Theorie und Konstruktion der Transformator diagramme.

Von

Adolf Bolliger, Zürich.

Schon lange ist erkannt worden, daß die Vorgänge in Einrichtungen, bei welchen elektrische Energie auf Grund der Faraday-Maxwellschen Induktion umgesetzt wird, sich praktisch meist in demselben Diagramme — dem Diagramme des sogenannten allgemeinen Transformators — darstellen lassen. Auch wenn statt einer Einphasen- eine symmetrische Mehrphasenschaltung vorliegt, läßt sich der allgemeine Transformator stets zurückführen auf den ruhenden Einphasentransformator, sofern nur dafür Sorge getragen wird, daß eine abgegebene mechanische Leistung desselben durch eine äquivalente elektrische Belastung des ruhenden Transformators ersetzt wird. Die Widerstände und Reaktanzen des letzteren haben dann eine ideelle Bedeutung; können aber meist als konstant angesehen werden. Die vorliegende Abhandlung beabsichtigt, die Theorie für die Diagrammkonstruktionen ohne Rücksicht auf deren spezielle Anwendungen zu entwickeln, und hat sich also ausschließlich mit dem Einphasentransformator zu befassen. Man findet deshalb stets die Bezeichnung „Transformator“ an Stelle von „allgemeinem Transformator“, wenn gleichwohl den Diagrammen, die dem allgemeinen Transformator entsprechende erweiterte Bedeutung zukommt.

Die erste nennenswerte Anregung für das allgemeine Diagramm hat A. Heyland in seiner Arbeit „Ein graphisches Verfahren zum Vorausberechnen von Transformatoren und Induktionsmotoren“ gegeben¹⁾. Heyland hat dort, wenn auch auf etwas umständliche Weise und mit Vernachlässigung des primären Spannungsabfalles im Transformator, das diesbezüglich richtige Näherungsergebnis erhalten. Die exakte Lösung ist bald nachher von Ossanna²⁾, der mit Hilfe der analytischen Geometrie auf einem allerdings unnötig komplizierten Wege dazu gelangt ist, angegeben worden. Modifikationen des Ossannadiagrammes bzw. Sonderfälle desselben sind zum Teil schon früher von Blondel, Behrend, Kapp, Heubach, Grob und Emde³⁾ an die Öffentlichkeit gelangt. Die Diagramme der erwähnten Autoren sind durchweg Kreisdiagramme und es beziehen sich sämtliche auf den belasteten Transformator. Wie La Cour in seiner berühmten Arbeit „Leerlauf und Kurzschluß in Theorie und Praxis“⁴⁾ gezeigt hat, können diese aus den Daten eines Leerlauf- und Kurzschlußversuches ohne Kenntnis der Konstanten des Transformators konstruiert werden.

Die Erkenntnis, daß Kreisdiagramme noch lange nicht den allgemeinsten Anforderungen für die Betriebszustände des Transformators genügen, hat mich bewogen, in dieser Schrift auf das „kinematische Problem“ des letzteren zurückzukommen. Ich beabsichtige deshalb in erster Linie, nicht ein Kreisdiagramm zu entwickeln, sondern zu zeigen, wie man allerdings durch Einführung gewisser Hilfskreise zur vollständigen Lösung der Aufgabe gelangen kann.

¹⁾ ETZ 1894, S. 561.

²⁾ Zeitschr. f. Elektrot. Wien 1899, S. 223, 236, 248.

³⁾ Blondel, ETZ 1895, S. 625; Behrend, ETZ 1896, S. 63; G. Kapp, Electric Transmission of Energy; Heubach, ETZ 1899, S. 314; Grob, ETZ „Unter Briefe an die Redaktion“, 1901, S. 88; Emde, Die Arbeitsweise der Wechselstrommaschinen. Verlag: Springer, Berlin 1902.

⁴⁾ La Cour, Leerlauf und Kurzschluß in Theorie und Praxis. Verlag: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1901.

