**3. Ueber die Bestimmung
des metallischen Wärmeleitvermögens und über
sein Verhältniß zur elektrischen Leitfähigkeit¹⁾;
von E. Grüneisen.**

Die vorliegende Untersuchung wurde begonnen, um zur Beantwortung der dem augenblicklichen Interesse naheliegenden Frage nach der Beziehung zwischen Elektricitäts- und Wärmeleitvermögen von Metallen einen Beitrag zu liefern. Speciell sollte der Einfluss von Verunreinigungen der reinen Metalle auf das Verhältniß beider Leitvermögen studirt werden.

Es waren daher verschiedene Sorten desselben Metalles zu prüfen, die sich nur durch ihren verschiedenen Gehalt an fremden Beimengungen unterscheiden sollten. Die Bitte um geeignetes Material erfüllten in freundlichster Weise die Firmen: Fr. Krupp, Essen; Hedderheimer Kupferwerk, vormals J. A. Hesse Söhne; Basse & Selve, Altena. Es standen zur Verfügung: vier Eisenstäbe von bekannter Zusammensetzung²⁾, dreierlei Kupfer, von denen eins möglichst rein war, während die beiden anderen Zusätze von Arsen in sehr verschiedener Menge enthielten, und endlich eine Nickel-Kupfer-Legirung von 46 Proc. Ni und 54 Proc. Cu.

Die Bestimmung der Wärmeleitungsconstante sollte anfangs nach der von Hrn. F. A. Schulze³⁾ angegebenen Methode ausgeführt werden, die in der Versuchsanordnung mit der Kirchhoff-Hanseman'schen⁴⁾ ziemlich übereinstimmt, aber die sehr umständliche Berechnung der Versuche, wie sie Kirchhoff und Hanseman unter Berücksichtigung aller Correctionen ausführten, durch folgende Annahme vermindert:

Eine ebene Metallfläche, die von einem bestimmten Augenblick an durch einen Wasserstrahl von constanter Temperatur

1) Nach der Berliner Inaug.-Dissert. für die Annalen bearbeitet.

2) Vgl. Tab. V, p. 71.

3) F. A. Schulze, Dissert. Berlin 1897; Wied. Ann. **66**. p. 207. 1898.

4) G. Kirchhoff u. G. Hanseman, Wied. Ann. **9**. p. 1. 1880.

getroffen wird, nimmt augenblicklich die Temperatur des Wassers an.

Im Verlaufe der Untersuchung erwies sich jedoch diese Voraussetzung als unzulässig. Zugleich aber zeigte sich unter Beibehaltung der Schulze'schen Versuchsanordnung die Möglichkeit einer Berechnung der Versuche, die wesentlich einfacher zum Resultat führt, als der von Kirchhoff und Hanse-mann eingeschlagene Weg.

1. Man denke sich das Wärme leitende Medium nur durch eine Ebene begrenzt. Diese machen wir zur yz -Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems derart, dass die positive Richtung der x -Axe in das Innere des Mediums zeigt.

Das Medium habe anfangs die Temperatur Null. Von einem bestimmten Augenblick an werde die Grenzfläche $x = 0$ durch Wasser von der Temperatur ϑ_0 bespült. Dann wird sich eine Wärmebewegung im Medium so fortpflanzen, dass zu jeder Zeit die Temperatur ϑ in einer der Grenzfläche parallelen Ebene $x = \text{const.}$ überall dieselbe ist.

Ueber die Temperatur in der Grenzfläche selbst ist nichts bekannt. Hat man aber in einem Punkte der Ebene $x = x_1$ die Temperatur ϑ als Function der Zeit t beobachtet und

$$\vartheta = \psi(t)$$

gefunden, so ist durch die Differentialgleichung der Wärmeleitung und die beiden Bedingungen

$$\vartheta = \psi(t) \text{ für } x = x_1,$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{für } t = 0$$

die Temperatur an jedem Punkte, für den $x > x_1$ ist, und für alle Zeiten eindeutig bestimmt. Wäre das Wärmeleitvermögen bekannt, so könnte man nach Auflösung der Differentialgleichung die Temperatur für jede Stelle und Zeit berechnen. Umgekehrt kann man das Wärmeleitvermögen finden, wenn man die Temperatur an einer beliebigen Stelle, deren $x > x_1$ ist, als Function der Zeit beobachtet. Dieses zweiten Weges bedienen wir uns im Folgenden.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung für den hier in Betracht kommenden Fall lautet, wenn man das Wärme-

leitvermögen λ , die spezifische Wärme c und die Dichte ρ zwischen den Temperaturen 0 und ϑ_0 als constant ansieht,

$$(1) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Hierbei ist

$$k^2 = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$$

das sogenannte Temperaturleitvermögen.

Die Lösung der Differentialgleichung (1) für die oben genannten Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} \vartheta &= \psi(t) \quad \text{für} \quad x = x_1, \\ \vartheta &= 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \end{aligned}$$

ist, wie bekannt¹⁾:

$$(2) \quad \vartheta = \int_0^t \psi(t') \cdot \frac{\partial}{\partial t} U \left(\frac{x - x_1}{2k\sqrt{t - t'}} \right) dt',$$

wenn zur Abkürzung

$$U(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-q^2} dq$$

gesetzt wird.

Beobachtet man nun etwa für $x = x_2$ ($x_2 > x_1$)

$$\vartheta = \chi(t),$$

so ist in der Gleichung

$$\chi(t) = \int_0^t \psi(t') \cdot \frac{\partial}{\partial t} U \left(\frac{x_2 - x_1}{2k\sqrt{t - t'}} \right) dt'$$

k die einzige Unbekannte, die sich eventuell leicht bestimmen lässt, wenn nämlich die Form der beobachteten Function ψ eine einfache Auswertung des Integrales ermöglicht.

Dies ist z. B. der Fall, wenn, wie bei den zu beschreibenden Versuchen, $\psi(t)$ in die Form gebracht werden kann

$$\psi(t) = \vartheta_0 \cdot U \left(\frac{1}{2g_1\sqrt{t}} \right).$$

1) Vgl. z. B. B. Riemann, Part. Differentialgleichungen, 3. Aufl. § 52. p. 131. Hattendorff 1882.

Diese Gleichung vermag ziemlich mannigfaltige Curven darzustellen, wenn man ψ als Ordinate, t als Abscisse aufträgt. Denn einmal kann die Constante g_1 beliebig variirt werden, zweitens aber ist über den Zeitnullpunkt noch nichts anderes bestimmt, als dass für $t = 0$ $\vartheta = 0$ sein soll.

Die vorige Gleichung schreiben wir jetzt

$$(3) \quad \psi(t) = \vartheta_0 \cdot U\left(\frac{x_1 + \xi}{2k\sqrt{t}}\right),$$

indem wir durch die Substitution

$$k = g_1(x_1 + \xi)$$

das Temperaturleitvermögen und eine unbekannte Constante ξ einführen. Durch Substitution von (3) in (2) ergibt sich

$$\vartheta = \vartheta_0 \int_0^t U\left(\frac{x_1 + \xi}{2k\sqrt{t'}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} U\left(\frac{x - x_1}{2k\sqrt{t - t'}}\right) dt'.$$

Dieser Ausdruck ist aber identisch mit dem anderen

$$(4) \quad \vartheta = \vartheta_0 \cdot U\left(\frac{x + \xi}{2k\sqrt{t}}\right),$$

denn beide sind Lösungen der Differentialgleichung (1), welche den gleichen Grenzbedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 & \text{für } t &= 0, \\ \vartheta &= \vartheta_0 \cdot U\left(\frac{x_1 + \xi}{2k\sqrt{t}}\right) & \text{für } x &= x_1. \end{aligned}$$

Die unter (4) gegebene Lösung hat folgende einfache physikalische Bedeutung: Sie stellt den Temperaturverlauf dar, der in dem betrachteten Medium stattfinden würde, wenn zur Zeit $t = 0$ in der Ebene $x = -\xi$ eine plötzliche Temperaturänderung ϑ_0 einträte, wobei der zwischen dieser Ebene und der wirklichen Grenzfläche des Mediums befindliche Raum vom Material des Mediums noch erfüllt zu denken wäre.

Da Gleichung (3), wie schon erwähnt, die Beobachtungen an der Stelle x_1 darzustellen vermag und Gleichung (4) eine notwendige Folgerung aus Gleichung (3) ist, so *muss* die in *einer beliebigen Entfernung* x beobachtete Temperatur als

Function der Zeit sich durch Gleichung (4) darstellen lassen, wenn man nur der Grösse

$$\frac{k}{x + \xi} = g$$

einen passenden Zahlenwert giebt. Zu jedem x gehört ein g . Hat man also nur zwei Wertepaare (x_1, g_1) und (x_2, g_2) beobachtet, so folgen durch Substitution in die Gleichung

$$(5) \quad k = g(x + \xi)$$

die anderen Gleichungen:

$$(5a) \quad k = \frac{(x_2 - x_1) g_1 g_2}{g_1 - g_2},$$

$$(5b) \quad \xi = \frac{x_2 g_2 - x_1 g_1}{g_1 - g_2}.$$

Empfehlenswerter ist es, mehr als zwei Wertepaare (x, g) zu beobachten und k nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen.

