VIII. Ueber strahlende Energie; von B. Galitzine.

§ 1. Einleitung.

Auf Grund der tiefgreifenden Ideen Faraday's hat Maxwell seine Theorie der Dielectrica entwickelt¹⁾, womit er durch Identificiren von electricischen und Lichtschwingungen zu dem Schluss gekommen ist²⁾, dass ein Lichtstrahl in der Richtung seiner Fortpflanzung einen gewissen Druck ausüben muss, welcher numerisch der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie gleich ist. Eine Hälfte dieser Energie ist in electricischer, die andere in electromagnetischer Form vorhanden.

Durch eine ganz andere Betrachtungsweise, nämlich sich auf den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik stützend, ist Bartoli³⁾ zu demselben Schlusse gelangt. Seine Abhandlung ist höchst interessant und die Art, deren er zum Beweise der *Existenz* eines solchen Lichtdruckes sich bedient, insbesondere wie sie in der späteren Abhandlung Boltzmann's⁴⁾ wiedergegeben ist, jedenfalls einwurfsfrei. Doch ist sein Vorgehen bei der numerischen Berechnung dieses Druckes P meiner Ansicht nach nicht mehr zulässig. Bartoli denkt sich nämlich eine absolut reflectirende und leere Kugel, deren Radius gleich R sei. In der Mitte derselben befinde sich eine absolut schwarze Kugel von sehr kleinem Radius r . Sei Q die Menge Energie, welche auf die Flächeneinheit der äusseren Hülle in der Zeiteinheit fällt. Dann soll bei Verkleinerung des Radius R um δR , nach Bartoli die innere Kugel die Wärmemenge $q = 2 Q / V \cdot 4 \pi R^2 \cdot \delta R$ bekommen, wo V die Fortpflanzungs-

1) Maxwell, Traite d'électricité et de magnétisme. (5) 1. p. 163. Paris 1885—1889.

2) Maxwell, l. c. 2. 495.

3) Bartoli; Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore e sopra il radiometro di Crookes. Firenze. Le Monnier. 1876. Auch N. Cim. (3) 15. p. 193—202. 1884; Exn. Rep. 21. p. 198—207. 1885.

4) Boltzmann, Wied. Ann. 22. p. 33. 1884.

geschwindigkeit des Lichtes bedeutet. $2Q/V$ stellt dabei die in der Volumeneinheit enthaltene Energie dar. Ob dieselbe sich so einfach berechnen lässt, ist ohne weiteres nicht einleuchtend. Für den Fall eines Cylinders stellt jedenfalls das Product aus der jeden normalen Cylinderschnitt treffenden Energiemenge mit $2/V$ nicht die in der Volumeneinheit enthaltene Energie dar, wie wir später in der That sehen werden. Schon Boltzmann¹⁾ bemerkte, dass Bartoli den Einfluss der Seitenstrahlen nicht mit berücksichtigt zu haben scheint.

Nun sagt Bartoli weiter: da die innere Kugel ihre Energie um q vermehrt hat, so muss dabei eine dieser Energie gleiche Arbeit $P \cdot 4\pi \cdot R^2 \delta R$ geleistet werden. Es folgt daraus

$$P = \frac{2Q}{V}.$$

Dieser Schluss scheint mir nicht richtig zu sein, obgleich das Endresultat, welches man, wenn man die Sache anders behandelt, erhält, sich von der Bartoli'schen Formel nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Unser System besteht nämlich jetzt aus der innern schwarzen Kugel und dem zwischen den beiden Kugeln vorhandenen Raum, welcher ebenfalls einen Vorrath von Energie besitzt.²⁾ Es soll bei Verkleinerung der äusseren Hülle Arbeit geleistet werden, nicht etwa weil die Energie des absolut schwarzen Körpers sich dabei vermehrt hat, — denn alles was die innere Kugel an Energie gewinnt, ist dem zwischen den beiden Kugeln liegenden Raume entzogen, — sondern weil die in dem ganzen System vorhandene Energie dabei von einer niedrigen zu einer höheren Temperatur übergeht.

Boltzmann³⁾ hat sich ebenfalls mit dieser Frage beschäftigt. Bedeute E die in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit ausgestrahlte Wärme (Boltzmann bezeichnet sie mit $\varphi(t)$), so findet er für den Lichtdruck P auf eine absolut reflectirende Wand den folgenden Ausdruck

1) Boltzmann, Wied. Ann. **22**. p. 35. 1884.

