**VIII. Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichterem durchsichtigen Medium befindlichen, sowie eines durch eine sogenannte planparallele Platte betrachteten Lichtpunktes;
von K. L. Bauer in Karlsruhe.**

In einem der neusten Hefte der Schlömilch'schen Zeitschrift f. Math. u. Phys., 19. Jahrg., S. 176 bis 180, hat Hr. Ludwig Matthiessen „elementare Beweise zweier bekannten Theoreme aus der Optik“ mitgetheilt. Eins derselben bezieht sich auf die durch die Lichtbrechung verursachte scheinbare Ortsänderung eines in einem dichterem Medium befindlichen Körpers. „Dieser bekannte Erfahrungssatz“, bemerkt Hr. Matthiessen, „dürfte wohl kaum in irgend einem Lehrbuche der Physik fehlen; dagegen wird der mathematische Beweis desselben merkwürdigerweise überall vermist. Der wahre Sachverhalt ist wohl von vornherein nicht so evident, daß derselbe keines Beweises bedürfte usw.“. — Der angeführten, wohl begründeten Bemerkung habe ich meinerseits beizufügen, daß sehr viele größere und kleinere physikalische Lehrbücher ein noch weit härterer Tadel trifft, indem sie geradezu gänzlich unrichtigen Ansichten über die erwähnte scheinbare Ortsveränderung Vorschub leisten; unten im Abschnitt V mehr darüber!

Das in Rede stehende Problem ist, um gleich von vornherein den eigentlichen Charakter desselben zu bezeichnen, nur ein specieller Fall der allgemeinen Aufgabe über die *Bestimmung der kaustischen Linie* oder *Brennlinie*. Ist in einer Ebene eine beliebige Curve und ein Punkt gegeben, und sendet der letztere in stetiger Folge Strahlen nach der Curve, die den Gesetzen der Optik gemäß reflectirt oder gebrochen werden, so bestimmen die reellen, oder virtuellen Schnittpunkte je zweier successiven zurückgeworfenen, oder gebrochenen Strahlen eine neue Linie, die

Einhüllende oder *Envelope* dieser Strahlen, welche von den letzteren *tangirt* wird, und die *katakaustische* oder *diakaustische* Linie heisst; sie lässt sich durch Bestimmung der von beiden Curven begrenzten Strecke eines reflectirten oder gebrochenen Strahles ermitteln. Das Problem hat ein Alter von nahe zwei Jahrhunderten, und am Schlusse dieses Aufsatzes soll die Geschichte desselben in Erinnerung gebracht werden.

Den besonderen Fall, wo die brechende Linie eine *Gerade* ist, findet man unter andern behandelt in Schlömilch's Compendium der höhern Analysis, 2. Aufl. Bd. I, S. 132—133; treten die gebrochenen Strahlen in ein optisch dünneres Medium über, so ist die Einhüllende derselben eine *Ellipsenevolute*. Das in der Analysis zur Bestimmung einer Enveloppe übliche Verfahren ist indessen überall da, wo nur Elementarmathematik verwandt werden darf, schlechterdings unbrauchbar.

Hr. Matthiessen, der sich mit dem gleichen Falle befasst, unterlässt es, Namen und Charakter der Diakaustik genau festzustellen; sein Verfahren ist übrigens mit der auf den allgemeinen Fall angewandten Methode Klügel's (math. Wörterb., Art. Diacaustica, S. 752 etc.) im wesentlichsten Theile identisch; nur die Bezeichnungen weichen durchgängig von einander ab:

Klügel:	ω	φ	$d\omega$	$d\varphi$	ds	z	u	m	n .
Matthiessen:	v	u	δ'	δ	l	r	ρ	c_1	c_2 .

Ich glaubte, auf das Factum hinweisen zu müssen, ohne indessen Hrn. M., der in seiner Mittheilung keinerlei Quelle citirt, irgend einen Vorwurf machen zu wollen.