Man sieht also, dass k in einfacher Weise gefunden werden kann, vorausgesetzt, dass der Temperaturverlauf an der Stelle x_1 eine durch die Gleichung

$$\vartheta_{x_1} = \vartheta_0 \cdot U\left(-\frac{1}{2g_1 \sqrt{t}}\right)$$

darstellbare Zeitfunction ist.

2. Die Herleitung der Gleichungen (5a) und (5b) geschah in der Annahme, dass die Temperatur an den Stellen x_1 und x_2 bei ein und demselben Versuch beobachtet wird, oder, was dasselbe ist, bei constantem ϑ_0 . Die Versuche selbst zeigen nun aber, dass die bei verschiedenen Versuchen gewonnenen Temperaturcurven einander ähnlich sind, wie das schon in der Annahme der Gleichung (3) zum Ausdruck kommt, wo die Temperatur des Wassers ϑ_0 nur als Factor vor das Integral U tritt. Die Bestimmung der Grösse ng ist daher ganz unabhängig von der Temperatur des anspülenden Wassers, wenn nur die ganze übrige Versuchsanordnung ungeändert bleibt.

Ein Vorteil dieser Berechnungsmethode besteht gerade darin, dass man nicht die wahre Temperatur als Function der Zeit zu kennen braucht, sondern nur eine der Temperatur

proportionale Grösse, die wir fortan mit φ bezeichnen wollen. Man findet also g aus einer Gleichung

$$(6) \quad \varphi = C \cdot U\left(\frac{1}{2g\sqrt{t}}\right),$$

wo C eine beliebige Constante sein mag.

Wir nahmen bisher das leitende Medium als unendlich ausgedehnt an, nur durch *eine* Ebene begrenzt. Thatsächlich hatte das untersuchte Material die Form cylindrischer Stäbe von ca. 1 cm Durchmesser und 30—50 cm Länge, deren eine Endfläche vom Wasser gespült wurde. Die Länge der Stäbe konnte praktisch als unendlich gelten, der Durchmesser war jedoch so klein, dass die äussere Wärmeleitung einen merkbaren Einfluss auf das Resultat hatte.

Für die Wärmevorgänge im Stabe ist daher folgende bekannte Differentialgleichung angenommen:

$$(7) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - f \cdot \vartheta,$$

wo k die frühere Bedeutung hat und

$$f = \frac{4h}{c \cdot q \cdot d}$$

gesetzt ist; h ist die „äussere Wärmeleitungsconstante“, d der Durchmesser des Stabes, c und q spezifische Wärme und Dichte. Jede Lösung der Differentialgleichung (1) geht durch Multiplication mit dem Factor e^{-ft} , worin e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, in eine Lösung der Differentialgleichung (7) über¹⁾, daher ist unter Berücksichtigung von (4):

$$(8) \quad \vartheta = e^{-ft} \cdot \vartheta_0 \cdot U\left(\frac{x + \xi}{2k\sqrt{t}}\right)$$

jedenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (7). Dass sie geeignet ist, die Temperatur im Stabe als Function von Ort und Zeit in den Grenzen des Versuches darzustellen, zeigten die Beobachtungen. Führen wir für ϑ die proportionale Grösse φ ein, so folgt

$$(8a) \quad \varphi \cdot e^{ft} = C \cdot U\left(\frac{x + \xi}{2k\sqrt{t}}\right) = C \cdot U\left(\frac{1}{2g\sqrt{t}}\right).$$

1) Vgl. die Dissertation p. 30.

Gesetzt, f sei bekannt und φ als Function von t beobachtet, so berechnet sich g ebenso wie aus Gleichung (6), und es ist klar, dass die Gleichungen (5), (5a) und (5b) zur Bestimmung von k und ξ gültig bleiben.

3. Ueber die Berechnung der Werte g ist noch folgendes zu bemerken. Die Beobachtungen wird man am besten graphisch darstellen, indem man φ oder bei nicht zu vernachlässigender äusserer Wärmeleitung $\varphi \cdot e^{ft}$ als Ordinate, t als Abscisse in Coordinatenpapier einträgt. Es kommt nun darauf an, die erhaltenen Curven durch die Gleichungen (6) bez. (8a) darzustellen.

Dabei steht die Wahl des Zeitnullpunktes frei,* sofern nur an allen Stellen $x > x_1$ für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ ist. Bei den hier angestellten Versuchen war der Augenblick, wo das Wasser auf die Endfläche des Stabes auffiel, ein wohl definirter Zeitpunkt, der zunächst als Nullpunkt angenommen wurde. Waren so die beobachteten Curven durch die genannten Gleichungen nicht gut darzustellen, so konnte die Uebereinstimmung zwischen berechneter und beobachteter Curve verbessert werden dadurch, dass zu den beobachteten Zeiten eine additive Constante τ hinzugefügt wurde.

Hierin liegt zweifellos eine Unbequemlichkeit, doch ist zu bemerken, dass es auf die absolute Grösse von τ nicht so sehr ankommt, dass man also häufig τ einer ganzen Zahl gleichsetzen kann.

Zur Aufsuchung der Werte g soll die Tab. I behülflich sein, in welcher mittels der für das Integral U existirenden Tafeln¹⁾ für eine Anzahl von g -Werten solche Wertepaare (φ, t) berechnet sind, die der Gleichung

$$\varphi = C \cdot U\left(\frac{1}{2g\sqrt{t}}\right)$$

genügen, wo C eine willkürliche Constante ist. Durch Vergleich der beobachteten Curven mit den berechneten Werte-

1) Z. B. Table des valeurs de l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

par André Markoff. St. Petersbourg 1888.

Annalen der Physik. IV. Folge. 3.

paaren (φ, t) ist es nun möglich, schnell zwei Näherungswerte von g zu finden, zwischen denen der gesuchte interpoliert werden kann.

Tabelle I.

g	$\varphi = 1$	3	5	10	15	20
0,040	$t = 33,66$	42,87	49,00	60,56	70,05	—
0,041	33,17	42,62	49,00	61,20	71,39	—
0,042	32,69	42,37	49,00	61,88	72,81	—
0,043	32,21	42,12	49,00	62,57	74,32	—
0,044	31,74	41,87	49,00	63,29	75,89	—
0,045	31,28	41,62	49,00	64,03	77,54	—
0,046	30,81	41,37	49,00	64,80	79,27	—
0,047	30,36	41,12	49,00	65,60	81,13	—
0,048	29,91	40,87	49,00	66,41	83,05	—
0,049	29,47	40,62	49,00	67,27	85,11	—
0,050	29,03	40,36	49,00	68,15	87,24	—
0,051	28,60	40,10	49,00	69,06	89,54	—
0,052	24,79	33,57	40,00	53,54	66,24	—
0,053	24,46	33,39	40,00	54,14	67,62	—
0,054	24,13	33,20	40,00	54,77	69,12	—
0,055	23,81	33,01	40,00	55,42	70,68	—
0,056	23,49	32,82	40,00	56,08	72,33	—
0,057	23,17	32,64	40,00	56,76	74,06	—
0,058	22,86	32,45	40,00	57,47	75,90	—
0,059	22,56	32,26	40,00	58,20	77,81	—
0,060	22,26	32,08	40,00	58,96	79,86	—
0,061	21,96	31,89	40,00	59,74	82,00	—
0,062	21,66	31,70	40,00	60,54	84,25	—
0,063	21,37	31,51	40,00	61,36	86,63	—
0,064	18,48	26,07	32,00	45,55	59,61	—
0,065	18,26	25,94	32,00	46,06	60,92	—
0,066	18,04	25,81	32,00	46,58	62,31	—
0,067	17,82	25,67	32,00	47,11	63,75	—
0,068	17,61	25,54	32,00	47,66	65,29	—
0,069	17,40	25,40	32,00	48,24	66,89	—
0,070	17,19	25,27	32,00	48,83	68,55	—
0,071	16,98	25,14	32,00	49,43	70,32	—
0,072	16,78	25,00	32,00	50,05	72,16	—
0,073	16,58	24,87	32,00	50,69	74,12	—
0,074	16,38	24,74	32,00	51,34	76,15	—
0,075	16,19	24,61	32,00	52,02	78,34	—

Tabelle I (Fortsetzung).

