welchen diese Strahlen ausgehen, im Allgemeinen nicht jenes einfache Verhalten statt, wie in jenem speciellen Falle, wo das Element ds_2 ein in die Fläche s_1 fallendes optisches Bild ds_1 hat, und daher selbst ebenfalls das optische Bild des Elementes ds_1 ist. Wählen wir in dem Zwischenelemente ds_2 einen bestimmten Punkt p_2 , und denken uns von allen Punkten des Elementes ds_2 Strahlen durch diesen Punkt gehend, so erhalten wir ein unendlich schmales Strahlenbüschel, welches die Fläche s_1 in einem gewissen Flächenelemente schneidet. Dieses Flächenelement ist es, welches dem Elemente ds_2 durch den gewählten Punkt p_2 hindurch Strahlen zuendet. Wählen wir nun aber in dem Zwischenelemente ds_2 einen anderen Punkt als Kreuzungspunkt des Strahlenbüschels, so erhalten wir in der Fläche s_1 ein etwas anders liegendes Element. Die Strahlen, welche das Element ds_2 von der Fläche s_1 durch verschiedene Punkte des Zwischenelementes erhält, stammen also nicht alle von einem und demselben Elemente der Fläche s_1 her.

Da nun aber die GröÙe des Zwischenelementes ds_2 willkürlich ist, so hindert uns nichts, dieses Element so klein zu nehmen, daß es ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, als das gegebene Element ds_1 . Wenn in diesem Falle der Kreuzungspunkt des Strahlenbüschels inner-

halb des Elementes ds_b seine Lage ändert, so kann dadurch das Element der Fläche s_b , welches dem Elemente ds_a entspricht, seine Lage nur so wenig ändern, daß die Unterschiede im Vergleiche mit den Dimensionen des Elementes unendlich klein sind, und daher vernachlässigt werden dürfen. Man kann somit in diesem Falle das Element ds_b , welches man erhält, wenn man einen beliebigen Punkt p_b des Elementes ds_b auswählt, und zum Kreuzungspunkte des von ds_a ausgehenden Strahlenbüschels macht, als denjenigen Theil der Fläche s_b betrachten, welcher durch ds_b hindurch mit dem Elemente ds_a Strahlen austauscht.

Die GröÙe dieses Elementes ds_b können wir dem Früheren nach leicht ausdrücken. Wir denken uns, wie vorher, in dem Punkte p_b eine Tangentialebene an die Fläche s_b , und ebenso in einem Punkte des Elementes ds_a und in einem Punkte des Elementes ds_b Tangentialebenen an die Flächen s_a und s_b gelegt, und betrachten die beiden letzteren Flächenelemente als Elemente der Tangentialebenen. Führen wir dann in den drei Tangentialebenen Coordinatensysteme ein, und bilden die in der ersten und dritten der Gleichungen (I) bestimmten GröÙen A und C , so können wir nach (II) schreiben:

$$ds_b = \frac{C}{A} ds_a.$$

Die Wärmemenge, welche dieses Element ds_b dem Elemente ds_a zusendet, und welche wir, wie gesagt, als diejenige ansehen können, die das Element ds_a durch ds_b hindurch von der Fläche s_b erhält, wird dargestellt durch:

$$e_c v_c^2 \frac{A}{\pi} ds_a ds_b,$$

und wenn wir hierin für ds_b den in der vorigen Gleichung gegebenen Werth setzen, so kommt:

$$e_c v_c^2 \frac{C}{\pi} ds_a ds_a.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem oben gefundenen, welcher die Wärmemenge darstellt, die das Element ds_a durch ds_b hindurch der Fläche s_b zusendet, so

sieht man, daß sich beide unter einander verhalten wie $e.v_1^2 : e.v_2^2$. Nimmt man nun an, daß s_1 und s_2 die Oberflächen zweier vollkommen schwarzer Körper von gleicher Temperatur seyen, und macht für solche Flächen, wie es sich schon bei der ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung als nothwendig herausstellte, die Annahme, daß die beiden Producte $e.v_1^2$ und $e.v_2^2$ gleich sind, so sind auch die durch die beiden Ausdrücke dargestellten Wärmemengen gleich.

§. 16. Wählt man in der Zwischenfläche s_1 statt des vorher betrachteten Elementes ein anderes, auch als unendlich klein von höherer Ordnung vorausgesetztes Element, so hat dasjenige Element der Fläche s_1 , welches durch dieses Element der Zwischenfläche hindurch mit dem Elemente ds_2 Strahlen austauscht, eine andere Lage, als im vorigen Falle, aber wiederum sind die beiden ausgetauschten Wärmemengen unter einander gleich; und ebenso verhält es sich mit allen anderen Elementen der Zwischenfläche.