Lang bevor mir H. Matthiessen's Aufsatz zu Gesicht kam, hatte ich mich ebenfalls mit dem gleichen Specialfalle befasst, der für die Physik in mehrfacher Beziehung von erheblicher Wichtigkeit, leider aber nicht wenig Physikern nur höchst unvollkommen, oder gar nicht bekannt ist, wozu unten schlagende Beweise folgen. Erst die schönen Herbstferien setzten mich in den Stand, meine

Arbeit in eine zur Veröffentlichung geeignete Form zu bringen. Die von mir eingeschlagene Methode, bei welcher auch die Elementarmathematik genügt, ließ mich zu einer sehr vollständigen Lösung der Aufgabe und zu ganz präzisen *Gesetzen* über die scheinbare Ortsänderung gelangen; möchten dieselben im Kreise der Fachgenossen, welchen ich diesen kleinen Beitrag zur Förderung der Erkenntniß hiermit vorlege, freundliche Beachtung finden!

I.

Bestimmung des scheinbaren Ortes eines in einem dichteren Medium befindlichen Lichtpunktes.

In einem dichteren Medium, z. B. *Wasser*, befinde sich ein leuchtender Punkt *P* (Fig. 5 Taf.) IV; die Zeichnungsebene sei vertical durch diesen Punkt und ein denselben betrachtendes Auge gelegt; *BG* sei die horizontale Gränzlinie zwischen Wasser und Luft; der wahre Abstand des leuchtenden Punktes von der Oberfläche sey $PO = h$. Ein beliebiger von *P* ausgesandter Strahl treffe die Gränze beider Medien unter dem Einfallswinkel β und werde unter dem Winkel α gebrochen; ein zweiter benachbarter Strahl bilde die entsprechenden Winkel β' und α' , so daß die beiden Strahlen im Wasser unter dem Winkel $(\beta' - \beta)$, in der Luft unter dem Winkel $(\alpha' - \alpha)$ divergiren. Passiren die gebrochenen Strahlen beide die Pupille eines Auges, so entsteht in *M* ein virtuelles *Bild* des Punktes *P*; da indessen gleichzeitig noch unzählige andere benachbarte Strahlen, welche nicht sämmtlich genau vom nämlichen Punkte zu kommen scheinen, die Netzhaut treffen, so wird das Bild niemals vollkommen scharf seyn; die Schärfe wird auf Kosten der Helligkeit zunehmen, wenn man das Auge von der Gränze der Medien entfernt, oder mit einem Diaphragma versieht, d. h. wenn man durch eine feine Oeffnung schaut. Schon der bloße Anblick der Figur lehrt, daß die scheinbare Ortsänderung sich aus einer verticalen und einer horizontalen Componente zusammensetzt, und daß nicht bloß die erstere, sondern auch die

letztere eine Annäherung gegen das beobachtende Auge hin bewirkt.

Behufs genauer Feststellung dessen wählen wir O zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, OA zur Axe der positiven x , und OG zur Axe der positiven y . Bei Benutzung einiger durch die Figur leicht verständlichen Bezeichnungen existiren dann für die Ermittlung der Coordinaten des Punktes M folgende Relationen:

$$1) \quad y + u + v = h \cdot \tan \beta'$$

$$2) \quad y + u = h \cdot \tan \beta$$

$$3) \quad u + v = x \cdot \tan \alpha'$$

$$4) \quad u = x \cdot \tan \alpha.$$

Verbindet man sowohl die beiden ersten, als die beiden letzten dieser Gleichungen durch Subtraction, so erhält man zwei Ausdrücke für v , und durch Gleichsetzung derselben eine zur Bestimmung von x geeignete Relation:

$$v = h (\tan \beta' - \tan \beta) = x (\tan \alpha' - \tan \alpha).$$

$$5) \quad x = h \cdot \frac{\tan \beta' - \tan \beta}{\tan \alpha' - \tan \alpha} = h \cdot \frac{\cos \alpha' \cos \alpha \cdot \sin (\beta' - \beta)}{\cos \beta' \cos \beta \cdot \sin (\alpha' - \alpha)}.$$

Der geometrische Sinn der Winkeldifferenzen $(\beta' - \beta)$ und $(\alpha' - \alpha)$ wurde bereits oben angegeben. Nach der Bestimmung von x folgt auch sofort ein Ausdruck für y , indem man die Gleichungen 1) und 3) durch Subtraction verbindet.