g	$\varphi = 1$	3	5	10	15	20
0,0765	$t = 13,49$	19,33	24,00	35,03	46,99	61,03
0,078	13,28	19,20	24,00	35,56	48,44	63,96
0,0795	13,07	19,07	24,00	36,11	49,97	67,15
0,081	12,87	18,94	24,00	36,68	51,59	70,64
0,0825	12,67	18,81	24,00	37,28	53,35	74,53
0,084	12,47	18,68	24,00	37,90	55,21	78,80
0,0855	12,28	18,55	24,00	38,54	57,19	83,53
0,087	12,10	18,42	24,00	39,20	59,33	88,82
0,0885	11,91	18,29	24,00	39,88	61,60	94,68
0,0900	10,59	15,70	20,00	30,95	44,11	61,33
0,0915	10,44	15,60	20,00	31,42	45,50	64,50
0,0930	10,30	15,50	20,00	31,89	46,98	67,97
0,0945	10,15	15,40	20,00	32,39	48,56	71,80
0,0960	10,01	15,30	20,00	32,90	50,23	76,03
0,098	9,82	15,18	20,00	33,61	52,68	82,56
0,100	9,64	15,05	20,00	34,36	55,27	89,74
0,102	9,46	14,92	20,00	35,14	58,15	98,31

g	$\varphi = 1$	3	5	10	15	25	40	50
0,104	$t = 6,20$	8,39	10,00	13,38	16,56	23,16	35,29	45,89
0,106	6,11	8,35	10,00	13,53	16,91	24,14	38,01	50,75
0,108	6,03	8,30	10,00	13,69	17,28	25,19	41,13	56,59
0,110	5,95	8,25	10,00	13,85	17,67	26,34	44,75	63,75
0,112	5,87	8,20	10,00	14,02	18,08	27,60	49,00	72,64
0,114	5,79	8,16	10,00	14,19	18,51	28,97	53,98	83,86
0,116	5,71	8,11	10,00	14,37	18,97	30,48	59,99	98,50
0,118	5,64	8,06	10,00	14,55	19,45	32,13	67,19	117,80
0,120	5,57	8,02	10,00	14,74	19,96	33,97	76,07	—
0,122	5,49	7,97	10,00	14,93	20,50	36,01	87,12	—
0,124	5,41	7,92	10,00	15,13	21,06	38,29	101,18	—
0,126	5,34	7,88	10,00	15,34	21,66	40,82	119,42	—
0,128	4,62	6,52	8,00	11,39	14,90	23,45	44,27	69,65
0,130	4,56	6,48	8,00	11,52	15,23	24,55	48,69	80,58
0,132	4,51	6,45	8,00	11,65	15,58	25,75	53,97	94,89
0,134	4,46	6,42	8,00	11,78	15,94	27,06	60,26	—
0,136	4,40	6,38	8,00	11,92	16,32	28,50	67,98	—
0,138	4,35	6,35	8,00	12,06	16,72	30,09	77,41	—
0,140	4,30	6,32	8,00	12,21	17,14	31,83	89,36	—

Tabelle I (Fortsetzung).

g	$\varphi = 1$	3	5	10	15	25	40	50
0,142	$t = 4,25$	6,28	8,00	12,36	17,58	33,78	104,71	—
0,144	4,20	6,25	8,00	12,51	18,04	35,94	124,89	—
0,146	4,15	6,22	8,00	12,67	18,53	38,35	152,27	—
0,148	4,10	6,18	8,00	12,83	19,04	41,05	—	—
0,150	4,05	6,15	8,00	13,00	19,59	44,13	—	—

g	$\varphi = 1$	3	5	10	15	20	30	40
0,153	$t = 3,37$	4,83	6,00	8,76	11,75	13,26	24,98	41,56
0,156	3,32	4,80	6,00	8,89	12,11	15,99	27,28	48,22
0,159	3,27	4,77	6,00	9,03	12,49	16,79	29,97	56,90
0,162	3,22	4,73	6,00	9,17	12,90	17,66	33,16	68,50
0,165	3,17	4,70	6,00	9,32	13,34	18,63	37,02	84,78
0,168	3,12	4,67	6,00	9,47	13,80	19,70	41,69	108,37
0,171	3,07	4,64	6,00	9,63	14,30	20,88	47,45	—
0,174	3,02	4,60	6,00	9,80	14,83	22,20	54,70	—
0,177	2,98	4,57	6,00	9,97	15,40	23,67	63,93	—
0,180	2,65	3,92	5,00	7,74	11,03	15,33	30,05	67,10
0,183	2,61	3,90	5,00	7,85	11,37	16,13	33,42	83,21
0,186	2,57	3,87	5,00	7,97	11,74	16,99	37,48	106,66
0,189	2,54	3,85	5,00	8,10	12,14	17,95	42,45	—
0,192	2,50	3,82	5,00	8,23	12,56	19,01	48,61	—
0,196	2,46	3,79	5,00	8,40	13,17	20,59	59,62	—
0,200	2,41	3,76	5,00	8,59	13,82	22,44	75,01	—
0,204	2,37	3,73	5,00	8,79	14,54	24,58	98,31	—

Die Tab. I lässt sich leicht ohne Benutzung der Integraltafeln vervollständigen. Denn man kann für beliebige Werte von g , die nicht in ihr enthalten sind, zugehörige Wertepaare (φ, t) auf folgende Weise berechnen: Für $g = g'$ seien die zu

$$\varphi = \varphi_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gehörigen Zeiten

$$t = t'_n$$

in Tab. I enthalten, sodass also die Gleichung

$$\varphi_n = C \cdot U\left(\frac{1}{2g' \sqrt{t'_n}}\right)$$

erfüllt ist. Dann sind die denselben g -Werten entsprechenden Zeiten t''_n , welche für $g = g''$ derselben Gleichung genügen, offenbar durch

$$t''_n = t'_n \left(\frac{g'}{g''} \right)^2$$

gegeben.

4. Die Versuchsanordnung stimmte im wesentlichen mit der von Hrn. Schulze beschriebenen¹⁾ überein, auf die ich deshalb hier verweise; doch sind noch einige Punkte hervorzuheben.

Die Temperaturänderung in der Entfernung x von der zu bespülenden Endfläche wurde durch ein Thermoelement gemessen, dessen elektromotorische Kraft der stets nur kleinen Temperaturänderung proportional gesetzt wurde. Da das Thermoelement nicht geeicht zu sein brauchte, so diente der untersuchte Stab in der Regel selbst als Elektrode. In der Entfernung x wurde ein dünner isolirter Draht von anderem Metall, das in der thermoelektrischen Spannungsreihe vom Metall des Stabes möglichst weit entfernt ist²⁾, am Boden eines etwas über die Stabmitte hinausgehenden Bohrloches mit einer Spur Zinn angelötet. Bisweilen war die Anordnung auch so getroffen, dass der Stab ganz durchbohrt und ein isolirter Draht so weit durch das Bohrloch gezogen war, bis sein von Isolation befreites und breitgeschlagenes Ende in der Mitte des Stabes durch Reibung festsass.

Die Grösse x wurde von der Mitte des Bohrloches³⁾ aus gemessen. Der zweite Zuleitungsdraht war an dem Ende des Stabes angelötet, woselbst während der Versuchsdauer keine merkliche Temperaturänderung eintrat.

In dem Stromkreise des Thermoelementes befand sich ausser einem Rheostaten ein du Bois-Rubens'sches⁴⁾ Galvanometer mit sog. „halbastatischem Magnetsystem“, das sich für alle hier beschriebenen Versuche vorzüglich eignete. Es wurde durch Aufhängung vor mechanischen Erschütterungen und

1) F. A. Schulze, Wied. Ann. 66. p. 218. 1898.

2) Bei den Kupfer- und Eisenstäben eignete sich Constantan, bei dem Nickel-Kupferstab ein Eisendraht.

3) Die Löcher hatten Durchmesser von $\frac{1}{2}$ –1 mm.

4) H. du Bois u. H. Rubens, Elektrotechn. Zeitschr. 15. p. 321. 1894.

durch zwei aus Eisendraht gewickelte Ringe vor magnetischen Störungen derartig geschützt, dass die durch das Fernrohr beobachteten Schwankungen des Magnetsystems um seine Ruhelage höchstens ein bis zwei Zehntel eines Scalenteiles betrugten. Dabei war die Scala in Millimeter geteilt und 1,5—2 m vom Spiegel des Galvanometers entfernt. Letzteres hatte 2,5 Ohm Widerstand und eine Empfindlichkeit von etwa $6 \cdot 10^{-8}$ Amp. pro Scalenteil.

Da die Ablesungen am Galvanometer gemacht wurden, während das System in Bewegung war, so musste der Einfluss seiner Trägheit und Dämpfung festgestellt werden. Bezeichnet φ den am Galvanometer beobachteten Ausschlag in Scalenteilen, E die elektromotorische Kraft des Thermoelementes, so lässt sich die Bewegungsgleichung des Galvanometersystems folgendermaassen schreiben:

$$\alpha \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \beta \frac{d \varphi}{dt} + \gamma \varphi = \gamma E.$$

Die Constanten α und β sind durch Schwingungsdauer T und logarithmisches Decrement A bestimmt.