Die Untersuchungen dieser Abhandlung nehmen ihren Ausgang von den Grundgleichungen des Transformators, den sog. „Transformatorgleichungen“. Für die Integration derselben und die Konstruktion der Diagramme ist es von grundlegender Bedeutung, daß jeder Betriebszustand des Transformators als Superposition von zwei Kurzschlußversuchen aufgefaßt werden kann. Dadurch gelingt es, selbst ohne Verwendung von vereinfachenden Ersatzschaltungen für den Transformator, einen klaren Einblick in die verschiedenartigsten Betriebszustände zu erhalten und die Zusammenhänge derselben leicht zu verstehen. Die „mathematische Brücke“ zwischen den einzelnen Betriebszuständen bildet das Transformationsprinzip der „Ähnlichkeitstransformation“, aus welchen sich zwingend die Konstruktionsgrundsätze für alle Diagramme ergeben. — Die Methode der Ähnlichkeitstransformation ermöglicht bei einer bestimmten Wechselstromfrequenz die Lösung aller nur irgendwie denkbaren Aufgaben zwischen den Bestimmungsgrößen einzelner Betriebszustände. So liefert sie z. B. in einfachster Weise die Hilfsmittel, um aus zwei beliebigen Betriebszuständen irgendeinen neuen Betriebszustand abzuleiten. Diese Aufgabe bildet die Grundlage für alle experimentellen Aufnahmen von Diagrammen und enthält als Spezialfall auch die von La Cour gelöste diesbezügliche Aufgabe aus „Leerlauf und Kurzschluß“.

Da die sog. Belastungsdiagramme sich nur auf ein beschränktes Betriebsintervall des Transformators beziehen, ist es im Interesse einer vollständigen Behandlung des Problems unerlässlich, auch die Betriebszustände des sog. „doppeltgespeisten Transformators“, bei welchen die gesamte (primär und sekundär) zugeführte Energie in den Transformatorwicklungen in Joulesche Wärme umgewandelt wird, mit zu berücksichtigen. Diesem Umstande ist dadurch in weitgehendem Maße Rechnung getragen worden, daß bei der Konstruktion der allgemeinen Diagramme kein Unterschied zwischen belastetem und doppeltgespeistem Transformator gemacht wird. Um allerdings die neben diesen Diagrammen sehr wichtigen „eigentlichen“ Belastungsdiagramme deshalb nicht in den Hintergrund treten zu lassen, wird denselben außerdem ein besonderer Abschnitt gewidmet.

Unter anderem lassen sich die Diagramme von Heyland, Ossanna u. a., wenn auch in etwas abgeänderter Form durch die Methode der Ähnlichkeitstransformation gewinnen. Daß dieselben Kreisdiagramme sind, erscheint dann an und für sich selbstverständlich; wenigstens weitgehender Beweis bedarf es dafür nicht. Im Schlußkapitel wird noch darauf hingewiesen, wie man die für sinusförmige Spannungs- und Stromwellen geltenden Resultate bei willkürlichen Kurvenformen zu erweitern hat.

Integrationsmethode für die Transformatorgleichungen.

Der Transformator ist durch die fünf Größen: Widerstände R_1 , R_2 , Selbstinduktivitäten L_1 , L_2 und die gegenseitige Induktivität M des primären und sekundären Stromkreises bestimmt. Für stationäre Zustände sind R_1 und R_2 konstant, und wenn die Sättigungen im Eisen relativ klein sind, können auch die Induktivitäten L_1 , L_2 und M als unveränderlich angesehen werden. Der Zusammenhang der Transformatorströme i_1 und i_2 mit den Klemmenspannungen e_1 und e_2 wird dann durch die bekannten Transformatorgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$e_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \dots \dots \dots 1)$$

$$e_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad \dots \dots \dots 2)$$

vermittelt.