2) Vgl. Thomson, Compt. rend. **39**. p. 529. 1854; Phil. Mag. (4) **9**. p. 36. 1855.

3) Boltzmann, l. c.

$$P = \frac{\pi}{V} \left[T \int \frac{dE}{dT} dT - E \right]$$

oder

$$P = \frac{\pi}{V} \left[T \int \frac{dE}{T^2} dT \right],$$

wo T die absolute Temperatur bedeutet. Die Integrationsconstante setzt er $= 0$. Diese Formel gestattet, wenn man irgend ein Strahlungsgesetz annimmt, den Druck P numerisch zu berechnen. Die Herleitung der Boltzmann'schen Formel ist eine ganz strenge, obgleich ich mit dem Werth des numerischen Factors nicht einverstanden bin. Die Sache lässt sich in einfacherer Weise behandeln, wie ich in der Folge zeigen werde.

Zum Schlusse möchte ich noch auf eine Abhandlung Lebedew's¹⁾ aufmerksam machen, der eine sehr interessante Anwendung des Maxwell-Bartoli'schen Satzes gemacht hat, indem er die Abstossungskraft infolge der Strahlung mit der allgemeinen Gravitation verglichen hat.²⁾

§ 2. Herleitung der Formel für den Lichtdruck P .

Denken wir uns einen leeren Cylinder AB , von der Länge h , dessen Wände und Grundfläche B absolut reflectirend sind, und in dem B nach Art eines Stempels verschiebbar ist. A ist ein absolut schwarzer Körper, der nach Bedarf durch eine absolut reflectirende Wand ersetzt werden kann.

Die Grösse der Grundflächen des Cylinders sei der Einfachheit wegen $= 1$.

Bezeichnen wir durch ε das Emissionsvermögen unseres schwarzen Körpers, d. h. diejenige Wärmemenge, welche die Flächeneinheit in einer Secunde in normaler Richtung aussendet. In einer Richtung, die den Winkel φ mit der Normale zu der Fläche bildet, wird das Emissionsvermögen kleiner und zwar $= \varepsilon \cos \varphi$. Um die ganze von der Flächeneinheit in

1) Lebedew, Wied. Ann. 45. p. 292. 1892.

2) Vgl. auch Koláček, Wied. Ann. 39. p. 254. 1890.

der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge E zu bekommen, brauchen wir nur folgendes Integral zu bilden ¹⁾:

$$(1) \quad E = 2 \pi \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d \varphi = \pi \varepsilon,$$

ε , ebenso wie E , sind dabei nur Functionen der absoluten Temperatur T . ²⁾

Berechnen wir jetzt die Energiemenge „ e “ in der Volumeneinheit unseres Cylinders, wenn die schwarze Fläche A die Temperatur T hat. Denken wir uns zuerst den Cylinder als unbegrenzt nach rechts, und bedeute e' die in diesem Falle in der Volumeneinheit enthaltene Energiemenge.

Es ist offenbar

$$(2) \quad e = 2 e'.$$

Würde unsere Fläche die ganze Energiemenge E in normaler Richtung aussenden, so hätte man

$$e' = \frac{E}{V}$$

oder

$$e = \frac{2 E}{V}.$$

In der That aber wird die Wärmemenge $2 \pi \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi d \varphi$ unter einem Winkel, der zwischen φ und $\varphi + d \varphi$ liegt, ausgestrahlt. Die Geschwindigkeit V_φ , mit welcher diese Energie sich parallel der Cylinderaxe fortpflanzt, ist den Reflexionsgesetzen zufolge, gleich $V \cos \varphi$. Die Energiemenge in der Volumeneinheit wird also grösser sein, und zwar ist beim Eintreten des Beharrungszustandes

$$e' = 2 \pi \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{V_\varphi} d \varphi = 2 \pi \varepsilon \frac{1}{V} = \frac{2 E}{V}$$

oder wegen (2)

$$(3) \quad e = \frac{4 E}{V},$$

e ist ebenfalls nur eine Function von T (Kirchhoff). E be-

1) Vgl. z. B. Wüllner, Lehrb. der Exp.-Phys. 3. p. 238. 4. Aufl. 1885.

2) Vgl. Kirchhoff, Pogg. Ann. 109. p. 275. 1860.

deutet die Energiemenge, die durch jeden Cylinderschnitt in der Zeiteinheit in einer Richtung hindurchgeht. Um nun die in der Volumeneinheit enthaltene Energie zu bekommen, muss man, wie man sieht, dieselbe nicht etwa mit $2/V$, sondern mit $4/V$ multipliciren. (Vgl. Einleitung.)