Es ist¹⁾

$$\alpha = \frac{T^2}{\pi^2 + A^2},$$

$$\beta = 2 \frac{TA}{\pi^2 + A^2}.$$

Es wurde versucht, α und β so klein zu wählen, dass auf der linken Seite der Galvanometergleichung die beiden ersten Glieder vernachlässigt werden konnten.

Und hierfür gerade erwies sich das benutzte Galvanometer als hervorragend günstig. Dämpfung und Schwingungsdauer konnten klein gemacht werden, ohne dass die Empfindlichkeit zu stark herabgesetzt wurde. Es war

$$A = 0,095,$$

$$T = 1,31 \text{ sec},$$

also

$$\alpha = 0,173,$$

$$\beta = 0,025.$$

1) F. Kohlrausch, *Leitf. d. pr. Physik*, 7. Aufl. p. 326. T ist hier die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrpunkten.

Die mit Hülfe dieser Zahlen berechneten Correctionsglieder für q konnten völlig unberücksichtigt bleiben, da sie innerhalb der Beobachtungsfehler lagen.

In dem beobachteten Ausschlag war demnach direct eine der Temperaturänderung an der Stelle x proportionale Grösse gegeben.

Vor Beginn des Versuches wurde das Fernrohr so gerichtet, dass der senkrechte Faden des Fadenkreuzes mit irgend einem Teilstrich der Scala zusammenfiel. Von dem Zeitpunkt $t = 0$ an, der auf einem Chronographen markirt wurde, bespülte ein starker Wasserstrahl die Endfläche des Stabes. Der Wasserleitungshahn wurde meist um 180° aufgedreht, wobei aus einem Rohr von 1,6 cm Durchmesser in drei Secunden etwa 1 Liter Wasser auf die Stabfläche senkrecht auffiel. Die weiter unten angeführten Versuche zeigen, dass eine Aenderung in der Stärke der Bespülung in gewissen Grenzen keinen merklichen Einfluss auf das Resultat hatte.

Einige Secunden nach dem Auffallen des Wassers setzte sich das Galvanometersystem in Bewegung, und von da an wurden die Zeitpunkte auf dem Chronographen angegeben, in denen der Ausschlag ganze Vielfache seiner Einheit erreicht hatte. Die Einheit betrug je nach der Geschwindigkeit des Galvanometersystems ein oder mehrere Scalenteile. Die Bewegung des Systems wurde meist bis zu 50 Secunden hin verfolgt, bisweilen auch länger. Die am Chronographen abgelesenen Zeiten t wurden als Abscissen, die zugehörigen Ausschläge q als Ordinaten auf Millimeterpapier aufgetragen und die Punkte (t, q) durch eine Curve verbunden. Standen mehrere Versuche zur Verfügung, so konnten diese leicht in einer einzigen Curve vereinigt werden, da, wie oben erwähnt, die gleichzeitigen Ausschläge des Galvanometers bei zwei Versuchen, für die x unverändert bleibt, in einem constanten Verhältnis stehen.

5. In der beschriebenen Weise wurden sämtliche Stäbe untersucht. Während bei den meisten der Temperaturgang nur an zwei Stellen beobachtet wurde, befanden sich in dem Stabe (R.Cu) aus reinem Kupfer vier Thermoelemente in 2,97, 6,02, 8,97 und 11,97 cm Entfernung von der Endfläche, weshalb dieser Stab am besten als Beispiel für die Berechnung dienen wird.

Tab. II zeigt zunächst den geringen Einfluss der Bespülungsstärke. Die drei dort angeführten Versuche sind mit dem ausnahmsweise geachteten Eisen-Constantan-Element in 8,97 cm Abstand vom Stabende angestellt. 1 Scalenteil Ausschlag entspricht $0,0228^{\circ}$ C. Ein Maass für die Bespülungs-

Tabelle II.

Versuch 1. Wasserhahn um ca. 67° gedreht; $\vartheta_0 = 6,32^{\circ}$ C.

φ Galvan.- Ausschlag in Scalenteilen	$t_{\text{beob.}}$ in sec	$t_{\text{ber.}}$ für $\tau = 0$ $g = 0,1005$	$t_{\text{ber.}}$ $- t_{\text{beob.}}$	$t_{\text{ber.}}$ für $\tau = 1$ $g = 0,0946$	$t_{\text{ber.}}$ $- t_{\text{beob.}}$
1×5	9,32	9,40	+0,08	9,23	-0,09
2×5	12,09	12,15	+0,06	12,10	+0,01
3×5	14,52	14,57	+0,05	14,59	+0,07
4×5	17,03	16,90	-0,13	16,96	-0,07
5×5	19,31	19,25	-0,06	19,31	$\pm$
6×5	21,73	21,66	-0,07	21,69	-0,04
7×5	24,17	24,16	-0,01	24,15	-0,02
8×5	26,70	26,80	+0,10	26,70	$\pm$
9×5	29,30	29,59	+0,29	29,37	+0,07
10×5	32,23	32,57	+0,34	32,18	-0,05

Versuch 2. Wasserhahn um 112° gedreht; $\vartheta_0 = 6,12^{\circ}$ C.

φ Galvan.- Ausschlag in Scalenteilen	$t_{\text{beob.}}$ in sec	$t_{\text{ber.}}$ für $\tau = 0$ $g = 0,1014$	$t_{\text{ber.}}$ $- t_{\text{beob.}}$	$t_{\text{ber.}}$ für $\tau = 1$ $g = 0,0954$	$t_{\text{ber.}}$ $- t_{\text{beob.}}$
1×5	9,13	9,21	+0,08	9,04	-0,09
2×5	11,89	11,89	$\pm$	11,85	-0,04
3×5	14,26	14,25	-0,01	14,28	+0,02
4×5	16,53	16,53	$\pm$	16,60	+0,07
5×5	18,94	18,81	-0,13	18,90	-0,04
6×5	21,18	21,15	-0,03	21,23	+0,05
7×5	23,61	23,58	-0,03	23,62	+0,01
8×5	26,02	26,14	+0,12	26,11	+0,09
9×5	28,70	28,85	+0,15	28,71	+0,01
10×5	31,48	31,73	+0,25	31,45	-0,03

Versuch 3. Wasserhahn um 180° gedreht; $\vartheta_0 = 6,82^\circ \text{ C.}$

φ Galvan.- Ausschlag in Scalenteilen	$t_{\text{beob.}}$ in sec	$t_{\text{ber.}}$ für $\tau = 0$ $g = 0,1015$	$t_{\text{ber.}}$ $- t_{\text{beob.}}$	$t_{\text{ber.}}$ für $\tau = 1$ $g = 0,0955$	$t_{\text{ber.}}$ $- t_{\text{beob.}}$
1×5	8,66	8,90	+0,24	8,71	+0,05
2×5	11,37	11,40	+0,03	11,33	-0,04
3×5	13,52	13,57	+0,05	13,57	+0,05
4×5	15,60	15,64	+0,04	15,68	+0,08
5×5	17,83	17,70	-0,13	17,76	-0,07
6×5	19,84	19,78	-0,06	19,84	$\pm$
7×5	21,96	21,92	-0,04	21,96	$\pm$
8×5	24,11	24,15	+0,04	24,14	+0,03
9×5	26,41	26,49	+0,08	26,40	-0,01
10×5	28,77	28,95	+0,18	28,76	-0,01
11×5	31,43	31,56	+0,13	31,23	-0,20
12×5	33,78	34,34	+0,56	33,83	+0,05
13×5	36,64	37,30	+0,66	36,58	-0,06
14×5	39,50	40,49	+0,99	39,49	-0,01

stärke giebt der Winkel, um den der Wasserhahn aufgedreht wurde. Den Einfluss verschiedener Bespülung erkennt man aus den g -Werten, die für die beobachteten Curven berechnet sind.

Um zugleich den Vorteil der Einführung von τ zu zeigen sind einmal für $\tau = 0$, zweitens für $\tau = 1$ die Zeiten t berechnet, welche für die über den Columnen stehenden g -Werte die Gleichung:

$$\varphi = C \cdot U \left(\frac{1}{2g \sqrt{t + \tau}} \right)$$

erfüllen. Die Differenzen $t_{\text{ber.}} - t_{\text{beob.}}$ sind im zweiten Falle nicht grösser, als die möglichen Beobachtungsfehler.

Es ergeben sich demnach folgende g -Werte:

	für $\tau = 0$	für $\tau = 1$
aus Versuch 1	$g = 0,1005$	$g = 0,0946$
„ „ 2	$g = 0,1014$	$g = 0,0954$
„ „ 3	$g = 0,1015$	$g = 0,0955$

Der Einfluss der Bepflügelungsstärke ist also nur bis zu einem gewissen Grade merklich, er verschwindet bei starker Bepflügelung.