$$6) \quad y = h \cdot \tan \beta' - x \cdot \tan \alpha'.$$

Wegen der kleinen Oeffnung der Pupille haben wir jetzt zu untersuchen, welchen Grenzwerten sich die Coordinaten des Punktes M nähern, wenn β' in β , und α' daher in α übergeht; dabei stellen sich Differentiale und Differentialquotienten ein;

$$\lim. \frac{\tan \beta' - \tan \beta}{\tan \alpha' - \tan \alpha} = \frac{d \tan \beta}{d \tan \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{d \beta}{d \alpha}.$$

$$\lim. \frac{\sin (\beta' - \beta)}{\sin (\alpha' - \alpha)} = \lim. \left\{ \frac{\frac{\sin (\beta' - \beta)}{\beta' - \beta}}{\frac{\sin (\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha}} \cdot \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \right\} = \frac{1}{1} \cdot \frac{d \beta}{d \alpha}.$$

Die gewünschten Gränzwerthe sind demnach die folgenden:

$$7) x = h \cdot \frac{d \tan \beta}{d \tan \alpha} = h \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{d \beta}{d \alpha}.$$

$$\begin{aligned} 8) y &= h \cdot \tan \beta \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \cdot \frac{d \beta}{d \alpha} \right) \\ &= h \cdot \tan \beta \left(1 - n \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{d \beta}{d \alpha} \right), \end{aligned}$$

wobei n den auf Luft bezogenen Brechungsexponenten des dichteren Mediums bedeutet. Zur Bestimmung des Differentialquotienten $d\beta : d\alpha$ dient die Gleichung

$$\sin \alpha = n \sin \beta;$$

der Verfasser hat bereits vor mehreren Jahren in einem Aufsatze über die Brechung des Lichts, Bd. 131 dieser Annalen, Ausdrücke für den genannten und ähnliche Differentialquotienten bekannt gemacht, die unterdessen Beachtung gefunden haben (vergl. Dr. H. Emsmann, sechszehn mathem. phys. Probleme, Leipzig 1869, und P. Münch, Lehrb. d. Phys., Freiburg i. Br. 1873), und welche auch hier wieder vortreffliche Dienste leisten:

$$n \cdot \frac{d \beta}{d \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = n \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \sqrt{1 - (n^2 - 1) \tan^2 \beta}$$

Nach Einführung dieser Ausdrücke stellen sich die Gränzwerthe der Coordinaten von M unter folgenden Formen dar:

$$9) x = \frac{h}{n} \left(n \frac{d \beta}{d \alpha} \right)^3 = \frac{h}{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^3 = \frac{h}{n} \{ 1 - (n^2 - 1) \tan^2 \beta \}^{\frac{3}{2}}.$$

$$10) y = h \cdot \tan \beta \left\{ 1 - \left(n \cdot \frac{d \beta}{d \alpha} \right)^2 \right\} = h (n^2 - 1) \tan^3 \beta.$$

Diese Darstellungen von x und y als Functionen von h , n und β dürften schwerlich etwas zu wünschen übrig lassen, da sie die Gesetze der scheinbaren Ortsänderung mit vollkommener Genauigkeit und Klarheit anzeigen.

II.

Gesetze der scheinbaren Ortsveränderung.

1) Die zur Trennungsfläche der Medien normale Verschiebungscomponente $\xi = h - x$, und die dieser Fläche parallele Verschiebungscomponente oder Tangentialcomponente y sind beide dem Abstände h des leuchtenden Punktes von der Gränzfläche der Medien direct proportional.

2) Beide Verschiebungscomponenten wachsen gleichzeitig mit dem auf Luft bezogenen Brechungsexponenten des dichteren Mediums, und zwar ist die Tangentialcomponente y proportional der brechenden Kraft $(n^2 - 1)$ des dichteren Mediums.

3) Beide Verschiebungscomponenten wachsen gleichzeitig mit dem Einfallswinkel β , und zwar ist die Tangentialcomponente y dem Kubus der Tangente des Einfallswinkels proportional.

4) Die Componenten bewirken beide eine scheinbare Annäherung des leuchtenden Punktes gegen das ihn betrachtende Auge.