Sei P der auf die Grundfläche B ausgeübte Druck, so ist

$$P = T \int_0^T \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT - e.$$

Erster Beweis.

Liege der Stempel B unmittelbar bei A an, und behalte A zunächst die constante Temperatur T . Man bewege dann den Stempel B äusserst langsam um die Strecke h . Die dem System zugeführte Wärme, wenn A etc. eine verschwindende Masse besitzt, sei Q .

$$Q = eh + Ph.$$

Alle auf Wärme sich beziehenden Grössen sind in mechanischen Einheiten ausgedrückt.

Bringe man jetzt A allmählich auf die Temperatur 0, so wird alle Energie aus dem Cylinder auf andere Körper übergehen. Ist das geschehen, so schiebe man B ohne Arbeitsleistung zu A wieder zurück. Der Vorgang ist umkehrbar, und da A eine verschwindende Masse besitzt, so liefert uns der zweite Hauptsatz die folgende Gleichung:

$$(4) \quad \frac{Q}{T} = \int_0^T \frac{dQ}{T}$$

$$\frac{e + P}{T} \cdot h = \int_0^T h \frac{de}{dT} dT$$

oder

$$(5) \quad P = T \int_0^T \frac{de}{dT} dT - e,$$

was zu beweisen war.

Diese Formel unterscheidet sich jedoch durch einen constanten Factor von der Boltzmann'schen. Es wäre nämlich, wenn man e durch seinen Werth aus (3) ersetzte,

$$(6) \quad P = \frac{4}{V} \left[T \int_0^T \frac{1}{T} \cdot \frac{dE}{dT} dT - E \right].$$

Nach Boltzmann dagegen

$$(6') \quad P = \frac{\pi}{V} \left[T \int_0^T \frac{1}{T} \frac{dE}{dT} dT - E \right]$$

Zweiter Beweis.

Sei B schon um die Strecke h verschoben, und befinde sich A bei der Temperatur T . Nehmen wir als unabhängige Variablen T und h .

Es fragt sich nun, wie viel Wärme dQ man dem System zuführen muss, wenn T sich um dT und h um dh vermehrt. Die geleistete Arbeit ist dabei $P dh$. Es ist

$$dQ = d(h e) + P dh$$

oder

$$dQ = (e + P) dh + h \frac{de}{dT} dT.$$

Die Vermehrung der Entropie dS wird also

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{e + P}{T} dh + \frac{h}{T} \frac{de}{dT} dT.$$

Hieraus, aus dem zweiten Hauptsatze, nach dem dS ein vollständiges Differential sein soll, und da e nur eine Function von T ist, folgt

$$(7) \quad \frac{dP}{dT} - \frac{P}{T} = \frac{e}{T}.$$

Diese Gleichung ist eine unmittelbare Folge der Gleichung (4), aus welcher sie durch Differentiation entsteht. Integriert man Gleichung (7), so findet man

$$P = T \left[C + \int_0^T \frac{e}{T^2} dT \right]$$

oder

$$(8) \quad P = T \left[C_1 + \int_0^T \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT \right] - e.$$

Um diese Formel in Einklang mit Formel (5) zu bringen, braucht man nur die Constante $C_1 = 0$ zu setzen, was auch vollständig zulässig erscheint. Wir werden in der That später sehen, dass P proportional zu e ist. Ist dann e für ∞ kleine T proportional irgend einer Potenz von T ($e = AT^n$), so ist die Annahme $C_1 = 0$ offenbar gleichbedeutend mit der Bedingung $n > 1$.

Dritter Beweis. Dieser Beweis beruht auf der Betrachtung eines complicirteren Kreisprocesses, welcher sich von dem Boltzmann'schen principiell nicht unterscheidet. Ich habe nur eine kleine Aenderung angebracht und weitere Schlüsse aus der Gleichung, welche den ersten Hauptsatz der Thermodynamik darstellt, gezogen.

Sei der Stempel B bei A . Bewege sich jetzt B um die Strecke h_1 , während die Temperatur von A immer gleich T_1 gehalten wird. Die verbrauchte Wärme sei Q_1 . Dann ist, wie im ersten Falle

$$Q_1 = e_1 h_1 + P_1 h_1,$$

e_1 und P_1 bedeuten die in der Volumeneinheit enthaltene Energie und den Licht- resp. Wärmedruck bei der Temperatur T_1 .