Für alle übrigen endgültigen Versuche wurde deshalb die Bepflügelung ebenso gewählt, wie bei Versuch 3.

In der Figur geben die Curven I bis IV die an den vier Stellen x beobachteten Scalenausschläge (in beliebigem Maass-

stabe) als Functionen der Zeit wieder. Speciell ist in Curve III der oben angeführte Versuch 3 enthalten, wobei die Werte von φ im halben Maassstabe aufgezeichnet sind. Die mit den Curven nahe zusammenfallenden, durch Kreuze markirten Punkte genügen der Gleichung (6) für die folgenden $g_{\text{beob.}}$:

$\tau = 0,$		
x	$g_{\text{beob.}}$	$g_{\text{ber.}}$
2,97	0,226	0,226
6,02	0,1375	0,1384
8,97	0,1015	0,1007
11,97	0,0788	0,0788

Durch Combination der beiden äussersten Wertepaare (x , $g_{\text{beob.}}$) erhält man aus den Gleichungen (5a) und (5b)

$$k = 1,089, \quad \xi = 1,848,$$

und durch Substitution dieser Zahlen in Gleichung (5) ergeben sich rückwärts die $g_{\text{ber.}}$.

Eine bessere Uebereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung war nicht zu erwarten.

6. Berechnung von k mit Berücksichtigung der äusseren Wärmeleitung.

Aus den beobachteten Curven I bis IV sind durch Multiplication der Ordinaten mit e^{ft} die neuen Curven 1 bis 4 gewonnen. Für f wurde der Wert 0,002 benutzt, der sich aus später (p. 62) zu erwähnenden Versuchen ergab. Die Curven 1 bis 4 lassen sich nun durch folgende Gleichungen charakterisiren:

$$\text{Curve 1 durch: } \varphi \cdot e^{ft} = C_1 \cdot U\left(\frac{1}{2.0,1895\sqrt{t+1,5}}\right),$$

$$,, \quad 2 \quad ,, : \varphi \cdot e^{ft} = C_2 \cdot U\left(\frac{1}{2.0,121\sqrt{t+1,5}}\right),$$

$$,, \quad 3 \quad ,, : \varphi \cdot e^{ft} = C_3 \cdot U\left(\frac{1}{2.0,0915\sqrt{t+1,5}}\right),$$

$$,, \quad 4 \quad ,, : \varphi \cdot e^{ft} = C_4 \cdot U\left(\frac{1}{2.0,0735\sqrt{t+1,5}}\right),$$

wie das die in der Figur für jede Curve berechneten und durch Kreise bezeichneten Punkte beweisen.

Durch Substitution der vier beobachteten Wertepaare (x , g) in die Gleichung (5) erhält man ebenso viele Gleichungen zur Bestimmung von k und ξ . Die mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate berechneten wahrscheinlichsten Werte von k und ξ sind

$$k = 1,069,$$

$$\xi = 2,704.$$

Zum Vergleiche mögen die hieraus berechneten und die beobachteten Werte von g nebeneinander gestellt werden:

x	$g_{\text{beob.}}$	$g_{\text{ber.}}$
2,97	0,1895	0,1885
6,02	0,1210	0,1226
8,97	0,0915	0,0916
11,97	0,0735	0,0729

Man sieht, dass die Vernachlässigung der äusseren Wärmeleitung bei diesem Stabe nur einen Fehler von 2 Proc. im k , also von 4 Proc. in der Wärmeleitungsconstante $\lambda = k^2 \cdot \rho \cdot c$ hervorruft.

Für die übrigen Stäbe wird es genügen, die Resultate kurz anzugeben.

CuAs 1:

$$\begin{aligned} \tau &= 1, \\ x_1 &= 2,04 : g_1 = 0,2055, \\ x_2 &= 7,98 : g_2 = 0,0707, \\ k &= 0,648. \end{aligned}$$

CuAs 2:

$$\begin{aligned} \tau &= 2, \\ x_1 &= 1,48 : g_1 = 0,1561, \\ x_2 &= 5,48 : g_2 = 0,0560, \\ k &= 0,350. \end{aligned}$$

FeWA 14:

$$\tau = 1,2.$$

x	$g_{\text{beob.}}$	$g_{\text{ber.}}$
1,535	0,2005	0,2005
5,00	0,07885	0,07890
8,01	0,05175	0,05168

Die Werte $g_{\text{ber.}}$ sind gefunden für

$$\begin{aligned} k &= 0,4507, \\ \xi &= 0,712. \end{aligned}$$

FeWA 2 und FeWA 3:

$$\begin{aligned} \tau &= 2,5. \\ x_1 &= 1,56 : g_1 = 0,150, \\ x_2 &= 6,07 : g_2 = 0,05375, \\ k &= 0,378. \end{aligned}$$

Bei beiden Stäben waren die Entfernungen x fast gleich ausgefallen und die hier beobachteten Temperaturcurven fielen für beide Stäbe zusammen.

FeWA 4:

$$\begin{aligned} \tau &= 2,5. \\ x_1 &= 1,543 : g_1 = 0,1475, \\ x_2 &= 6,041 : g_2 = 0,0527, \\ k &= 0,369. \end{aligned}$$

NiCu:

$$\tau = 2,0,$$

$$x_1 = 0,993 : g_1 = 0,1645,$$

$$x_2 = 4,006 : g_2 = 0,0530,$$

$$k = 0,236.$$

Sämtliche k gelten für Zimmertemperatur, da das anspülende Wasser in der Regel nur um ca. 3°C . kälter war als der Stab.

7. *Vergleich mit anderen Methoden.* Drei andere Methoden zur Bestimmung des metallischen Wärmeleitvermögens wurden zum Vergleiche herangezogen.

Zunächst wurde der Kupferstab RCu nach der von H. Weber¹⁾ beschriebenen Methode untersucht. Diese ergab

$$k = 0,98$$

für eine mittlere Temperatur von $23,6^\circ\text{C}$., also völlig abweichend von unserem p. 59 erhaltenen Resultat 1,069. Der Grund hierfür ist sicherlich zum grössten Teil in der der Weber'schen Methode zu Grunde liegenden Annahme zu suchen. Es ist dieselbe, die Hr. Schulze gemacht hat²⁾ und die sich im Vorigen als unzutreffend erwies. Es zeigte sich dort, dass bei der Bespülung mit Wasser der Wärmevorgang im Stabe der Gleichung (4) nahezu folgt³⁾, also derselbe ist, als ob eine plötzliche Temperaturänderung *nicht* in der Ebene $x = 0$, sondern in einer Ebene erfolgte, die um die Strecke ξ ausserhalb des Stabes läge, wobei der Raum zwischen der zuletzt genannten Ebene und der Endfläche des Stabes vom Material desselben erfüllt zu denken ist. Daher wäre man vielleicht bei den Versuchen mit der Weber'schen Anordnung auf die hier nicht näher eingegangen zu werden braucht, zu einem richtigeren Werte für k gelangt, wenn man die Thermolemente, die von dem einen Stabende um $\frac{1}{6}$ und $\frac{4}{6}$ der Stablänge entfernt sein sollen, um die Strecken $\frac{2}{3}\xi$ bez. $\frac{1}{3}\xi$ (d. i. nach p. 59 1,23 und 0,62 cm) von der Stabmitte entfernt und in der Berechnung statt der wirklichen Länge des Stabes L ($= 48\text{ cm}$) die Grösse $L + 2\xi$ ($= 51,7\text{ cm}$) eingeführt hätte.

1) H. Weber, Pogg. Ann. **146**. p. 257. 1872.

2) Vgl. p. 43.

3) Wenn man von der äusseren Wärmeleitung absieht.

L. Lorenz hat bei seinen Untersuchungen über das Wärmeleitvermögen von Metallen zwei verschiedene Methoden angewandt, deren Resultate mit einigen Ausnahmen befriedigend übereinstimmen. Die eine, wohl bequemere von beiden, eine Modification der Forbes'schen Methode, ist von der hier beschriebenen principiell verschieden, da sie die stationäre Temperaturverteilung in einem Stabe benutzt.¹⁾ Ein Vergleich dieser Methoden war daher erwünscht.

Bei der Forbes'schen Methode ist die wichtigste Frage, ob die Wärmeabgabe nach aussen richtig eingeführt wird. Das scheint durch die Lorenz'sche Gleichung für die Erkaltungsgeschwindigkeit, die ich gut bestätigt fand, in der That geschehen zu sein. Die folgende Tab. III giebt die aus den Erkaltungsversuchen gewonnenen und schon früher benutzten Werte von f .

Tabelle III.