Hat β seinen Minimalwerth, $\beta = 0$, befindet sich also in Fig. 1 das Auge vertical über dem leuchtenden Punkte P , so ist auch die scheinbare Normal- und Tangentialverschiebung des letzteren möglichst klein:

$$\xi_0 = h - x_0 = h - \frac{h}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) h, = \frac{1}{4} h \text{ für Wasser.}$$

$$y_0 = 0.$$

Der scheinbare Ort des im Wasser gedachten Punktes P ist für diesen Fall in der Figur mit N bezeichnet; nur in diesem einzigen Falle besteht die Ortsänderung in einer bloßen Hebung, ohne Horizontalverschiebung. Auf die bemerkenswerthe einfache Beziehung

$$n = \frac{h}{x_0} = \frac{h}{h - \xi_0}$$

gründete i. J. 1767 der Duc de Chaulnes eine Methode zur näherungsweise Bestimmung der Brechungsexponenten; doch ist dieselbe nach Hrn. Quincke's Untersuchung

(diese Ann. Bd. 132, S. 220) nicht sehr genau, und fallen besonders bei kleinem Objectabstand oder starker Vergrößerung die Werthe von n zu groß aus.

Erreicht β sein Maximum, den sog. Gränzwinkel γ , der durch die Gleichung

$$\sin \gamma = \frac{1}{n}, \text{ oder } \tan \gamma = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

bestimmt ist, so resultiren auch die Maxima der Verschiebungscomponenten:

$$\xi_\gamma = h - x_\gamma = h - 0 = h.$$

$$y_\gamma = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} = h \cdot \tan \gamma = OG \text{ in Fig. 5 Taf. IV.}$$

Befindet sich demnach das Auge in gleicher Höhe mit der Wasseroberfläche und fängt es die streifend austretenden Strahlen auf, so erscheint Punkt P sowohl im verticalen als horizontalen Sinne am beträchtlichsten *gegen das Auge hin* verschoben; P erscheint in G , also in der Trennungsfläche der Medien und genau an der Stelle, an welcher der Strahl unter dem Gränzwinkel einfällt und streifend gebrochen wird. Für Wasser ist:

$$y_\gamma = h \cdot \tan (48^\circ 35') = 1,1336 h.$$

Liefse sich y_γ mit ziemlicher Sicherheit experimentell bestimmen, so besäße man eine weitere Vorschrift zur näherungsweise Ermittlung des Brechungsexponenten, indem:

$$n = \sqrt{1 + \cot^2 \gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{y_\gamma}\right)^2}.$$

Diese Gleichung kann auch als specieller Fall der leicht zu beweisenden Formel

$$n = \sin \alpha \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h}{e}\right)^2}$$

betrachtet werden, worin e die gegenseitige Entfernung der beiden Einfallslothe eines eine planparallele Platte passirenden Strahles bedeutet, da für $\alpha = 90^\circ$ die Größe e

mit y , gleichbedeutend ist; vergl. diese Ann. Bd. 97, S. 141 etc.

Bewegt sich ein Auge dergestalt, daß es nach und nach alle gebrochenen Strahlen auffängt, die unter Winkeln von $\beta = 0$ bis $\beta = \gamma$ eingefallen waren, so beschreibt Punkt P scheinbar eine gegen die Trennungsfläche der Medien convex liegende *Curve* von N durch M (dieser Punkt ist in der Figur wegen zu großer Verschiedenheit von β' und β nicht ganz genau) nach G ; über die genauere Beschaffenheit dieser *Curve* geben unsere Entwicklungen klaren Aufschluß.

III.

Die Einhüllende der gebrochenen Strahlen.

Die Gleichung der bezeichneten *diakaustischen Linie*, der *Einhüllenden* der gebrochenen Strahlen, ergibt sich sogleich, wenn wir aus den für die Coordinaten x und y gefundenen Ausdrücken den Einfallswinkel β eliminiren; wir erhalten:

$$(n^2 - 1) \tan^2 \beta = 1 - \left(\frac{n}{h} x\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{h} y\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\left(\frac{x}{h:n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{h:\sqrt{n^2-1}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{h \sin \gamma}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{h \tan \gamma}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{y_\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{ON}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{OG}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Diese Gleichung beweist, daß die fragliche Diakaustik die *Evolute* (Ort der Krümmungsmittelpunkte) *einer Ellipse* ist, daß mithin die gebrochenen Strahlen sämtlich auf einer gewissen Ellipse senkrecht stehen, während sie deren Evolute berühren. Zur genauen Feststellung dieser Ellipse, der *orthogonalen Transversale* der gebrochenen Strahlen, ist folgendes zu bemerken. Bedeutet, wie gewöhnlich:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Mittelpunkts Gleichung einer Ellipse, und