Ersetze man jetzt A durch eine absolut reflectirende Wand, und bewege man den Stempel B noch weiter bis zur Entfernung h_2 . Es wird dabei immer eine gewisse Arbeit τ geleistet; da aber der Vorgang ein adiabatischer ist, so muss die Temperatur allmählich von T_1 auf T_2 sinken.

$$(9) \quad \tau = \int_{h_1}^{h_2} P dh.$$

Das Princip der Erhaltung der Energie gibt uns:

$$(10) \quad e_1 h_1 - e_2 h_2 = \int_{h_1}^{h_2} P dh,$$

oder für eine ∞ kleine Verschiebung

$$(10') \quad -d(eh) = Pdh.$$

Ist das geschehen, so kann man: 1. entweder die reflectirende Wand A durch einen absolut schwarzen Körper ersetzen, ihn auf die Temperatur 0 allmählich bringen und dann

den Stempel B ohne Arbeitsleistung zu A zurückschieben, oder 2. den schwarzen Körper bei der constanten Temperatur T_2 halten und dann den Stempel B unter dem constanten Druck P_2 zu A zurückbringen (Vorgang von Boltzmann). Der letzte Process besteht in der Erwärmung von A auf T_1 ; wir setzen aber seine Masse als verschwindend klein voraus. In beiden Fällen ist der Kreisprocess umkehrbar. Der zweite Hauptsatz liefert uns also, noch mit Rücksicht auf Formel (4), das folgende Gleichungssystem:

$$(11) \quad \frac{e_1 + P_1}{T_1} h_1 = h_1 \int_0^{T_1} \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT = \frac{e_2 + P_2}{T_2} h_2 = h_2 \int_0^{T_1} \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT.$$

Es folgt daraus

$$\frac{e_2 + P_2}{T_2} h_2 - \frac{e_1 + P_1}{T_1} h_1 = 0$$

oder

$$d\left(\frac{e + P}{T} \cdot h\right) = 0$$

$$d(eh) + Pdh + h dP - \frac{h}{T}(e + P) dT = 0,$$

oder wegen (10')

$$\frac{dP}{dT} - \frac{P}{T} = \frac{e}{T}.$$

Wie kehren auf diese Weise zur Gleichung (7) zurück.

Gleichung (10') setzt uns in den Stand, die Beziehung zwischen T und h für adiabatische Vorgänge aufzufinden.

Da e und folglich auch P nur Functionen von T sind, so folgt aus (10')

$$(12) \quad h \frac{dT}{dh} = - \frac{e + P}{\frac{de}{dT}}$$

oder wegen (7)

$$(13) \quad h \frac{dT}{dh} = - T \frac{\frac{dP}{dT}}{\frac{de}{dT}}.$$

Man erhält diese Formel auch durch Vergleichung der zwei Integrale in Gleichung (11).

Es ist nämlich

$$d \left\{ h \int_0^T \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT \right\} = 0$$

$$dh \int_0^T \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT + h \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT = 0$$

oder

$$h \frac{dT}{dh} = - \frac{e + P}{\frac{de}{dT}}.$$

Um die Ausdrücke (5) und (13) näher verwerthen zu können, müsste man die Abhängigkeit des Strahlungsvermögens von der absoluten Temperatur kennen. Könnte man aber auf irgend welche Weise eine directe Beziehung zwischen P und e auffinden, so könnte man durch Integration der Gleichung (7) das unbekannte Strahlungsgesetz unmittelbar ermitteln. Das Bartoli'sche Verfahren halte ich, wie früher gesagt, für unzulässig. Eine Beziehung zwischen P und e auf rein mechanischem Wege aufzufinden ist mir nicht gelungen. Freilich hat auch Maxwell nach seinem eigenen Zugeständniss¹⁾ es nicht so weit bringen können. Die gesuchte Beziehung lässt sich jedoch auf Grund der Principien der electromagnetischen Lichttheorie aufstellen, und zwar durch eine einfache Anwendung der Grundanschauungen Maxwell's auf unseren Fall, wie es zuerst Boltzmann gezeigt hat.²⁾ Ich möchte die Boltzmann'sche Beziehung nur ein wenig anders begründen.

Wir wissen, dass ein Lichtstrahl in der Richtung seiner Fortpflanzung einen gewissen Druck ausübt, der numerisch der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie gleich ist. Wird der Strahl vollständig reflectirt, so ist der Druck zweimal so gross. Sei allgemeiner s die Grösse der strahlenden Fläche A . Betrachten wir diejenigen Strahlen, welche unter dem Winkel φ

1) Maxwell, Traite d'électricité et de magnétisme 1. p. 174. 1885.