Material	f	Material	f
RCu	0,0020	Fe. WA 2	0,0044
CuAs 1	0,0019	Fe. WA 3	0,0048
CuAs 2	0,0047	Fe. WA 4	0,0046
FeWA 14	0,0027	NiCu	0,0046

Tabelle IV.

Material	Mittl. Temp. t	k aus Versuch			k_i im Mittel	k_{18} nach p. 59—61
		1	2	3		
RCu	80°	0,96	0,93	0,94	0,943	1,069
CuAs 1	78	0,638	0,642	0,639	0,640	0,648
CuAs 2	33	0,344	0,334	—	0,339	0,350
FeWA 14	50	0,460	0,418	0,422	0,433	0,451
FeWA 2	35	0,367	0,362	0,364	0,364	0,378
FeWA 3	34	0,346	—	—	0,346	0,378
FeWA 3	32	0,320	0,320	—	0,320	0,369
NiCu	33	0,220	—	—	0,220	0,236

Tab. IV giebt die Resultate der nach der Forbes-Lorenz'schen Methode mit sämtlichen Stäben angestellten

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 13. p. 582. 1881.

Versuche, die nun freilich zum Teil eine sehr geringe Uebereinstimmung untereinander und mit den nach unserer Methode erhaltenen Werten zeigen, woran die Temperaturunterschiede nur wenig Schuld haben.

Vielmehr wird in der von mir nicht ganz praktisch gewählten Versuchsanordnung der Grund für die Abweichungen zu suchen sein.

Um nach Eintreten des stationären Zustandes im Stabe, dessen eine Endfläche vom Dampf siedenden Wassers bespült wird, dessen anderes Ende frei in die Luft ragt, die Temperaturverteilung zu bestimmen, liess ich ebenso wie Lorenz in 1, 3, 5, 7, 9, 11 cm Entfernung vom freien Ende Löcher bis zur Stabmitte bohren, in welche ein und dasselbe Thermoelement nacheinander eingesetzt werden konnte. Leider aber hatten die Bohrlöcher bis zu ihrer conischen Zuspitzung einen Durchmesser von 2 mm erhalten, sodass sie die Continuität des Stabes erheblich störten, während bei Lorenz die Dimensionen viel günstiger waren (Stäbe von 1,5 cm, Löcher von 0,4 mm Durchmesser). Die Temperatur in den mit Oeltröpfchen versehenen Löchern hielt sich nicht sehr constant, was besonders bei den guten Leitern grosse Fehler verursacht, wo die Temperaturen der verschiedenen Löcher einander nahe liegen. Dieser Uebelstand wäre nicht von so grossem Einfluss gewesen, wenn man rechtzeitig auf den Gedanken gekommen wäre, statt der kleinen Löcherabstände vom Ende 1, 3, 5, ... cm, grössere, etwa a , $3a$, $5a$, ... cm zu wählen; die Berechnung bleibt unverändert, wenn man sich einfach statt des Centimeters die grössere Längeneinheit a cm eingeführt denkt und die Reduction auf das Centimeter am Resultat anbringt. Bei derartigen Anordnung der Bohrlöcher würde man jedenfalls constantere Resultate erzielen können.

Unter diesen Umständen war es von grösstem Interesse, auch die kürzlich von Hrn. F. Kohlrausch¹⁾ angegebene, von den Herren Jäger und Diesselhorst²⁾ ausgeführte Methode zur Bestimmung des Verhältnisses von Elektricitäts- und Wärme-

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 38. p. 714. 1899; Ann. d. Phys. 1. p. 132. 1900.

2) W. Jäger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 38. p. 719. 1899.

leitung bei Metallen zum Vergleich heranzuziehen. Die genannten Herren hatten die Freundlichkeit, mir zwei der von ihnen untersuchten Stäbe, die in der citirten Arbeit mit Kupfer III und Eisen II bezeichnet sind, zu überlassen. Das Kupfer war ebenfalls als rein vom Hedderheimer Kupferwerk geliefert und erwies sich als wahrscheinlich identisch mit dem RCu bezeichneten, das Eisen mit 0,1 Proc. C, 0,18 Proc. Si, 0,11 Proc. Mn stammte von Fr. Krupp in Essen.

Aus den veröffentlichten Zahlen ¹⁾ lässt sich die Grösse k für 18° und 100° berechnen. Es ist danach für

$$\text{Kupfer III: } k_{18} = 1,067, \quad k_{100} = 1,046;$$

$$\text{Eisen II: } k_{18} = 0,417, \quad k_{100} = 0,396.$$

Nach meiner Methode fand ich, ohne Berücksichtigung der äusseren Wärmeleitung, bei Zimmertemperatur

$$\text{für Kupfer III: } k = 1,08.$$

Die Constante f wurde bei diesem Stabe, der übrigens einen Durchmesser von etwa 1,1 cm hatte, nicht bestimmt. Doch ist mit Sicherheit zu sagen, dass die Berücksichtigung der äusseren Wärmeleitung eine Verkleinerung des gefundenen k um noch nicht 2 Proc. bewirken würde, sodass die Uebereinstimmung der nach beiden Methoden gefundenen Resultate als gut bezeichnet werden kann. Die in 4,523 und 13,524 cm vom Stabende beobachteten Temperaturcurven sind in der Figur mit der Bezeichnung Ia und IIa eingetragen. Die dabei befindlichen, durch Kreuze markirten Punkte sind berechnet für

$$\tau = 1,$$

$$g_1 = 0,1635,$$

$$g_2 = 0,06925,$$

woraus sich nach Gleichung (5a) der obengenannte Wert

$$k = 1,08$$

ergiebt.

Der Stab Eisen II hatte einen Durchmesser von 1,6 cm, daher ergab sich für f der kleine Wert 0,00066. Mit Berücksichtigung der äusseren Wärmeleitung lieferte die Berechnung

$$k = 0,420,$$

$$\xi = 0,550;$$

1) l. c. p. 726.

dabei war

$$\tau = 0,5.$$

x	$g_{\text{beob.}}$	$g_{\text{ber.}}$
1,497	0,2045	0,2052
4,515	0,0835	0,0829
13,485	0,0295	0,0299

Die $g_{\text{ber.}}$ sind nach Gleichung (5) gefunden.

Dem für $x = 13,485$ cm beobachteten Werte g ist kein so grosses Gewicht beizulegen wie den anderen, da er aus Versuchen gefunden ist, bei denen in der Zeit von 70 bis 150 Sec. nach dem Aufspritzen des Wassers der Galvanometerausschlag nur bis zu 10 Scalenteilen anwuchs.

Auch bei diesem Stabe ist also die Uebereinstimmung mit der von den Herren Jäger und Diesselhorst gefundenen Zahl gut.

Endlich sei noch angeführt, dass Ångström¹⁾ für Kupfer, von dem er glaubte, dass es etwas Eisen enthielt,

$$k_{18} = 1,064$$

fand, in guter Uebereinstimmung mit den Zahlen von Jäger und Diesselhorst und von mir.

Die Methode von Ångström hat eine äussere Aehnlichkeit mit der von H. Weber (vgl. p. 61), sofern auch bei ihr ein periodischer Wärmevorgang im Stabe erzeugt wird. Im Princip aber ist sie eher mit der meinigen verwandt. Denn auch Ångström beobachtet die Temperatur an zwei Stellen des einseitig als unbegrenzt anzusehenden Stabes als Function der Zeit, und sucht dann diejenige Lösung der Differentialgleichung (7) auf, welche die beobachteten Zeitfunctionen darzustellen geeignet ist. Er findet sie wegen der Periodicität des Wärmevorganges in Form einer Fourier'schen Reihe.

8. Da über den *Verlauf der Temperatur in der Grenzfläche eines von Wasser bespülten Metalles* wiederholt falsche Annahmen gemacht worden sind, so ist es von Interesse,

1) K. Ångström, Pogg. Ann. 114. p. 519. 1861.

dass hierüber aus den vorliegenden Versuchen ein Schluss gezogen werden kann.

Der bei Bespülung der Grenzfläche mit Wasser in der Entfernung x vom Stabende beobachtete und, wie p. 59 gezeigt, durch die Gleichung

$$\vartheta = C \cdot e^{-ft} \cdot U\left(\frac{x+\xi}{2k\sqrt{t+\tau}}\right)$$

darstellbare Temperaturgang würde auch dann beobachtet werden, wenn in der Grenzfläche $x=0$

$$(9) \quad \vartheta = C \cdot e^{-ft} \cdot U\left(\frac{\xi}{2k\sqrt{t+\tau}}\right)$$

wäre. Man kann daher vermuten, dass der wirkliche Temperaturverlauf von dem durch Gleichung (9) bestimmten nicht sehr verschieden sein wird, und es erhebt sich die Frage, wie ein derartiger Temperaturgang zu stande kommt.