Wir betrachten im weitem rein periodische Vorgänge. Solche Vorgänge lassen sich nach den Fourierschen Sätzen durch Komplexe von Sinuswellen (Grund- und

harmonische Oberwellen) darstellen. Unsere Untersuchung kann deshalb fürs erste auf den Fall von sinusförmig verlaufenden, primären und sekundären Klemmenspannungen e_1 und e_2 mit beliebiger Amplitude und Phase aber gleicher Periodenzahl beschränkt werden. Die allgemeine Lösung für willkürlich verlaufende Spannungen ergibt sich dann durch Summation einer Reihe solcher in gleicher Weise zu ermittelnder sinusförmiger Lösungen.

Für die Integration der Gl. 1) und 2) leistet das Superpositionsprinzip der Spannungen und Ströme gute Dienste. Die den Spannungen e_1 und e_2 entsprechenden Ströme i_1 und i_2 erhält man nämlich durch Superposition der Transformatorströme von den folgenden Kurzschlußversuchen:

Kurzschlußversuch I.

$$\begin{array}{l} e_1 = e_1 \\ e_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} i_1 = i_1' \\ i_2 = i_2' \end{array} \quad \dots \quad 3)$$

Kurzschlußversuch II.

$$\begin{array}{l} e_1 = 0 \\ e_2 = e_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} i_1 = i_1'' \\ i_2 = i_2'' \end{array} \quad \dots \quad 4)$$

Die Gültigkeit des Superpositionsprinzips erkennt man durch Einführung der Größen 3) und 4) in die Gl. 1) und 2) und Verwendung der Substitutionen:

$$i_1 = i_1' + i_1'' \quad \dots \quad 5)$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' \quad \dots \quad 6)$$

Um das allgemeine Resultat zu erhalten, ist es also zuvor bloß von Interesse, z. B. den ersten dieser Kurzschlußversuche genauer zu verfolgen. Zwecks einer einfachen Ausdrucksweise soll dafür einstweilen in den Bezeichnungen die Apostrophierung weggelassen werden. Es sind dann die Gleichungen

$$e_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad \dots \quad 7)$$

$$0 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad \dots \quad 8)$$

unter Zugrundelegung einer zeitlich sinusförmigen Spannung e_1 zu integrieren. Da dieselben einen vollständig linearen Charakter besitzen, sind unter dieser Voraussetzung auch die Ströme i_1 und i_2 Sinusfunktionen, die jedoch andere Amplituden und Phasen wie die Spannung e_1 haben.

In 7) und 8) wollen wir setzen:

$$p_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad p_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \dots \quad 9)$$

$$q_1 = M \frac{di_2}{dt} \quad q_2 = M \frac{di_1}{dt}, \quad \dots \quad 10)$$

so daß

$$e_1 = p_1 + q_1 \quad p_2 + q_2 = 0 \quad \dots \quad 11)$$

sind.

Wenn die eingeprägte Spannung die Phasenverschiebung Null aufweist, so können für die Integration die folgenden Ansätze verwendet werden:

$$e_1 = \mathfrak{E}_1 \sin \omega t \quad \dots \quad 12)$$

$$p_1 = \mathfrak{P}_1 \sin(\omega t - \alpha_1) \quad p_2 = \mathfrak{P}_2 \sin(\omega t - \alpha_2) \quad \dots \quad 13)$$

$$q_1 = \mathfrak{Q}_1 \sin(\omega t - \beta_1) \quad q_2 = \mathfrak{Q}_2 \sin(\omega t - \beta_2) \quad \dots \quad 14)$$

$$i_1 = \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t - \gamma_1) \quad i_2 = \mathfrak{I}_2 \sin(\omega t - \gamma_2) \quad \dots \quad 15)$$

($\omega = 2\pi f = \text{Kreisfrequenz}$).