2) Boltzmann, Wied. Ann. 22. p. 291. 1884.

ausgesandt werden. Den Gesetzen der Reflexion zufolge werden sie unter demselben Winkel die andere Grundfläche B unseres geraden Cylinders treffen, was auf der Figur schematisch dargestellt ist. Die Menge der unter dem Winkel φ ausgestrahlten Energie ist gleich

$$dE = 2\pi\epsilon \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \cdot s.$$

Wir können uns denken, das alle diese Strahlen dieselbe Richtung haben. Sie üben auf „ ab “ oder auf „ $a'b'$ “, welche senkrecht zu ihrer Fortpflanzungsrichtung stehen, einen gewissen Druck dp' aus, welcher gleich $dE/ab \cdot V$ sein soll.

Da $ab = s \cos\varphi$ ist, so folgt

$$dp' = \frac{2\pi\epsilon}{V} \sin\varphi d\varphi.$$

Jedem Flächenelement von $a'b'$ entspricht ein Flächenelement von B , welches um $1/\cos\varphi$ grösser ist. Deshalb ist die Kraft, welche auf die Flächeneinheit von B wirkt, um $\cos\varphi$ mal kleiner als dp' . Ausserdem bildet diese Kraft den Winkel φ mit der Normale zu B . Es folgt daraus, dass der auf B ausgeübte Druck

$$dp = dp' \cos^2\varphi$$

ist. Ist B eine absolut reflectirende Wand, so muss man, um den ganzen Druck zu erhalten, den vorigen Ausdruck mit 2 multipliciren und über alle Werthe von φ , von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$, integriren.

$$P = 2 \frac{2\pi\epsilon}{V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi,$$

oder wegen (3)

$$(14) \quad P = \frac{1}{3} e.$$

Formel (14) stellt die gesuchte Beziehung dar.

Wir sehen in der That, dass P zu e proportional ist. Ersetzen wir mittels (14) P durch e in Formel (7), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) und (3)

$$\frac{d\epsilon}{dT} = \frac{4\epsilon}{T}$$

oder

$$(15) \quad \epsilon = AT^4.$$

Das ist nichts anderes als das Stefan'sche Strahlungsgesetz¹⁾, welches sich also aus den Principien der Thermodynamik und aus der electromagnetischen Lichttheorie unmittelbar ableiten lässt, wie es Boltzmann zuerst gezeigt hat.

Wir haben ebenfalls

$$(16) \quad P = C T^4.$$

Von dieser Gleichung werden wir später Gebrauch machen.

Die Formel (14) gibt uns jetzt die Möglichkeit, die Beziehung zwischen h und T näher festzustellen. Es folgt aus (13)

$$h \frac{dT}{dh} = -\frac{T}{3}$$

oder

$$(17) \quad T = C_1 \frac{1}{\sqrt[3]{h}}.$$

C_1 bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen der Aufgabe.

Wir sehen also, dass bei adiabatischen und umkehrbaren Vorgängen, wie die früher betrachteten, die Temperatur sich in umgekehrtem Verhältniss zur cubischen Wurzel aus dem Volumen ändert.

§ 3. Die Bedeutung der absoluten Temperatur.

Die in der Volumeneinheit unseres bestrahlten Cylinders enthaltene Energie hängt unmittelbar von der Gesammtheit aller von der absolut schwarzen Fläche bei der Temperatur T ausgesandten electrischen Schwingungen ab, die man jedoch nicht durch ihre Wellenlänge, welche, je nach der Natur des äusseren Mediums, eine veränderliche Grösse ist, sondern durch ihre Periode oder Anzahl in einer Secunde n characterisiren muss. Ist $T=0$, so ist $n=0$ anzunehmen. Fängt aber T an zu wachsen, so kommen immer neue Schwingungen hinzu. Jeder Temperatur entspricht dabei eine maximale Schwingung $n_{\max}$, welche der absolut schwarze Körper bei der gegebenen Temperatur auszusenden noch im Stande ist. $n_{\max}$ ist offenbar eine Function von T .

$$(18) \quad n_m = \omega(T).$$

Denken wir uns nur einen Strahl vorhanden. (Die gesammte in der Volumeneinheit enthaltene Energie ergibt sich

1) Stefan, Wien. Ber. 79. p. 423. 1879.

leicht durch Integration nach φ). Gehe man von der Betrachtung der allgemeinen Gleichungen für das electromagnetische Feld aus, so muss die in einem Punkte wirkende electricische Kraft F_n , welche einer bestimmten Schwingungszahl entspricht, eine periodische Function der Zeit sein. Sei die entsprechende Amplitude a_n . Hätte man eine constante Kraft, so wäre die in der Volumeneinheit enthaltene Energie

$$(19) \quad w = \frac{1}{8\pi} k F^2,$$

wo k die Dielectricitätsconstante des äusseren Mediums bedeutet.

