6.

Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen.

(Von Herrn Dr. Stern in Göttingen.)

Erste Abhandlung.

1.

Im 9ten Bande dieses Journals (S. 111 u. f.) hat Herr Prof. *Möbius* einige sehr merkwürdige Sätze mitgetheilt, welche sich auf das Verhältniß der Anzahl der Gruppen in den geraden und ungeraden Classen der Variationen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen und zu bestimmten Producten beziehen. Die Untersuchung ist dadurch sehr erleichtert, daß man die Anzahl der Gruppen, die in irgend einer Variationsklasse zu bestimmten Summen vorkommt, leicht angeben kann. Aus diesem Grunde kann man auch einige ähnliche Sätze ohne Schwierigkeit ableiten, wie z. B. folgende. *Bei den Combinationen ohne Wiederholung ist die Anzahl der Gruppen in den geraden Classen um 1 kleiner als die in den ungeraden.* Nennt man nemlich *D* den Unterschied der Anzahl der Gruppen, die in den ungeraden und geraden Classen vorkommen, so hat man für *n* Elemente

$$D = n - \frac{n \cdot n - 1}{2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} - \dots = 1 - (1-1)^n = 1.$$

Ungleich schwieriger wird dagegen die Untersuchung über dieses Verhältniß bei den Combinationen zu bestimmten Summen. Die Frage, wie man die Anzahl der in irgend einer Combinationsklasse vorkommenden Gruppen durch eine allgemeine, unabhängige Formel bestimmen könne, wird in den mir bekannten Werken über Combinationslehre entweder gar nicht berührt, oder es wird bemerkt, daß eine solche Formel nicht vorhanden sei*). In der That kann aber diese Frage sehr einfach beantwortet werden; was ich hier zuerst zeigen will.

*) *Weingärtner* (Lehrbuch der combinatorischen Analysis Th. I. S. 296) sagt sogar, daß sich schwerlich eine solche Formel geben lasse.

2.

Ich bezeichne die Combinationen ohne Wiederholung zur Summe n und zur Classe q durch ${}^n\bar{C}^q$, ihre Anzahl durch ${}^nC^q$; die Anzahl der Combinationen aus allen Classen durch nC ; die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur Summe n und zur Classe q durch ${}^n\bar{C}'^q$, ihre Anzahl durch ${}^nC'^q$; die Anzahl der Combinationen aus allen Classen durch ${}^nC'$. Ferner bezeichne ich durch $\frac{r}{s}$ die grösste ganze Zahl, die in dem Bruche $\frac{r}{s}$ enthalten ist; mithin, wenn $\frac{r}{s}$ selbst eine ganze Zahl ist, so ist $\frac{r}{s} = \frac{r}{s}$; eben so bedeute $\frac{r+r'+r''+\dots}{s}$ die grösste ganze Zahl die in dem Bruche $\frac{r+r'+r''+\dots}{s}$ enthalten ist.

3.

Aus der bekannten Gleichung

$$1. \quad {}^nC'^q = {}^{n-1}\bar{C}'^{q-1} + {}^{n-q}\bar{C}'^q,$$

folgt unmittelbar diese andere

$$2. \quad {}^nC'^q = {}^{n-1}\bar{C}'^{q-1} + {}^{n-q-1}\bar{C}'^{q-1} + {}^{n-2q-1}\bar{C}'^{q-1} + \dots,$$

welche abbricht, sobald man an ein Glied ${}^{n-rq-1}\bar{C}'^{q-1}$ kommt, in welchem $n-rq-1$ Null oder negativ ist. Es ergibt sich sogleich ${}^1\bar{C}'^1 = 1$. Um aber ${}^nC'$ zu finden, hat man bisher zwei Fälle unterschieden, und gerade hierin liegt der Grund, weswegen man keine allgemeine Formel finden konnte. Ist nemlich n eine gerade Zahl, $= 2m$, so hat man ${}^{2m}\bar{C}'^2 = m$; ist dagegen $n = 2m+1$, so hat man ${}^{2m+1}\bar{C}'^2 = m$. Nach der oben angegebenen Bezeichnung dagegen lassen sich diese zwei Fälle in einen zusammenziehen und man hat

$$3. \quad {}^nC'^2 = \frac{n}{2}.$$

Hieraus ergibt sich mittelst der Formel (2)

$$4. \quad {}^nC'^3 = \frac{n-1}{2} + \frac{n-4}{2} + \frac{n-7}{2} \dots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist $\frac{n-(3k+1)}{2}$, und die Reihe bricht ab,

sobald $k = \frac{n-1}{3}$ ist. Drückt man daher den Werth von ${}^nC'$ durch ein combinatorisches Aggregat aus, so hat man

$$5. \quad {}^nC' = \sum_{0, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n - (3k+1)}{2}.$$