Danach genügen den Differentialgleichungen 9) und 10), wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\omega L_1 = S_1, \quad \omega L_2 = S_2, \quad \omega M = \mu$$

$$\frac{\sqrt{R_1^2 + S_1^2}}{\sqrt{R_2^2 + S_2^2}} \quad 16)$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{P}_1 = \varrho_1 \mathfrak{S}_1 \quad 17) \quad \quad \quad \operatorname{tg} (\gamma_1 - \alpha_1) = \frac{S_1}{R_1} \quad 21)$$

$$\mathfrak{P}_2 = \varrho_2 \mathfrak{S}_2 \quad 18) \quad \quad \quad \operatorname{tg} (\gamma_2 - \alpha_2) = \frac{S_2}{R_2} \quad 22)$$

$$\mathfrak{Q}_1 = \mu \mathfrak{S}_2 \quad 19) \quad \quad \quad \beta_1 = \gamma_2 - \frac{\pi}{2} \quad 23)$$

$$\mathfrak{Q}_2 = \mu \mathfrak{S}_1 \quad 20) \quad \quad \quad \beta_2 = \gamma_1 + 3\frac{\pi}{2} \quad 24)$$

Außerdem bestehen nach 11), 12), 13) und 14) für jeden Zeitmoment die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{P}_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + \mathfrak{Q}_1 \sin(\omega t - \beta_1) = \mathfrak{E}_1 \sin \omega t, \quad 25)$$

$$\mathfrak{P}_2 \sin(\omega t - \alpha_2) + \mathfrak{Q}_2 \sin(\omega t - \beta_2) = 0. \quad 26)$$

Für $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich daraus:

$$\mathfrak{P}_1 \sin \alpha_1 + \mathfrak{Q}_1 \sin \beta_1 = 0, \quad 27)$$

$$\mathfrak{P}_1 \cos \alpha_1 + \mathfrak{Q}_1 \cos \beta_1 = \mathfrak{E}_1, \quad 28)$$

$$\mathfrak{P}_2 \sin \alpha_2 + \mathfrak{Q}_2 \sin \beta_2 = 0, \quad 29)$$

$$\mathfrak{P}_2 \cos \alpha_2 + \mathfrak{Q}_2 \cos \beta_2 = 0. \quad 30)$$

Zunächst folgt aus 29) und 30):

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2} = -\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{P}_2}$$

und hieraus:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \beta_2.$$

Da wir auf der Sekundärseite des Transformators Kurzschluß haben, ist diese Gleichung in folgender Weise zu deuten:

$$\beta_2 = \pi + \alpha_2 \quad 31)$$

und aus 29) und 30) geht nun hervor:

$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{Q}_2. \quad 32)$$

Nach 18) und 20) folgt deshalb für die Stromamplituden der Quotient:

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = \frac{\mu}{\varrho_2} \quad 33)$$

Eliminiert man in den beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} (\gamma_2 - \alpha_2) = \frac{S_2}{R_2},$$

$$\alpha_2 - \gamma_1 = \frac{\pi}{2},$$

wovon die erste die bereits gefundene Gl. 22) und die zweite durch Zusammenfassung von 24) und 31) erhalten worden ist, die Größe α_2 , so gelangt man zu dem Resultate:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\gamma_2 - \gamma_1) = -\frac{R_2}{S_2} \quad 34)$$

Bei sekundär kurzgeschlossenem Transformator ist also der Phasenverschiebungswinkel der beiden Stromamplituden $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ bloß vom sekundären Ohmschen- und Selbstinduktionswiderstand abhängig. Das negative Zeichen der Formel weist außerdem darauf hin, daß der Winkel δ stets größer als ein Rechter ist.

Durch Division der Gl. 19) und 17) folgt:

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\mu}{e_1} \cdot \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1},$$

oder mit 33):

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\mu^2}{e_1 \cdot e_2} = \lambda \dots \dots \dots 35)$$

Beiläufig bemerkt ist nach 16) und 35):

$$\lambda = \frac{\mu^2}{e_1 \cdot e_2} < \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = k^2$$

d. h.

$$\lambda < k^2, \dots \dots \dots 36)$$

wo k den bekannten Kopplungskoeffizienten darstellt, der immer ≤ 1 ist. Der Faktor λ soll wegen 36) „reduzierte Kopplung“ heißen. λ qualifiziert in gewisser Hinsicht den Transformator; denn je größer λ ist (obere Grenze = 1), um so günstiger verhält er sich in bezug auf Kopplung und Widerstände.