In unserem Falle ist aber F variabel. Jedem F_n entspricht dabei eine besondere Dielectricitätsconstante k_n , doch ist die in der Volumeneinheit enthaltene Energie für diese besonderen Schwingungen offenbar proportional zu a_n^2 . Da k für alle Schwingungen im Vacuum gleich 1 zu setzen ist, so ergibt sich die ganze in der Volumeneinheit enthaltene Energie e , als eine Summe von der folgenden Form:

$$e = \text{const.} \sum a_n^2,$$

wo n auf alle diejenigen Schwingungen, welche unser Körper bei der Temperatur T auszusenden vermag, auszudehnen ist.

a_n^2 ist eine Function von T und n .

$$(20) \quad a_n^2 = f(T, n).$$

Die Function f hängt unmittelbar von der Vertheilung der Energie im normalen Spectrum ab, wo ich unter Spectrum die Gesammtheit aller Schwingungen verstehe.

Ist die Energie in continuirlicher Weise im Spectrum vertheilt, so verwandelt sich das vorige Summationszeichen in ein Integralzeichen.

Bedeutet $\varphi(n)dn$ die Wahrscheinlichkeit, solche Strahlen zu treffen, deren Schwingungszahl zwischen n und $n + dn$ liegt, so folgt:

$$(21) \quad e = \text{const.} \int_0^{n_m} f(n, T) \cdot \varphi(n) dn.$$

Für einen absolut schwarzen Körper, der also keine selective Absorption besitzt, ist $\varphi(n)$ wohl constant zu

setzen. Lassen wir jedoch Gleichung (21) in ihrer allgemeineren Form.

Es folgt hieraus wegen (15), (1) und (3)

$$(22) \quad T^4 = \text{const.} \int_0^{\omega(T)} f(n, T) \varphi(n) dn.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist eine Grösse, welche dem Quadrate der entsprechenden electrischen Verschiebung (electrical displacement) proportional ist.

Wir erhalten also das folgende Resultat. Die absolute Temperatur hängt unmittelbar von der Gesamtheit aller electrischen Verschiebungen ab, und zwar ist die vierte Potenz der absoluten Temperatur der Summe der Quadrate aller electrischen Verschiebungen¹⁾ direct proportional.

Gleichung (22) gestattet noch eine andere Aufgabe zu formuliren. Differentirt man sie nach T , so folgt

$$T^3 = \text{const.} \left[\int_0^{n_m = \omega(T)} \frac{\partial f(n, T)}{\partial T} \varphi(n) dn + f(n_m, T) \varphi(n_m) \frac{d\omega}{dT} \right].$$

Ist die Function f bekannt, d. h. kennt man vollständig die Vertheilung der Energie im Spectrum, so wird man auf eine Gleichung von der Form

$$\frac{d\omega}{dT} = F(\omega, T)$$

geführt, woraus man die unbekannte Function ω ermitteln kann.

Die umgekehrte Aufgabe lässt sich leider nicht lösen, d. h. die Kenntniss der Function ω belehrt uns nicht über die Vertheilung der Energie im Spectrum, da $\partial f(n, T) / \partial T$ nicht gleich Null gesetzt werden darf.²⁾

1) Für Vacuum gerechnet.

2) Vgl. über diesen Gegenstand die folgende Literatur. Draper, Phil. Mag. (3) 30. p. 345. 1847; Knoblauch, Pogg. Ann. 70. p. 205 u. 337. 1847; Jaques, Inaug.-Diss. John's Hopkins Univ. Baltimore, Press. J. Wilson and Son. 1879; Beibl. 3. p. 865. 1879; Stefan, Wien-Ber. 79. p. 423. 1879; Crova, Ann. de chim. et de phys. (5) 19 p. 472—550. 1880; Langley, Compt. rend. 92. p. 701. 1881; 93. p. 140. 1881, und spätere Abhandlungen: Desains, Compt. rend. 94. p. 1144.

§ 4. Abhängigkeit des Strahlungsvermögens von dem umgebenden Medium.