Aus dieser Formel ergibt sich der Werth von ${}^nC'$ durch wiederholte Anwendung der Formel (1). Es ist nemlich

$${}^nC' = {}^{n-1}C' + {}^{n-5}C' + {}^{n-9}C' \dots = \sum_{0, \frac{n-1}{4}}^k {}^{n-(4k+1)}C',$$

also

$$6. \quad {}^nC' = \sum_{0, \frac{n-1}{4}}^k \sum_{0, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n - (3k+1) - (4k'+1)}{2}.$$

Eben so findet man

$$7. \quad {}^nC' = \sum_{0, \frac{n-1}{5}}^{k''} \sum_{0, \frac{n-1}{4}}^k \sum_{0, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n - (3k+1) - (4k'+1) - (5k''+1)}{2},$$

und allgemein

$$8. \quad {}^nC' = \sum_{0, \frac{n-1}{q}}^{k_{q-3}} \sum_{0, \frac{n-1}{q-1}}^{k_{q-4}} \dots \sum_{0, \frac{n-1}{4}}^{k'} \sum_{0, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n - (3k+1) - (4k'+1) - (5k''+1) \dots - (qk_{q-3}+1)}{2},$$

welches die gesuchte unabhängige Formel für die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung ist. Statt dieser Formel kann man auch die folgende schreiben :

$$9. \quad {}^nC' = \sum_{0, \frac{n-q+2}{q}}^{k_{q-3}} \dots \sum_{0, \frac{n-q+2}{4}}^{k'} \sum_{0, \frac{n-q+2}{3}}^k \frac{n - q + 2 - 3k - 4k' - \dots - qk_{q-3}}{2}.$$

Soll z. B. die Anzahl der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur sechsten Classe und zur Summe 15 gefunden werden, so hat man

$$\begin{aligned} {}^{15}C' &= \sum_{0,1}^{k'''} \sum_{0,2}^{k''} \sum_{0,2}^{k'} \sum_{0,3}^k \frac{11 - 3k - 4k' - 5k'' - 6k'''}{2} \\ &= \frac{11}{2} + \frac{11-3}{2} + \frac{11-2 \cdot 3}{2} + \frac{11-3 \cdot 3}{2} + \frac{11-4}{2} + \frac{11-8}{2} + \frac{11-(3+4)}{2} \\ &\quad + \frac{11-5}{2} + \frac{11-(3+5)}{2} + \frac{11-(4+5)}{2} + \frac{11-6}{2} + \frac{11-(3+6)}{2} \\ &= 5 + 4 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 = 26. \end{aligned}$$

4.

Bekanntlich kann man auch die Summe der Anzahl der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung, die in mehreren auf einander folgenden Classen, von der ersten an gerechnet, enthalten sind, dadurch finden, daß man sie auf die Anzahl der Combinationen einer einzigen Classe zurückführt, und zwar ist

$$\sum_{1,q}^r {}^nC' = {}^{n+q}C'.$$

mithin kann auch diese Summe auf eine unabhängige Weise gefunden werden. Besonders ist der Fall interessant, wenn man die Anzahl der Combinationen aus allen Classen sucht. Alsdann ist

$$10. \quad {}^nC' = {}^{2n}C' = \sum_{0, \frac{n+2}{n}}^{k_{n-3}} \dots \sum_{0, \frac{n+2}{3}}^k \frac{n+2-3k-4k, \dots, nk_{n-3}}{2}.$$

Da nun, wie bekannt, die Entwicklung des Ausdrucks $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$ eine Reihe giebt, in welcher der zu x^n gehörende Coefficient $= {}^nC'$ ist, so kann vermittelt der Formel (10) das allgemeine Glied dieser Reihe dargestellt werden; was bis jetzt noch unbekannt war.