Wenn man die Gl. 27) und 28) quadriert und addiert, erhält man:

$$\mathfrak{Q}_1^2 = \mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{Q}_1^2 + 2 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \dots \dots \dots 37)$$

Hierin kann man $\cos(\alpha_1 - \beta_1)$ mit Hilfe der Gl. 21), 23) und 34) eliminieren. 21) und 23) mit 34) zusammengefaßt lauten:

$$\operatorname{tg}(\gamma_1 - \alpha_1) = \frac{S_1}{R_1}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1 - \gamma_1) = \frac{S_2}{R_2}.$$

Durch leichte Umrechnung findet man¹⁾

$$\cos \psi = -\cos(\alpha_1 - \beta_1) = \eta, \dots \dots \dots 38)$$

wo:

$$\eta = \frac{S_1 S_2 - R_1 R_2}{e_1 e_2} \dots \dots \dots 39)$$

Der „Winkelmodul η “ variiert in den Grenzen $\eta = +1$ für $R_1 R_2 = 0$ und $\eta = -1$ für $S_1 S_2 = 0$. Für den praktischen Transformator ist $R_1 R_2$ immer klein gegen $S_1 S_2$ und daher η stets positiv und nahezu 1. Der Winkel ψ , der nach 38) die Differenz des Phasenwinkels $\alpha_1 - \beta_1$ zwischen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ [vergleiche 13) und 14)] zu zwei Rechten darstellt, ist dann kleiner als $\pm \frac{\pi}{2}$.

Um nun $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ explizit angeben zu können, benötigen wir außer den Gl. 37) und 38) noch Gl. 35), mit der wir in 37) $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{Q}_1$ oder umgekehrt $\mathfrak{Q}_1$ durch $\mathfrak{P}_1$ ausdrücken können.

¹⁾ Man berechne aus den beiden Gleichungen zuerst mit Hilfe des Additionstheoremes für den Tangens eines Winkels:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{R_1 S_2 + R_2 S_1}{S_1 S_2 - R_1 R_2}$$

und wende dann die Formel an:

$$\cos(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \beta_1)}}.$$

$$2P_1 = \frac{\xi_1^2}{\nu^2 \cdot \rho_1} \cdot \left(\frac{R_1}{\rho_1} + \lambda \frac{R_2}{\rho_2} \right).$$

Durch Ausmultiplizieren und Berücksichtigung von 35) folgt daraus wegen 43) und 44) die „mittlere Energiegleichung“:

$$\mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 \cos \gamma_1 = \mathfrak{I}_1^2 \cdot R_1 + \mathfrak{I}_2^2 \cdot R_2, \quad (53)$$

d. h. es wird, wie es bei Kurzschluß der Fall sein muß, die ganze dem Transformator gelieferte Energie in der primären und sekundären Wicklung in Stromwärme verwandelt.

Zusammenfassung der Formeln. Bisher haben wir die Ströme in den Transformatorwicklungen und deren Phasen unter der Voraussetzung berechnet, daß der Transformator sekundär kurzgeschlossen ist. Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 in den Formeln erhält man die Stromamplituden mit ihren Phasenwinkeln für den zweiten Kurzschlußversuch, bei welchem die Primärseite des Transformators kurzgeschlossen ist und sekundär die Spannung e_2 eingeprägt wird.