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

die Gleichung der zugehörigen Evolute, so bestehen die Relationen:

$$a^2 - b^2 = a a_1 = b b_1, \text{ woraus } a_1 : b_1 = b : a.$$

In unserm besondern Falle ist:

$$a_1 = h \cdot \sin \gamma; \quad b_1 = h \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

$$a_1 : b_1 = \cos \gamma = b : a; \quad b = a \cos \gamma.$$

$$a^2 - b^2 = a^2 \sin^2 \gamma = a h \sin \gamma.$$

$$a = h : \sin \gamma = h \cdot n = OA.$$

$$b = h : \operatorname{tg} \gamma = h \cdot \sqrt{n^2 - 1} = OB.$$

$$a a_1 = b b_1 = a^2 - b^2 = h^2 = (OP)^2.$$

Hieraus folgt, daß $h = OP$ die *lineare Excentricität*, und der leuchtende Punkt P selbst ein *Brennpunkt* der Ellipse ist; die Halbachsen derselben sind in Fig. 6 Taf. IV construirt:

$$PX = h : \sin \gamma = a; \quad PY = h : \operatorname{tg} \gamma = b;$$

den betreffenden Ellipsenquadranten zeigt Fig. 5 Taf. IV.

IV.

Elementare Entwicklung der Coordinaten.

Wir erhielten oben in I auf ganz elementarem Wege die Resultate:

$$5) \quad x = h \cdot \frac{\cos \alpha' \cos \alpha \sin(\beta' - \beta)}{\cos \beta' \cos \beta \sin(\alpha' - \alpha)}$$

$$6) \quad y = h \cdot \operatorname{tg} \beta' - x \cdot \operatorname{tg} \alpha'$$

Geht nun β' in β , und daher α' in α über, so nimmt der Quotient $\sin(\beta' - \beta) : \sin(\alpha' - \alpha)$ die unendlich vieldeutige Form $0 : 0$ an, weshalb es einer besondern Ermittlung des wahren Werthes bedarf. Zu diesem Zwecke wollen wir

$$\beta' = \beta + \Delta \beta; \quad \alpha' = \alpha + \Delta \alpha$$

setzen, dann wird:

$$\frac{\sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \frac{\sin \Delta \beta}{\sin \Delta \alpha}.$$

Verbindet man die Gleichungen:

$$\sin \alpha = n \sin \beta; \sin(\alpha + \Delta \alpha) = n \sin(\beta + \Delta \beta)$$

durch Subtraction, so folgt:

$$\sin(\alpha + \Delta \alpha) - \sin \alpha = n \{ \sin(\beta + \Delta \beta) - \sin \beta \}.$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\Delta \alpha}{2}\right) \sin \frac{\Delta \alpha}{2} = n \cos\left(\beta + \frac{\Delta \beta}{2}\right) \sin \frac{\Delta \beta}{2}.$$

$$\frac{\sin \frac{\Delta \beta}{2}}{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}} = \frac{1}{n} \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\Delta \alpha}{2}\right)}{\cos\left(\beta + \frac{\Delta \beta}{2}\right)}.$$

Convergiren jetzt $\Delta \beta$ und $\Delta \alpha$ gegen Null, so erhält der Quotient links den Gränzwert:

$$\lim. \frac{\sin \frac{\Delta \beta}{2}}{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}} = \frac{0}{0} = \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Genau gegen denselben Werth convergirt aber bei verschwindendem $\Delta \beta$ und $\Delta \alpha$ der ähnliche Quotient:

$$\frac{\sin \Delta \beta}{\sin \Delta \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \frac{\Delta \beta}{2}}{2 \sin \frac{\Delta \alpha}{2} \cos \frac{\Delta \alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\Delta \beta}{2}}{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\Delta \beta}{2}}{\cos \frac{\Delta \alpha}{2}},$$

da $\lim. \left\{ \cos \frac{\Delta \beta}{2} : \cos \frac{\Delta \alpha}{2} \right\} = 1 : 1 = 1$. Setzt man noch:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta} = \sqrt{\cos^2 \beta - (n^2 - 1) \sin^2 \beta},$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \sqrt{1 - (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \beta},$$

so erhält man, ohne von der Differentialrechnung Gebrauch gemacht zu haben, die Grenzwerte der Coordinaten wie oben:

$$9) \ x = \frac{h}{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^3 = \frac{h}{n} \{ 1 - (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \beta \}^{\frac{3}{2}}.$$

$$10) \ y = h \operatorname{tg} \beta \left\{ 1 - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 \right\} = h (n^2 - 1) \operatorname{tg}^3 \beta.$$

Und hieran lassen sich die in II mitgetheilten Gesetze und Specialfälle, sowie die in III vorgenommene Elimination von β anschließen.