Setzen wir jetzt voraus, dass unser bestrahlter Cylinder irgend einen diathermanen Körper enthält, dessen Dielectricitäts-constante für die betreffenden Schwingungen gleich k_n sei. Da die Temperatur dieselbe ist, so haben wir auch jetzt dieselben Schwingungen wie im vorigen Falle, nämlich von $n = 0$ bis $n_m = \omega(T)$.

Gleichung (19) lehrt uns, dass die durch jeden Querschnitt des Cylinders hindurchgehende Energie für jede besondere Strahlenart um k_n mal grösser wird, indem das äussere Medium ebenfalls an dem Schwingungszustande theilnimmt. Da ausserdem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_n jeder Gattung von Strahlen kleiner ist als im Vacuum, so wird für jede Strahlenart die in der Volumeneinheit vorhandene Energie um $k_n V/V_n$ mal grösser. Bedeutet e_k die totale in der Volumeneinheit enthaltene Energie, so folgt, wie im § 3, dass

$$(23) \quad e_k = \text{const.} \int_0^{n_m = \omega(T)} k_n \frac{V}{V_n} f(n, T) \varphi(n) dn,$$

Die Constante behält dabei denselben Werth wie in der Gleichung (21), welche also nur als ein specieller Fall dieser allgemeinen Gleichung (23) zu betrachten ist.

1882; **95.** p. 433. 1882; **97.** p. 689 u. 732. 1883; Lecher, Wied. Ann. **17.** p. 477. 1882; Christiansen, Wied. Ann. **19.** p. 267. 1883; Schleiermacher, Wied. Ann. **26.** p. 287. 1885; Bottomley, Beibl. **10.** p. 569. 1886; H. Weber, Wied. Ann. **32.** p. 256. 1887; Mathem.-naturw. Mitth. aus den Sitzungsber. d. Berl. Akad. **39.** p. 933 u. 565. 1888; Beibl. **14.** p. 897. 1890; Kövesligethy, Wied. Ann. **32.** p. 699. 1887; Astr. Nachr. Nr. 2805. p. 329. 1887; Abh. der ungar. Akad. der Wiss. **12.** Nr. 11; Mathem. u. naturw. Berichte aus Ungarn. **4.** p. 9. 1887; **5.** p. 20. 1887; **7.** p. 24. 1889; Beibl. **12.** p. 346. 1888; **14.** p. 116. 1890; W. Michelson, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. (4) **19.** p. 79. 1887; (6) **21.** p. 87. 1889; Journ. de phys. (2) **6.** p. 467. 1887; Beibl. **14.** p. 277. 1890; Emden, Wied. Ann. **36.** p. 214. 1889; Graetz, Wied. Ann. **36.** p. 857. 1889; Lord Rayleigh, Phil. Mag. **27.** p. 460. 1889; Ferrel, Sill. Journ. (3) **39.** p. 137. 1890; Beib. **14.** p. 981. 1890; Edler, Wied. Ann. **40.** p. 531. 1890; Violle, Compt. rend. **114.** p. 734. 1892; Journ. de phys. (3) **1.** p. 298. 1892 u. a.

Sieht man von der Dispersion der verschiedenen Strahlen ab, so kann man statt k_n und V_n mittlere Werthe k und V_k einsetzen. Es folgt also

$$e_k = k \frac{V}{V_k} \cdot e,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) und (3)

$$\frac{4\pi \varepsilon_k}{V_k} = k \frac{V}{V_k} e = k \frac{4\pi \varepsilon}{V_k}.$$

Daraus

$$\varepsilon_k = k \varepsilon.$$

Das ist nichts anderes, als das Clausius'sche Emissionsgesetz¹⁾, da man nach der electromagnetischen Lichttheorie vollständig berechtigt ist, wenn man, wie hier, von der Dispersion absieht, die Dielectricitätsconstante mit dem Quadrate des mittleren Brechungsexponenten zu identificiren.

Das Clausius'sche Emissionsgesetz erscheint also als eine nothwendige Folge der Grundanschauungen Maxwell's.

§ 5. Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Die früher angestellten Betrachtungen über die Bestrahlung eines Cylinders gestatten die innere Bedeutung des zweiten Hauptsatzes näher zu erkennen. Wir sind bei der Anführung des dritten Beweises für die Lichtdruckformel auf die Gleichung (10') gekommen. Der Vorgang war dabei ein adiabatischer, und er bestand darin, dass ein neuer Raum, oder sagen wir ein neues Volumen Lichtäthers dh die Energiemenge

$$dq = e dh$$

erhalten hat.