Wenn wir für Größen des ersten Kurzschlußversuches einfache, des zweiten zweifache und für Größen, die für beide Kurzschlußversuche gleich sind, keine Apostrophierung verwenden, so ergibt sich die Berechnung der einzelnen Stromamplituden und deren Phasenwinkeln in der folgenden einfachen Weise aus:

$$\begin{aligned} & R_1, \quad R_2, \\ & \omega L_1 = S_1, \quad \omega L_2 = S_2, \quad \omega M = \mu. \\ & \mathfrak{E}_1, \quad \mathfrak{E}_2, \quad \varepsilon = \angle(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2). \\ \text{I.} \quad & \varrho_1 = \sqrt{R_1^2 + S_1^2}, \\ & \varrho_2 = \sqrt{R_2^2 + S_2^2}, \\ & \lambda = \frac{\mu^2}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}, \\ & \eta = \frac{S_1 S_2 - R_1 R_2}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}, \\ & \nu = \sqrt{1 - 2\eta\lambda + \lambda^2}. \\ \text{II.} \quad & \mathfrak{I}_1' = \frac{\mathfrak{E}_1}{\nu \cdot \varrho_1}, \quad \mathfrak{I}_1'' = \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{\mathfrak{E}_2}{\mu}, \\ & \mathfrak{I}_2' = \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{\mathfrak{E}_1}{\mu}, \quad \mathfrak{I}_2'' = \frac{\mathfrak{E}_2}{\nu \cdot \varrho_2}. \\ \text{III.} \quad & \gamma_1' = \arccos \frac{1}{\nu} \left(\frac{R_1}{\varrho_1} + \lambda \frac{R_2}{\varrho_2} \right), \quad \gamma_2'' = \arccos \frac{1}{\nu} \left(\frac{R_2}{\varrho_2} + \lambda \frac{R_1}{\varrho_1} \right), \\ & \delta' = \pi - \arctg \frac{R_2}{S_2}, \quad \delta'' = \pi - \arctg \frac{R_1}{S_1}. \end{aligned}$$

Für die resultierenden Ströme i_1 und i_2 findet man nach den Gleichungen 5), 6), 15) und 34) mit Hilfe der Tabellengrößen:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \mathfrak{I}_1' \sin(\omega t - \gamma_1') + \mathfrak{I}_1'' \sin(\omega t - \gamma_2'' - \delta'' - \varepsilon) \\ i_2 &= \mathfrak{I}_2' \sin(\omega t - \gamma_1' - \delta') + \mathfrak{I}_2'' \sin(\omega t - \gamma_2'' - \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Hierdurch ist aber die Aufgabe bei sinusförmigen Spannungen für jeden beliebigen Belastungszustand gelöst.

Vereinfachung: Beim praktischen Transformator ist es manchmal gestattet R_1 und R_2 gegenüber S_1 und S_2 zu vernachlässigen. Dann werden:

¹⁾ Den Energiesatz für Augenblickswerte findet man im vorletzten Abschnitt der Abhandlung [vgl. dort Formel 90)].

und

$$\mathcal{Q}_1 = S_1, \quad \mathcal{Q}_2 = S_2$$

$$\lambda = \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = k^2, \quad \dots \dots \dots 55)$$

d. h. die reduzierte Kopplung wird gleich dem Quadrate des Kopplungskoeffizienten. Außerdem ist dann $\eta = 1$ und

$$\nu = 1 - \lambda = 1 - k^2, \quad \dots \dots \dots 56)$$

d. h. die Konstante ν ist dann identisch mit dem „Behn-Eschenburgschen Streuungskoeffizienten“¹⁾.

Da R_1 und R_2 Null sind, kann in den Transformatorwicklungen keine Joulesche Wärme frei werden. Nach 53) erkennt man, daß deshalb $\cos \gamma_1'$ und auch $\cos \gamma_2''$ verschwinden müssen, was im Einklange mit den Spezialisierungen der entsprechenden Formeln von Tabelle III steht. Außerdem erhalten wir dann für δ' und δ'' den Wert π , d. h. die Stromamplituden eines jeden Kurzschlußversuches sind gegeneinander um eine halbe Wechselstromperiode verschoben.

Kurzschlußdiagramme.