Man kann voraussetzen, dass durch das sehr schnell fliessende Wasser in einer sehr geringen Entfernung vor der Grenzfläche des Stabes die Temperatur des Wassers stets constant erhalten wird. Dann ist die weitere Annahme sehr plausibel, dass durch die auf dem Metall festhaftende sehr dünne Wasserschicht in jedem Augenblick eine Wärmemenge strömt, die der Differenz zwischen der constanten Temperatur des Wassers ϑ_0 und der unbekannten Temperatur der Metallfläche ϑ ¹⁾ proportional ist. Ist q die Wärmemenge, welche in dem Zeitelement dt durch die Querschnittseinheit der Grenzfläche strömt, so wollen wir

$$q = H(\vartheta_0 - \vartheta) dt$$

setzen. H heisst die äussere Wärmeleitung des Metalles gegen Wasser und ist unbekannt.

Wir nehmen nun wiederum einen Stab an, der sich von $x=0$ bis $x=\infty$ erstreckt und bis zum Augenblick $t=0$ mit seiner Umgebung die Temperatur 0 hat. Von diesem Zeitpunkt an werde die Wärmemenge q der Endfläche zugeführt. Dann wäre unter Vernachlässigung der äusseren Wärmeleitung

1) Diese Differenz beträgt im Anfang des Versuches nur wenige Grade und nimmt schnell ab.

die Temperatur ϑ an der Stelle x des Stabes durch die Differentialgleichung (1)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

und durch folgende Grenzbedingungen bestimmt:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vartheta = 0 & \text{für } t = 0, \\ -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = H(\vartheta_0 - \vartheta) & \text{für } x = 0. \end{array} \right.$$

Für ganz ähnliche Grenzbedingungen hat G. Kirchhoff in seinen Vorlesungen¹⁾ die Lösung der Differentialgleichung (1) bereits gegeben. Es kann daher die für die Bedingungen (10) geltende Lösung hier sofort angeführt werden. Setzt man

$$b = \frac{H}{\lambda},$$

so wird

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{ U\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) - e^{k^2 b^2 t + b x} U\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}} + kb\sqrt{t}\right) \right\},$$

woraus für die Temperatur der Grenzfläche folgt:

$$(11) \quad \vartheta_{x=0} = \vartheta_0 \left\{ 1 - e^{k^2 b^2 t} U\left(kb\sqrt{t}\right) \right\}.$$

Liesse sich nun der Nachweis führen, dass die in den Gleichungen (9) und (11) gegebenen Ausdrücke für irgend einen Wert von b nahezu identisch sind, so könnte man die Gleichungen (10) als eine Beschreibung des bei der Bepülung mit Wasser in Wirklichkeit sich abspielenden Vorganges ansehen.

Es ist mir nicht gelungen, auf analytischem Wege einen Zusammenhang der bezeichneten Ausdrücke zu finden. Dagegen lässt sich ein Vergleich mittels zahlenmässiger Berechnung durchführen, wenn man nur das Verhältnis $C:\vartheta_0$ kennt. Für das reine Kupfer konnte diese Grösse aus den in Tab. II angeführten Versuchen gefunden werden, es ergab sich

$$\frac{C}{\vartheta_0} = 1,098.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über theor. Physik 4. Wärme, p. 25–27.

Berechnet man nun nach den Gleichungen (9) und (11) die Grösse $\vartheta_{x=0}$ für verschiedene Werte von t , so zeigt sich, dass beide Gleichungen dann eine ähnliche Zeitfunction darstellen, wenn man etwa

$$k^2 b^2 = 0,18$$

setzt. Die durch Gleichung (9) bestimmte Curve ist in der Figur mit 0_a , die aus Gleichung (11) für $k^2 b^2 = 0,18$ berechnete Curve mit 0_b bezeichnet. Ihre Abweichungen voneinander erfolgen anfangs bald im einen, bald im anderen Sinn, sie werden sich daher in grösseren Entfernungen von der Endfläche nicht sehr bemerkbar machen. Nur für spätere Zeiten, von 30 Secunden an, verläuft Curve 0_a andauernd flacher als Curve 0_b . Da auch bei den früher beschriebenen Versuchen (vgl. Tab. II) zwischen berechneter und beobachteter Curve sich dieselbe Erscheinung zeigte, so ist es als wahrscheinlich anzusehen, dass durch Curve 0_b der wirklich stattfindende Temperaturgang in der Grenzfläche gegeben ist. Nimmt man dies an, so ist die Notwendigkeit, die Constante τ einzuführen, leicht zu erklären. Sie verhütet offenbar eine anfangs zu einseitige Abweichung der nach Gleichung (9) berechneten Curve von der thatsächlichen Temperaturcurve.

Aus

$$k^2 b^2 = 0,18$$

folgt

$$b = \frac{H}{\lambda} = \frac{\sqrt{0,18}}{k},$$

also

$$H = \frac{\lambda}{k} \sqrt{0,18} = 0,37 \text{ g-Cal.}$$

Für die Wärmeleitungsconstante λ des reinen Kupfers ist der in Tab. V, p. 71 angegebene Wert genommen.

Die an den Eingang dieses Abschnittes gestellte Frage lässt sich demnach so beantworten: Wenn eine Metallfläche durch eine stark bewegte Flüssigkeit von constanter Temperatur gespült wird, so ist der Temperaturgang in der Grenzfläche beider Medien dadurch bedingt, dass in jedem Augenblick eine der Temperaturdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit proportionale Wärmemenge durch die Grenzschicht

strömt. Ist im speciellen Fall die Flüssigkeit sehr stark bewegtes Wasser, das Metall bestleitendes Kupfer, so ist die 1° C. Temperaturdifferenz entsprechende, in einer Secunde durch die Querschnittseinheit der Grenzschicht strömende Wärmemenge bei Zimmertemperatur etwa 0,37 g-Cal. Diese Grösse ist in gewissen Grenzen unabhängig von der Stärke der Bespülung, nimmt aber ab, wenn diese erheblich vermindert wird (vgl. Diss. p. 21). Welche Werte sie für andere Metalle hat und wie sie von der Politur der Fläche abhängt, ist nicht festgestellt worden. Bei den vorliegenden Versuchen war die Metallfläche möglichst glatt polirt.

Ueber einige Versuche, die Wasserbespülung durch Bestrahlung mit glühendem Platin zu ersetzen, vgl. die Diss. p. 50 ff.

9. Die beschriebene Methode zur Bestimmung der Wärmeleitung von Metallen dürfte sich aus folgenden Gründen zur weiteren Anwendung empfehlen:

Die Versuchsanordnung ist sehr einfach. Deshalb hängt das Gelingen der Versuche fast nur vom Galvanometer ab, das bei möglichst grosser Empfindlichkeit und kleiner Dämpfung keine merkbaren Schwankungen zeigen darf.

Jeder einzelne Versuch ist in 2—3 Minuten beendet und kann in ca. 2—3 Stunden wiederholt werden, wenn der Stab wieder Zimmertemperatur angenommen hat.

Drei Versuche genügen im allgemeinen, um die Temperaturcurve für eine Entfernung festzustellen, vorausgesetzt, dass das Galvanometersystem ruhig hängt.

Die erhaltene Constante k gilt für eine nahezu bestimmte Temperatur.

Die Methode wird praktisch unabhängig von der äusseren Wärmeleitung, wenn der Durchmesser der zu untersuchenden Stäbe über $1\frac{1}{2}$ cm gross und ihre Oberfläche vernickelt ist.¹⁾

Die Länge der Stäbe braucht nicht mehr zu betragen, als 10—30 cm, je nachdem der Stab ein schlechter oder guter Wärmeleiter ist.

1) Dies lässt sich aus den von L. Lorenz für die äussere Wärmeleitung h gefundenen Zahlen ersehen. Wied. Ann. 13. p. 597. 1881.

Ein Nachteil der Methode besteht darin, dass nicht die Wärmeleitungsconstante direct bestimmt wird, sondern die Quadratwurzel aus dem Quotienten der Wärmeleitfähigkeit in das Product aus specifischer Wärme und Dichte. Dadurch gehen in die Wärmeleitfähigkeit die Fehler bei der Bestimmung von k verdoppelt ein, ausserdem die bei der Bestimmung der specifischen Wärme möglichen Fehler.

Bei nicht ganz homogenen Metallen ergibt sich ein weiterer Nachteil der Methode daraus, dass die Constante nur für wenige Centimeter der Stablänge, nämlich den Teil zwischen den am weitesten voneinander entfernten Thermoelementen gefunden wird.

10. Die *specifische Wärme* der Metalle wurde nach der Mischungsmethode bestimmt.

Die für 18° berechneten specifischen Wärmen sind in der Tabelle V angeführt.