Diese Uebertragung von Energie auf eine neue Aethermasse ist, wie wir sehen, von einer gewissen Arbeitsleistung Pdh begleitet. Es sind zwei correlative Phänomene, wobei für ∞ kleine Verschiebungen nur $\frac{1}{3}$ der übertragenen Energiemenge zur äusseren Arbeitsleistung verwendet werden kann.

Es ist in der That wegen (14)

$$\frac{d\tau}{dq} = \frac{1}{3}.$$

1) Vgl. Clausius, Die mechan. Theorie der Wärme. 1. p. 335. Braunschweig 1887; auch Bartoli, N. Cim. (3) 6. p. 265—276. 1880; Beibl. 4. p. 889. 1880.

Die früher aufgestellten Gleichungen gestatten dasselbe Verhältniss für endliche adiabatische Verschiebungen zu berechnen. Es stellt sich dabei heraus, dass dieses Verhältniss nur Function der Anfangs- und Endtemperatur ist.

Aus derselben Gleichung (10') geht hervor, dass, wenn wir eine gewisse Energiemenge auf eine kleinere Aethermasse concentriren wollen, dies nur unter Verwendung äusserer Arbeit geschehen kann, wobei der erste Hauptsatz fortwährend seine Gültigkeit behält. Hierin ist die Bedeutung des zweiten Hauptsatzes näher zu erkennen.

Aus den Gleichungen (10) und (9) finden wir für eine endliche Verschiebung

$$(24) \quad e_1 h_1 - e_2 h_2 = \tau = U_1 - U_2.$$

U_1 und U_2 bedeuten die Energiemenge im Cylinder am Anfang und Ende des Vorganges.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14), (16) und (17) folgt, dass

$$(25) \quad e h = 3 C C_1^3 T.$$

Setzen wir dies in (24) ein und bemerken dabei, dass $3 C C_1^3$ aus der Anfangsbedingung sich bestimmen lässt, so folgt

$$\tau = \frac{U_1}{T_1} (T_1 - T_2).$$

Die verwendbare Arbeit ist also dem Temperaturgefälle direct proportional (zweiter Hauptsatz). Nur für den Fall, dass $T_2 = 0$ ist, d. h. für den Fall, dass die gegebene Energiemenge U_1 sich auf eine ∞ grosse Aethermasse vertheilt (da wegen (17) nur für $h = \infty$, $T = 0$ ist), kann der ganze Vorrath von Energie in äussere Arbeit verwandelt werden.

Vergleichen wir noch zum Schlusse die vorhandenen Energiemengen am Anfang und Ende eines adiabatischen und *umkehrbaren* Vorganges miteinander. Es ist

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{e_1 h_1}{e_2 h_2},$$

oder wegen (25) und (17)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{h_1}}{1} \cdot \frac{\sqrt[3]{h_2}}{1}}.$$

Da h das Volumen v des Aethers, auf welche die gegebene Energiemenge vertheilt ist, darstellt, so lässt sich diese Gleichung in folgender Weise schreiben:

$$UV^{\frac{3}{2}}v = \text{const.}$$

Das ist ein Satz, der wahrscheinlich noch weitere Verallgemeinerungen gestattet. Er sagt aus, dass bei adiabatischen und umkehrbaren Vorgängen der Vorrath an disponibler Energie der kubischen Wurzel aus dem Volumen, über welchem diese Energie vertheilt ist, umgekehrt proportional ist.

Es ist hier von der absoluten Temperatur gar nicht mehr die Rede, doch spricht dieser Satz eigentlich dasselbe aus, wie der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

§ 6. Zusammenstellung der Resultate.

1. Das Bartoli'sche Verfahren ist nicht in allen seinen Einzelheiten zulässig.

2. Die Anwendung beider Hauptsätze der Thermodynamik gestatten den Lichtdruck, sowie auch die Temperaturänderungen bei adiabatischen und umkehrbaren Vorgängen zu berechnen. (Boltzmann.)

3. Die vierte Potenz der absoluten Temperatur ist der Summe der Quadrate aller electrischen Verschiebungen direct proportional.

4. Das Clausius'sche Emissionsgesetz ist eine unmittelbare Folge der Grundanschauungen Maxwell's.

5. Die Uebertragung von Energie auf neue Aethermassen ist bei umkehrbaren Vorgängen von Arbeitsleistung begleitet.

6. Bei umkehrbaren und adiabatischen Vorgängen ist der Vorrath an disponibler Energie der Kubikwurzel aus der Aethermasse, über welche diese Energie vertheilt ist, umgekehrt proportional.