V.

Experimentelle Bestätigung; Kritisches.

Um mich von der oben entwickelten scheinbaren Ortsveränderung experimentell zu überzeugen, stellte ich eine cylindrische, etwa 23^{cm} weite und 11^{cm} tiefe Glasschale auf ein passendes Stativ und füllte sie bis an den Rand mit klarem Wasser; an eine dem beobachtenden Auge ziemlich entlegene, mit einer undurchsichtigen Platte bedeckte Stelle des Gefäßbodens brachte ich als leuchtendes Object einen Quecksilbertropfen (auch ein goldenes Hemdenknöpfchen und dergl. würde sich eignen); falls es nöthig erscheint, kann das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme durch Spiegel oder Linse auf den Gegenstand concentrirt werden. Bei der Beobachtung wird am besten das eine Auge geschlossen; senkt sich nun das schauende Auge allmählich bis in die Ebene des Flüssigkeitsspiegels, so bemerkt man deutlich nicht bloß eine stets zunehmende verticale Erhebung, sondern auch eine gleichzeitig zunehmende Horizontalverschiebung des leuchtenden Punktes *gegen das Auge hin*, so daß schließlicb das Object in der Flüssigkeitsoberfläche selbst, und bedeutend gegen das Auge vorgeschritten, zu glänzen scheint, ganz wie die Theorie es verlangt.

In unsern Physikbüchern sieht es aber hinsichtlich des besprochenen Themas fürwahr traurig aus, und damit es besser hierin werde, will ich jetzt einige Schäden aufdecken:

1) Mousson, Physik II, 2, 1872, S. 304, Fig. 407, nimmt ohne Begründung an, die Verschiebung geschehe *nur* in normaler Richtung und gelangt auf Grund dieser unrichtigen Voraussetzung zu dem ebenfalls unrichtigen, und zwar zu großen Resultate: $x = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$; der richtige Werth ist nach dem Obigen: $x = \frac{h}{n} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^3$.

2) Viele Verfasser geben zwar auch eine Tangentialverschiebung zu, aber nach der illustrirenden Figur zu

schließen, würde diese Componente eine scheinbare *Entfernung* des leuchtenden Punktes vom Auge bewirken, während es sich doch in Wahrheit gerade umgekehrt verhält. In diese Kategorie gehören unter andern:

1866; A. Wüllner, Lehrbuch I. 2, S. 675, Fig. 33.

1867; J. Crüger, Lehrbuch I. 2, S. 267, Fig. 229.

1868; J. Müller, Lehrbuch I., S. 535, Fig. 604.

1869; J. Riedel, Grundzüge, S. 148, Fig. 47.

1869; J. Schabus, Grundzüge, S. 320, Fig. 417.

1870; J. Crüger, Grundzüge, S. 145, Fig. 136.

1870; G. Krebs, Lehrbuch, S. 94, Fig. 116.

1871; J. Frick, Anfangsgründe, S. 103, Fig. 128.

1871; C. Bänitz, Lehrbuch, S. 117, Fig. 128.

1872; A. F. Weinhold, Vorschule, S. 286, Fig. 258.

1873; E. Jochmann, Grundrifs, S. 133, Fig. 141.