Die *elektrische Leitfähigkeit* ergab sich aus der Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten des von einem elektrischen Strome durchflossenen Stabes. Die Potentialdifferenz wurde mit dem geachteten Galvanometer, der Hauptstrom (ca. 0,3 bis 4 Amp.) mit einem Raps'schen Amperemeter gemessen. Der Stab lag in einem Petroleumbad, dessen Temperatur zwischen 10° und 40° variirt wurde. Der Temperaturcoefficient α in der Formel für den Widerstand bei der Temperatur t

$$W_t = W_{18} [1 + \alpha(t-18)]$$

ist in der Tab. V neben der elektrischen Leitfähigkeit κ mit angeführt.

11. Aus der Tabelle V ergibt sich, dass der Einfluss von Verunreinigungen auf die Leitfähigkeit der reinen Metalle für Elektricität und Wärme verschieden ist. Durch Beimengung fremder Bestandteile wird das Leitvermögen für Elektricität stärker herabgedrückt als das für Wärme, daher wächst für ein und dasselbe Metall das Verhältniss λ/κ mit abnehmendem elektrischem Leitvermögen. Dies zeigt sich beim Eisen zwar stärker als beim Kupfer, doch lässt sich, ein besonders merkwürdiges Verhalten des Eisens, wie es frühere Beobachter vermuteten, aus diesen Versuchen nicht ersehen.

Tabelle V.

Material	Elektr. ¹⁾ Leitv. $\kappa \cdot 10^5$	Temp.- coeff. $\alpha \cdot 10^4$	Dichte ϱ	Spec. Wärme e	$k \frac{\lambda}{c \cdot \varrho}$	Wärme- Leitv. λ	$\frac{\lambda}{\kappa} \cdot 10^{-1}$	Gehalt in Gew.- Proc. an Cu	As	C	Si	Mn	P	S	Ni
RCu	57,4	35	8,92	0,0914	1,07	0,934	163	100	0	—	—	—	—	—	—
CuAs 1	19,1	13	8,72	0,0928	0,648	0,340	178	?	Spuren	—	—	—	—	—	—
CuAs 2	5,03	2,8	8,86	0,0918	0,350	0,0995	198	?	viel	—	—	—	—	—	—
FeWA 14	9,89	54	7,87	0,107	0,451	0,171	173	0,05	—	0,105	0,015	0,06	0,03	0,015	—
FeWA 2	6,10	35	7,83	0,111	0,378	0,124	203	0,03	—	0,57	0,21	0,12	0,012	0,042	—
FeWA 3	6,12	39	7,84	0,110	0,378	0,123	201	0,035	—	0,99	0,06	0,12	0,005	0,025	—
FeWA 4	5,51	33	7,81	0,112	0,369	0,119	216	0,03	—	1,50	0,05	0,19	0,01	0,025	—
NiCu	1,99	0	8,89	0,0976	0,236	0,0484	243	54	—	—	—	—	—	—	46

1) Sämtliche Angaben sind bezogen auf die Einheiten cm, g, sec und die Temperatur 18°. Für die spezifische Wärme e ist die Grammcallee (18°) zu Grunde gelegt.

Auch für die reinen Metalle Kupfer und Eisen scheint λ/α nicht gleich zu sein.¹⁾

Zum Vergleich sind in Tab. VI die erhaltenen Zahlen für α und λ/α mit den Resultaten von Kirchhoff und Hansemann²⁾, Lorenz³⁾, Jäger und Diesselhorst⁴⁾ zusammengestellt. Die von den Beobachtern gebrauchten Bezeichnungen für die Metalle sind mit angegeben. Sämtliche Zahlen sind auf die bisher benutzten Einheiten [cm, g, sec und g-Cal. (18°)] und auf die Temperatur 18° umgerechnet, indem bei nötigen Interpolationen eine lineare Aenderung von α und λ/α mit der Temperatur angenommen ist.

Tabelle VI.

Nr.	Bezeichnung des Materiales	$\alpha \cdot 10^5$ (18°)	$\frac{\lambda}{\alpha} \cdot 10^{-1}$ (18°)	Beobachter
1	FeWA 14	9,89	173	Gr.
2	Eisen	9,70	176	L.
3	„ I	8,36	191	J. u. D.
4	„ II	7,17	199	J. u. D.
5	„ I	7,13	199	K. u. H.
6	„ III	6,90	200	K. u. H.
7	FeWA 3	6,12	201	Gr.
8	FeWA 2	6,00	203	Gr.
9	FeWA 4	5,51	216	Gr.
10	Stahl	5,02	218	J. u. D.
11	Eisen II	4,27	225	K. u. H.
1	{ Kupfer II gegossen }	55,3	158	J. u. D.
2	{ Kupfer III gezogen }	57,2	160	J. u. D.
3	RCu	57,4	163	Gr.
4	Kupfer	43,6	167	L.
5	„	25,3	164	K. u. H.
6	CuAs 1	19,1	178	Gr.
7	CuAs 2	5,03	198	Gr.

1) Vgl. auch W. Jäger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 724.

2) G. Kirchhoff u. G. Hansemann, Wied. Ann. 13. p. 417. 1881.

3) L. Lorenz, Wied. Ann. 13. p. 598. 1881.

4) W. Jäger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 726.

Tab. VI bestätigt den oben ausgesprochenen Satz für Eisen vollständig, auch für Kupfer ist er ziemlich erfüllt. Die Abweichungen bei Nr. 1 bis 3 können hier kaum in Betracht kommen. Dagegen fällt das von Kirchhoff und Hansemann untersuchte Kupfer aus der Reihe der übrigen heraus. Zwei mögliche Gründe hierfür ergeben sich aus der Abhandlung von Kirchhoff und Hansemann: Der von ihnen untersuchte Kupferwürfel war phosphorhaltig und sehr wenig homogen, wie das die sorgfältige Prüfung des elektrischen Leitvermögens zeigte. Deshalb konnte nach ihrer eigenen Angabe¹⁾ das Verhältnis der Leitfähigkeiten für Wärme und Elektrizität nicht mit der gewünschten Sicherheit für ein und dasselbe Metallstück bestimmt werden. Es ist zweitens nicht ausgeschlossen, dass in der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit für das Kupfer ein Fehler liegt. Kirchhoff und Hansemann nehmen an²⁾, dass die Temperatur in der vom Wasser bespülten Endfläche durch die Gleichung

$$\vartheta = C + \varphi(t)$$

gegeben sei, wo die Zeitfunction $\varphi(t)$ als unendlich klein betrachtet werden dürfe. Nun ist aber nach der in der Figur (Curve 0_b) gegebenen Darstellung für gute Leiter $\varphi(t)$ auch bis zu grösseren Werten von t hin durchaus nicht klein gegen C . Ob die wegen der Annahme, dass $\varphi(t)$ klein sei, vernachlässigten Glieder auf die Berechnung einen erheblichen Einfluss haben könnten, ist nicht leicht zu ersehen.

Le Chatelier³⁾ hat den Einfluss verschiedener Beimengungen auf das elektrische Leitvermögen des Eisens quantitativ zu bestimmen versucht. Er fand, dass ein Gehalt an Si das Leitvermögen stärker herabdrückt als ein gleicher Gehalt an C oder Mn. Dadurch erklärt sich die Aehnlichkeit der beiden Eisensorten FeWA2 und FeWA3, die sehr verschiedene Mengen von Kohlenstoff enthalten.⁴⁾ Wäre nämlich der Einfluss der drei Bestandteile C, Si, Mn gleich, wenn sie in gleichen Mengen vorhanden sind, so würde die Erniedrigung

1) G. Kirchhoff u. G. Hansemann, Wied. Ann. **13**, p. 416. 1881.

2) l. c. **9**, p. 16. 1880.

3) H. Le Chatelier, Compt. rend. **126**, p. 1709. 1898.

4) Vgl. Tab. V.

des Leitvermögens proportional dem Gesamtgehalt an C, Si, Mn sein. Dieser ist für FeWA2 bedeutend kleiner als für FeWA3 (0,90 gegen 1,17 Proc.). Da aber Si einen stärkeren Einfluss hat als C und ausserdem in FeWA2 mehr Phosphor und Schwefel enthalten ist, die freilich von geringerer Bedeutung sind, so erklärt sich die Gleichheit der Leitvermögen beider Eisensorten in befriedigender Weise. Das Verhältnis der beobachteten elektrischen Leitvermögen der vier Eisenstäbe FeWA14, 2, 3 und 4 ist

$$1 : 0,617 : 0,619 : 0,557.$$

Das entsprechende Verhältnis berechnet sich aus den Zahlenangaben von Le Chatelier, wenn man den Einfluss von Phosphor-, Schwefel- und Kupfergehalt vernachlässigt, wie folgt:

$$1 : 0,631 : 0,601 : 0,496.$$

Der Stab FeWA4 erwies sich übrigens bei der Bohrung der Löcher als bedeutend härter, wie die anderen.

Zum Schluss möchte ich auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Warburg, für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und die mir stets entgegengebrachte freundliche Teilnahme meinen herzlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 24. Juni 1900.)