Um die Wärmemenge zu erhalten, welche das Element ds_1 der Fläche s_1 nicht nur durch ein einzelnes Element der Zwischenfläche, sondern im Ganzen zusendet, und ebenso die Wärmemenge, welche es im Ganzen von s_2 zurückerhält, muß man die beiden gefundenen Ausdrücke in Bezug auf die Fläche s_1 integriren, und das Integral auf den Theil dieser Fläche ausdehnen, welcher von den Strahlen, die von dem Elemente ds_2 nach der Fläche s_1 und umgekehrt gehen, getroffen wird. Dabei versteht es sich von selbst, daß, wenn für jedes Flächenelement ds_2 die beiden Differentialausdrücke gleich sind, dann auch die Integrale gleich seyn müssen.

Will man endlich die Wärmemengen haben, welche die ganze Fläche s_1 mit der Fläche s_2 austauscht, so muß man die beiden Ausdrücke auch in Bezug auf die Fläche s_1 integriren, wodurch wiederum die Gleichheit, welche für die einzelnen Elemente ds_2 besteht, nicht gestört werden kann.

Der weiter oben für speciellere Fälle gefundene Satz, daß zwei vollkommen schwarze Körper von gleicher Tem-

peratur, sofern die Gleichung $e_s v_s^2 = e_c v_c^2$ für sie gilt, gleich viel Wärme mit einander austauschen, ergibt sich somit auch als Resultat einer Betrachtung, welche ganz davon unabhängig ist, ob die von s_c ausgehenden Strahlen in s_c , und umgekehrt die von s_s ausgehenden Strahlen in s_s eine Concentration erleiden, indem nur die Bedingung gestellt wurde, daß die von s_s und s_c ausgehenden Strahlen in der Zwischenfläche s_s keine Concentration erleiden, eine Bedingung, welche sich immer erfüllen läßt, da man die Zwischenfläche beliebig wählen kann.

Aus diesem Resultate folgt natürlich auch weiter, daß, wenn ein gegebener schwarzer Körper nicht bloß mit Einem, sondern mit beliebig vielen anderen schwarzen Körpern von gleicher Temperatur in Wechselwirkung steht, er von allen zusammen gerade so viel Wärme erhält, als er ihnen zusendet.

§. 17. Alle vorstehenden Entwicklungen wurden unter der Voraussetzung gemacht, daß die vorkommenden Brechungen und Reflexionen ohne Verlust geschehen, und keine Absorption stattfinde. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß das gewonnene Resultat sich nicht ändert, wenn man diese Bedingung fallen läßt. Betrachtet man nämlich die verschiedenen Vorgänge, durch welche ein Strahl auf dem Wege von einem Körper zu einem anderen geschwächt werden kann, sey es dadurch, daß an einer Stelle, wo der Strahl die Gränzfläche zweier Mittel trifft, ein Theil unter Brechung in das angränzende Mittel eindringt und der andere reflectirt wird, so daß man es, mag man den einen oder den anderen Theil als die Fortsetzung des ursprünglichen Strahles betrachten, in beiden Fällen mit einem geschwächten Strahle zu thun hat, sey es dadurch, daß der Strahl beim Durchdringen eines Mittels theilweise absorbirt wird, so gilt in jedem dieser Fälle das Gesetz, daß bei zwei Strahlen, welche sich auf demselben Wege hinwärts und rückwärts fortpflanzen, die Schwächung in gleichem Verhältnisse stattfindet. Die Wärmemengen, welche zwei Körper sich gegenseitig zusenden, werden da-

her durch solche Vorgänge stets beide in gleicher Weise geschwächt, so daß, wenn sie ohne die Schwächung gleich gewesen wären, sie auch nach der Schwächung gleich sind.