5.

Es ist nun leicht, auch die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Summe und Classe durch eine unabhängige Formel zu finden. Denn bekanntlich ist

$$11. \quad {}^nC^q = {}^{n-\frac{q \cdot q-1}{2}}C^q,$$

mithin nach (10)

$$12. \quad {}^nC^q = \sum_{0, \frac{n-\frac{q \cdot q+1}{2}+2}{q}}^{k_{q-3}} \dots \sum_{0, \frac{n-\frac{q \cdot q+1}{2}+2}{3}}^k \frac{n-\frac{q \cdot q+1}{2}+2-3k-4k, \dots, qk_{q-3}}{2}.$$

Man kann übrigens eine ähnliche Formel auch unmittelbar aus der Natur der Combinationen ohne Wiederholung ableiten. Man hat nemlich

$$13. \quad {}^nC^q = {}^{n-q}C^{q-1} + {}^{n-q}C^q = {}^{n-q}C^{q-1} + {}^{n-2q}C^{q-1} + {}^{n-3q}C^{q-1} \dots$$

Nun ist

$${}^nC^1 = 1 \quad \text{und} \quad {}^nC^2 = \frac{n-1}{2},$$

mithin

$${}^nC^3 = \frac{n-4}{2} + \frac{n-7}{2} + \frac{n-10}{2} \dots = \sum_{1, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n-1-3k}{2}.$$

Eben so

$${}^nC^4 = \sum_{1, \frac{n-1}{3}}^k \sum_{1, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n-1-3k-4k'}{2},$$

und allgemein

$$14. \quad {}^nC^q = \sum_{1, \frac{n-1}{q}}^{k_{q-3}} \dots \sum_{1, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n-1-3k-4k'-\dots-qk_{q-3}}{2}.$$

Man sieht übrigens leicht, daß die Formeln (12) und (14) identisch sind. Da nun, wie bekannt, in der Entwicklung des Productes $1+x.1+x^2.1+x^3\dots$ der zu x^r gehörende Coefficient $= {}^rC$ ist, so kann man auch das allgemeine Glied dieser Reihe mit Hülfe der Formel (12) oder der Formel (14) darstellen.

6.

Man kann die vorhergehenden Formeln auch von den Summenzeichen befreien. Da man jedoch hiebei auf sehr verwickelte Ausdrücke kommt, so will ich den zu befolgenden Weg nur an einem einfachen Beispiele erläutern. Man hat bisher sechs verschiedene Formeln nöthig gehabt, um den Werth von ${}^nC^3$ anzugeben: dieser Werth läßt sich aber durch eine einzige entwickelte Formel ausdrücken. In dem Ausdrücke

$$\sum_{0, \frac{n-1}{3}}^k \frac{n-(3k+1)}{2} = \frac{n-1}{2} + \frac{n-4}{2} + \dots$$

kommen $\frac{n}{3}$ Glieder vor, wenn man nur diejenigen zählt, welche nicht $= 0$ sind, also die Endglieder wegläßt, deren Werth $\frac{0}{2}$ oder $\frac{1}{2}$ ist. Die Zähler der einzelnen Glieder sind abwechselnd gerade oder ungerade. Ist nun ein Zähler $n-m$ eine gerade Zahl, so ist $\frac{n-m}{2} = \frac{n-m}{2}$, und wenn $n-m$ eine ungerade Zahl ist, $\frac{n-m}{2} = \frac{n-m}{2} - \frac{1}{2}$. Es sind hier sechs verschiedene Fälle zu betrachten, je nachdem n in der Form $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$ enthalten ist. Im ersten Falle enthält die Reihe $2m$ Glieder, also m mit ungeraden Zählern; dasselbe gilt für