3) Manche Autoren scheinen in dem Irrthum befangen, daß in dem besondern Falle, wo die Verbindungsstrecke des Auges mit dem leuchtenden Punkte senkrecht zur Grenzfläche der Medien steht, eine scheinbare Ortsänderung des Lichtpunktes *überhaupt nicht vorhanden sey*; so sagen a. a. O.:

Krebs, S. 94: „Daher kommt es, daß ein Bach nicht so tief erscheint, wenn man *schief* in denselben hineinblickt.“

Frick, S. 104: „Daher scheint das Wasser beim *schiefen* Hineinsehen immer weniger tief, als es wirklich ist.“

In Wirklichkeit jedoch ist beim senkrechten Hineinschauen bloß die der Trennungsfläche beider Medien parallele Verschiebungscomponente $y_0 = 0$, während die Normalcomponente zwar auch ihren kleinsten, keineswegs aber den Werth Null hat, indem nach dem Obigen $\xi_0 = h - x_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)h$. Der Grund eines klaren Gewässers von 1 Meter Tiefe erscheint bei senkrechtem Hineinschauen um $\frac{1}{4}$ Meter, bei schiefer Ansicht um noch mehr zu hoch.

Eine rühmliche Ausnahme macht Harting in seinem trefflichen Buche über das Mikroskop, 1866 Bd. I, S. 19, Fig. 15, obgleich er die Tangentialverschiebung nicht zum Gegenstand der Untersuchung macht; die nämliche Figur nebst sehr ähnlichem Texte findet sich in dem im gleichen Verlage erschienenen Dippel, das Mikroskop, 1867, I, S. 31 u. 32. Bei Harting ist auch zu beachten I, S. 155 (über den Einfluß der Deckplättchen) und II, S. 268 (mikroskopische Dickenmessung), insbesondere S. 271 bis 274. Von dem gleichfalls gerühmten Buche der Autoren Nägeli und Schwendener konnte ich bis jetzt leider noch nicht Einsicht nehmen.

VI.

Bestimmung des scheinbaren Ortes eines durch eine planparallele Platte angeschauten Lichtpunktes.

Unsere bisherigen Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit noch verallgemeinern. Nehmen wir an, es sey ein durchsichtiges Medium, dichter als Luft, zwischen ebenen parallelen Flächen eingeschlossen und ringsum von Luft umgeben. *Außerhalb* dieser planparallelen Platte befinde sich ein leuchtender Punkt P in den Abständen k von der ersten, und $(k + h)$ von der zweiten Begrenzungsfläche, so daß h die Plattendicke bedeutet; vergl. die genau der Fig. 5 Taf. IV entsprechende Fig. 7 Taf. IV. Ein jenseits der zweiten Begrenzungsfläche befindliches Auge fange diejenigen der von P ausgesandten Strahlen auf, welche nach Durchwanderung der Platte unter dem Brechungswinkel α und äußerst wenig davon verschiedenen Winkeln wieder in Luft austreten; dann wird Punkt P in M erblickt, und es handelt sich jetzt darum, diesen scheinbaren Ort genau zu bestimmen. Behalten wir die bisherige Bezeichnung bei, so bedürfen nur zwei der in I aufgestellten vier ersten Gleichungen einer einfachen Modification; denn in Fig. 7 ist:

$$1) y + u + v = h \cdot \operatorname{tg} \beta' + k \cdot \operatorname{tg} \alpha'$$

$$2) y + u = h \cdot \operatorname{tg} \beta + k \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$3) u + v = x \cdot \operatorname{tg} \alpha'$$

$$4) u = x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Und hieraus ergibt sich:

$$v = h(\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) + k(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) = x \cdot (\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha).$$

$$5) x - k = h \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\xi = (h + k) - x = h - (x - k).$$

$$6) y = h \cdot \operatorname{tg} \beta' - (x - k) \cdot \operatorname{tg} \alpha'.$$

Diese einfachen Resultate unterscheiden sich mithin von den in I. erhaltenen einfach dadurch, *dass jetzt $(x - k)$ an die Stelle des frühern x getreten ist; die beiden Verschiebungskomponenten ξ und y sind von der Gröfse k völlig unabhängig und blofs Functionen von h , n und α oder β ; die früher für ξ und y erhaltenen Ausdrücke gelten ganz genau auch hier.*

Um nach der Methode des Duc de Chaulnes den Brechungsexponenten des die planparallele Platte bildenden durchsichtigen Mediums zu bestimmen, ist es also nicht nothwendig, nach Mousson's Angabe (a. a. O. S. 307) die Platte unmittelbar auf den Punkt P zu legen, wonach sich P gewissermaßen auf dem Grunde des dichtern Mediums befindet; denn hat P den willkürlichen Abstand k von der Platte, so erhält man:

$$n = \frac{h}{x_0 - k} = \frac{h}{(h + k - \xi_0) - k} = \frac{h}{h - \xi_0}.$$

Jedenfalls aber ist die Platte senkrecht zur optischen Axe des Mikroskops zu stellen.