Zur Darstellung von Wechselstromvorgängen, denen sinusförmige Spannungen und Ströme zugrunde liegen, sind Vektordiagramme (hier sogenannte Zeitdiagramme) äußerst bequem und übersichtlich. Der nunmehr folgende

Teil der Arbeit behandelt die Theorie und Konstruktion solcher für den Transformator geltenden Diagramme. Die Amplituden der Sinuswellen übernehmen dabei die Rolle der Vektoren und die Phasenwinkel die Rolle der Vektorzwischenwinkel. Für die Bezeichnungen der Diagramme sind alle Winkel positiv gerechnet und im Uhrzeigersinne aufgetragen. Die Figuren der Schrift beziehen sich auf die Konstanten:

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 2, \quad S_1 = 3, \quad S_2 = 4, \quad \mu = 2^2)$$

Widerstandseinheiten.

Das Diagramm (Abb. 1) gibt den Zusammenhang der Größen des ersten Kurzschlußversuches (Sekundärwicklung kurzgeschlossen). Die gegebene primäre Klemmenspannung $\mathcal{E}_1$ ist die Resultierende aus dem Spannungsabfall $\mathfrak{P}_1$ des Primärstromes $\mathfrak{I}_1$ und dem auf der Primärseite durch den Sekundärstrom $\mathfrak{I}_2$ bewirkten Spannungsabfall $\mathfrak{Q}_1$. Vom Vektordreiecke $\mathcal{E}_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1$ sind uns sowohl die Vektoren als auch die Winkel analytisch bekannt [vgl. die Formeln 38), 41), 42), 48) und 49)].

Abb. 1. Kurzschlußdiagramm I.

Der Spannungsabfall $\mathfrak{P}_1$ hinwieder setzt sich zusammen aus dem primären Ohmschen Spannungsabfalle $\mathfrak{I}_1 R_1$ und der induktiven Gegenspannung $\mathfrak{I}_1 S_1$, welche dazu in Quadratur und Voreilung steht. Die Winkel des Vektordreiecks sind durch den primären Ohmschen- und Selbstinduktionswiderstand bestimmt. Der Primärstrom $\mathfrak{I}_1$ ist mit dem Ohmschen Spannungsabfalle $\mathfrak{I}_1 R_1$ in Phase und vom Diagrammpole O aus gezeichnet.

¹⁾ ETZ 1893, S. 521, und 1894, S. 180.

²⁾ Zu bemerken ist, daß für alle in der Abhandlung gezeichneten Diagramme die Einheitsstrecke für die Stromvektoren zweimal größer ist als für die Spannungsvektoren.

Um $\frac{1}{4}$ Periode in Nacheilung ist die durch den Primärstrom sekundär induzierte Spannung $\mathfrak{P}_2$; sie ist die Resultierende aus dem sekundären Ohmschen Spannungsabfalle $\mathfrak{Z}_2 R_2$ und der zu diesem in Quadratur und Voreilung liegenden Selbstinduktionsgegenspannung $\mathfrak{Z}_2 S_2$. Die Phasendifferenzen zwischen resultierender Spannung $\mathfrak{P}_2$ und den Komponenten $\mathfrak{Z}_2 R_2$ und $\mathfrak{Z}_2 S_2$ bestimmen sich aus dem sekundären Ohmschen- und Selbstinduktionswiderstand. Der Spannung $\mathfrak{P}_2$ wird durch die sekundäre Gegenspannung $\mathfrak{Q}_2$ Gleichgewicht gehalten, so daß, wie es dem Kurzschlusse entspricht, die resultierende Sekundärspannung Null ist. Gleichphasig zum Ohmschen Spannungsabfalle $\mathfrak{Z}_2 R_2$ ist der sekundäre Strom $\mathfrak{Z}_2$ vom Diagrammpole aus abgetragen.