Mit den vorher erwähnten Vorgängen hängt auch ein anderer Umstand zusammen, nämlich der, daß ein Körper aus einer und derselben Richtung Strahlen erhalten kann, welche von verschiedenen Körpern herkommen. Unser Körper, welcher *A* heiße, kann z. B. aus einem Punkte, welcher an der Gränzfläche zweier Mittel liegt, zwei der Richtung nach zusammenfallende, aber doch von zwei verschiedenen Körpern, *B* und *C*, herkommende Strahlen erhalten, von welchen der eine aus dem angränzenden Mittel kommt, und in jenem Punkte gebrochen ist, und der andere schon vorher in demselben Mittel war, und in jenem Punkte reflectirt ist. In diesem Falle sind aber beide Strahlen durch die Brechung und die Reflexion in der Weise geschwächt, daß, wenn sie vorher beide gleich stark waren, nachher ihre Summe ebenso stark ist, wie vorher jeder einzelne. Denkt man sich dann von unserem Körper *A* in umgekehrter Richtung einen ebenso starken Strahl ausgehend, so wird dieser in demselben Punkte in zwei Theile getheilt, von denen der eine in das angränzende Mittel eindringt, und dann weiter nach dem Körper *B* geht, und der andere reflectirt wird, und nach dem Körper *C* geht. Die beiden Theile, welche in dieser Weise von *A* nach *B* und *C* gelangen, sind ebenso groß, wie die Strahlentheile, welche *A* von *B* und *C* erhält. Der Körper *A* steht also mit jedem der beiden Körper *B* und *C* in jener Wechselbeziehung, daß er, unter Voraussetzung gleicher Temperaturen, gleich viel Wärme mit ihm austauscht. Dasselbe muß wegen der Gleichheit der Wirkungen, welche zwei auf irgend einem Wege hin- und zurückgehende Strahlen erleiden, in allen anderen noch so complicirten Fällen stattfinden.

Wenn man ferner statt der vollkommen schwarzen Körper auch solche betrachtet, welche die auf sie fallenden Strahlen nur theilweise absorbiren, oder wenn man statt

der homogenen Wärme solche Wärme betrachtet, welche Wellensysteme von verschiedenen Wellenlängen gemischt enthält, oder endlich, wenn man, anstatt alle Strahlen als unpolarisirte anzusehen, auch die Polarisationserscheinungen berücksichtigt, so kommen in allen diesen Fällen immer nur solche Umstände zur Sprache, welche in gleicher Weise für die vom Körper ausgesandte Wärme gelten, wie für die, welche er von anderen Körpern empfängt.

Es ist nicht nöthig, auf alle diese Umstände hier näher einzugehen, denn diese Umstände finden auch bei der gewöhnlichen, ohne Concentration vor sich gehenden Strahlung statt, und der Zweck der vorliegenden Abhandlung bestand nur darin, die Wirkungen zu betrachten, welche durch die Concentration der Strahlen möglicher Weise entstehen können.

§. 18. Die Hauptresultate der angestellten Betrachtungen können kurz folgendermaßen ausgesprochen werden.

1) Um die Wirkungen der gewöhnlichen, ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung mit dem Grundsatz, daß die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergeben kann, in Einklang zu bringen, ist es nothwendig anzunehmen, daß die Stärke der Emission eines Körpers nicht nur von seiner eigenen Beschaffenheit und seiner Temperatur, sondern auch von der Natur des umgebenden Mittels abhängt, und zwar in der Weise, daß die Emissionsstärken in verschiedenen Mitteln im umgekehrten Verhältnisse stehen mit den Quadraten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen in den Mitteln, oder im directen Verhältnisse mit den Quadraten der Brechungscoefficienten der Mittel.

2) Wenn diese Annahme über den Einfluß des umgebenden Mittels auf die Emission richtig ist, so ist jener Grundsatz nicht nur bei der ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung erfüllt, sondern er muß auch gültig bleiben, wenn die Strahlen durch Brechungen oder Reflexionen in beliebiger Weise concentrirt werden, denn

die Concentration kann zwar die absolute Gröfse der Wärmemengen, welche zwei Körper einander durch Strahlung mittheilen, nicht aber das Verhältniß dieser Wärmemengen ändern.

II. *Ueber die Abhängigkeit des Capillaritäts-Coëfficienten der Flüssigkeiten von ihrer Zusammensetzung; von Ludwig Wilhelmy.*

(Vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft vom
13. November 1863.)

I.

Bevor ich mich zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Untersuchung wende, will ich noch die Resultate einiger Beobachtungen mittheilen, welche ich zur Vervollständigung meiner früheren Arbeit über den Capillaritäts-Coëfficienten des Alkohols (Pogg. Ann. Bd. 119, S. 117) angestellt habe. — Um die Veränderungen, welche dieser Coëfficient bei Anwendung von festen Wänden verschiedener Substanz erfährt, in weiterer Ausdehnung zu ermitteln, liefs ich mir noch 2 Platten aus galvanisch niedergeschlagenem Kupfer und aus Platin anfertigen und in der früher beschriebenen Weise mit Theilungen versehen. Ich wählte dabei die Plattendicke bedeutend geringer — eben nur grofs genug, um ein Verbiegen der Platten bei den Beobachtungen zu verhüten — weil dadurch, wie man leicht übersieht, der Einstellungsfehler entsprechend vermindert, die Genauigkeit der Beobachtungen also erheblich gesteigert wird.

Die Dimensionen der Platten waren, wenn dieselbe Bezeichnung wie in meinem früheren Aufsatz angewendet wird, folgende:

ist Bepfunde im Alter von 400