den zweiten und dritten Fall. Im vierten Falle enthält die Reihe $2m+1$ Glieder. Nun ist der Zähler des ersten Gliedes, also auch der des letzten, eine gerade Zahl: mithin sind m Glieder mit ungeraden Zählern vorhanden. Im fünften Falle enthält die Reihe wieder $2m+1$ Glieder; von diesen haben $m+1$ Glieder ungerade Zähler. Im sechsten Falle sind unter den $2m+1$ vorhandenen Gliedern m Glieder mit ungeraden Zählern. Die Anzahl der Glieder mit ungeraden Zählern ist also in allen Fällen $\frac{n+2}{6}$, ausgenommen im letzten, in welchem sie $\frac{n+2}{6}-1$ ist. Da aber der Ausdruck $\frac{n+1}{6}-\frac{n}{6}$ in allen übrigen Fällen gleich Null und nur dann $=1$ ist, wenn $n=6n+5$ ist, so ist allgemein die Anzahl der ungeraden Glieder $=\frac{n+2}{6}-\frac{n+1}{6}+\frac{n}{6}$. Mithin ist

$$\begin{aligned} {}^nC' &= \frac{n-1}{2} + \frac{n-4}{2} + \dots \\ &= \frac{n-1}{2} + \frac{n-4}{2} + \dots - \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{6} - \frac{n+1}{6} + \frac{n}{6} \right) \\ &= \frac{\frac{n}{3} \cdot n - \frac{3 \left(\frac{n}{3} \right)^2 - \frac{n}{3}}{2} - \left(\frac{n+2}{6} - \frac{n+1}{6} + \frac{n}{6} \right)}{2}. \end{aligned}$$

7.

Die im Vorhergehenden angedeuteten Summenformeln scheinen indessen nicht geeignet zu sein, um über das in §. 1. angedeutete Verhältniß Aufschluß zu geben. Dennoch hat schon *Euler* den wichtigsten darauf bezüglichen Satz durch Induction gefunden (*Comm. acad. Petr. nov. T. 3. p. 159*). Er heisst:

Bei den Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Summe ist die Anzahl der in den geraden Classen enthaltenen Gruppen der Anzahl der in den ungeraden Classen enthaltenen gleich, ausgenommen wenn diese Summe eine in der Form $\frac{3z^2 \pm z}{2}$ enthaltene Zahl (also eine Pentagonalzahl) ist: alsdann nemlich enthalten die ungeraden oder die geraden Classen eine Gruppe mehr, je nachdem z eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich leicht mittelst eines anderen Satzes darthun, den *Euler* (*Comm. acad. Petr. T. 13. p. 93*) ebenfalls zuerst durch Induction gefunden, später aber bewiesen hat (*Comm. acad. Petr. novi T. 5. p. 78*) und welcher darin besteht, daßs das unendliche Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots$ der Reihe $1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15} \dots$ gleich ist, in welcher Reihe nur die Potenzen vorkommen, deren Exponenten in der Form $\frac{3z^2 \pm z}{2}$ enthalten und deren Glieder mit den Coefficienten $(-1)^z$ multiplicirt sind, so daßs also das unendliche Product = $\sum_{0, \infty}^z (-1)^z x^{\frac{3z^2 \pm z}{2}}$ ist. Das Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots$ ist nemlich nur ein specieller Fall des allgemeineren $(1+a_1x^1)(1+a_2x^2)(1+a_3x^3) \dots$, in dessen Entwicklung der Coefficient C_r irgend einer Potenz x^r der Summe der ohne Wiederholung zur Summe r aus den Elementen $a_1, a_2, \dots$ gebildeten Combinationen gleich ist, wenn die einzelnen Gruppen durch Addition verbunden werden. Setzt man nun alle Elemente $= -1$, so erhält jede einzelne Gruppe den Werth $+1$, oder den Werth -1 , je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Elementen enthält. Da nun, unter dieser Voraussetzung, C_r verschwindet, wenn r nicht in der Form $\frac{3z^2 \pm z}{2}$ enthalten ist, so folgt, daßs in diesem Falle C_r eben so viele Gruppen mit einer geraden Anzahl von Elementen als Gruppen mit einer ungeraden Anzahl enthält; und da ferner, unter der Voraussetzung, daßs alle Elemente $= -1$ sind, $C_r = \pm 1$ wird, wenn $r = \frac{3z^2 \pm z}{2}$ ist, so folgt, daßs überhaupt in C_r , wenn $r = \frac{3z^2 \pm z}{2}$ ist, eine Gruppe mit einer geraden oder ungeraden Anzahl von Elementen mehr vorhanden sein muß, je nachdem z gerade oder ungerade ist; was zu beweisen war.

(Die Fortsetzung folgt.)