VII.

Geschichtliches.

Betreffs der ältesten Geschichte der kaustischen Linie halte ich mich an das Referat von Klügel (math. Wörterb. 1803, Art. Brenmlinie, S. 352 usw.).

Die Untersuchung über den *Durchschnittspunkt* zweier successiven zurückgeworfenen, oder gebrochenen Strahlen hat zuerst Isaac Barrow, Newton's Vorgänger in der

Professur der Mathematik zu Cambridge, angestellt (*Lectiones opticae* 1669, VI bis XIII). Sein Zweck war, die Stelle zu suchen, wo das Bild eines gegebenen Punktes liegt, den ein Auge durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen erblickt. Das Bild setzt er um den Durchschnittspunkt zweier nächsten Strahlen, den Grenzpunkt der Durchschnitte einander naher Strahlen, und zwar um den Punkt herum, weil die Augenöffnung einen gewissen Durchmesser hat. Barrow kam aber noch nicht auf die Betrachtung der Linie, welche die Reihe aller Bilder oder Grenzpunkte der Durchschnitte enthält.

Huyghens ist der erste, der die Entstehung der *Brennlinien* angegeben hat, doch nur für den Halbkreis und für auffallende Parallelstrahlen (*Traité de la lumière*, Ch. 6, verfaßt 1678, herausgeg. 1690; *Opera reliqua*, Vol. I). Von der Brennlinie durch Brechung begnügt sich H. zu bemerken, daß man jeden Punkt derselben mittelst eines von Barrow vorgetragenen Lehrsatzes finden könne, und daß sie rectificabel ist; denn er wendet sie eigentlich zur Erläuterung seiner Theorie vom Lichte und der Bewegung der Lichtwellen an. Ebenso behandelt er die Brennlinie durch Zurückwerfung; er zeigt nur an, wie jeder ihrer Punkte gefunden wird, bemerkt, daß sie eine Art Cykloide ist, und giebt ihre Länge, sowie den zwischen ihr und dem Halbkreise enthaltenen Flächenraum an.

Ehe diese Lehrsätze bekannt gemacht wurden, versuchte Tschirnhausen die Brennlinie durch Zurückwerfung paralleler Strahlen von einem Halbkreise zu bestimmen; daß seine Construction (*Act. Erud.* 1682) unrichtig ist, erwiesen de la Hire (1686) und Joh. Bernoulli (1692).

Die Analysten verfolgten die von Tschirnhausen und Huyghens angefangene Untersuchung eifrig und waren bald damit zu Stande. Jacob Bernoulli gab in den *Act. Erud.* 1692 eine allgemeine Formel, die Länge des zurückgeworfenen Strahls bis an die Brennlinie mit-

telst des Krümmungshalbmessers zu bestimmen. Er gab eine Construction, den Punkt der Diakaustika auf einem gegebenen Strahle zu finden (*Act. Erud.* 1693, *Curvae diacausticae earumque relatio ad evolutas*; *Op. T. I* No. 49, 56, womit noch *T. II* No. 103, *Art. 17* zu verbinden ist). Die Benennungen *Katakaustika* und *Diakaustika* rühren von ihm her.

Sein Bruder Johann Bernoulli gab eine algebraische Gleichung für die Brennnlinie durch Zurückwerfung vom Kreise (*Act. Erud.* 1692, *Op. T. I* No. 6) und handelte die ganze Materie von beiden Arten Brennnlinien ausführlich ab in den *Lectiōibus Hospitalianis* XXVI—XXXII, und LVI—LVIII. In der *Analyse des infiniment petits* (1696) des Marquis de l'Hospital ist sie mit großer Deutlichkeit vorgetragen; (nach J. C. Poggendorff, Handwörterbuch, haben erst spätere Schriftsteller die Schreibweise l'Hôpital angenommen).

Zu vergl. ist auch Klügel, math. Wörterb. I, Art. Diacaustica S. 757—758, sowie bezüglich neuerer Arbeiten die von Grunert i. J. 1833 herausgegebenen Supplemente, Bd. I, Artikel: Caustische Flächen und Linien S. 349—408.

Karlsruhe, 24. August 1874.