$\mathfrak{Z}_2$ ist nach 34) gegenüber $\mathfrak{Z}_1$ immer um mehr als $\frac{1}{4}$ Periode verschoben und nacheilend. $\mathfrak{Z}_1$ hinwieder ist wegen der Energiegleichung 53), deren beide Seiten immer positiv oder wenigstens nie negativ sind, nie mehr als $\frac{1}{4}$ Periode in Nacheilung zu $\mathfrak{E}_1$.

Konstruktion der Kurzschlußdiagramme: Die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{P}_1'} &= \frac{\mu^2}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = \lambda, \dots\dots\dots 35) \\ \cos \psi &= \frac{S_1 S_2 - R_1 R_2}{\varrho_1 \varrho_2} = \eta, \dots\dots\dots 38) \\ \operatorname{tg} \delta' &= -\frac{R_2}{S_2}, \dots\dots\dots 34) \\ \mathfrak{Z}_1' &= \frac{\mathfrak{P}_1'}{\varrho_1}, \dots\dots\dots 17) \\ \mathfrak{Z}_2' &= \frac{\mathfrak{Q}_1'}{\mu}, \dots\dots\dots 19) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Numerierung} \\ \text{von vorher} \end{array}$$

die wir im Verlaufe der analytischen Ermittlung der Transformatorströme bei Kurzschluß erhalten haben, gestatten uns auf eine einfache und elegante Weise mehr konstruktiv die exakten Ströme der beiden Kurzschlußversuche zu bestimmen. Wir betrachten zuerst bloß den Fall des sekundär kurzgeschlossenen Transformators.

Das Dreieck OPQ der drei Spannungsvektoren $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{Q}_1'$ (siehe Abb. 2) werde als „Fundamentaldreieck“ bezeichnet; es kann konstruiert werden aus:

$$\mathfrak{E}_1, \quad \frac{\mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{P}_1'} = \lambda \quad \text{und} \quad \psi = \arccos \eta \dots\dots\dots 57)$$

Die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{P}_1'} = \lambda = \text{konst.}$$

liefert als ersten geometrischen Ort des Punktes P denjenigen „Apollonischen Kreis“, der die Strecke $OQ = \mathfrak{E}_1$ im Verhältnis λ harmonisch teilt, d. h. man findet den Kreisdurchmesser $\overline{UV}$ aus:

$$\frac{QU}{OU} = -\frac{QV}{OV} = \lambda \dots\dots\dots 58)$$

Als zweiten geometrischen Ort des Punktes P erhält man zufolge der Gleichung

$$\psi = \arccos \eta = \text{konst.}$$

über OQ den Kreis mit ψ als Peripheriewinkel. Die Spannungsvektoren $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{Q}_1'$ reichen von den Punkten O und Q bis an den Schnittpunkt P der beiden Kreise¹⁾.

¹⁾ Will man die Konstruktion der beiden Kreise umgehen, so kann man das Dreieck OPQ mehr indirekt auch auf andere Weise finden, indem man aus dem Winkel ψ und dem Verhältnis λ in beliebiger Lage zuerst ein zu OPQ ähnliches Dreieck konstruiert und nachträglich durch ähnliche Abbildung zum gesuchten Dreiecke übergeht.

Die Stromvektoren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ für den allgemeinen Betriebszustand des Transformators (Primärspannung $= \mathfrak{E}_1$, Sekundärspannung $= \mathfrak{E}_2$) erhält man zufolge der nach den Gl. 5) und 6) geltenden Superposition der Momentanströme der beiden Kurzschlußversuche aus den Einzelvektoren der beiden Systeme durch geometrische Addition entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{S}_1' + \mathfrak{S}_1'' \\ \mathfrak{S}_2 &= \mathfrak{S}_2' + \mathfrak{S}_2'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 59)$$

Trägt man alle Vektoren von einem in der Nulllinie (Lage der Zeitachse zur Zeit $t = \frac{T}{4}$) liegenden Diagrammpole O aus ab, so besitzt jedes Vektorsystem absolut genommen noch zwei Freiheitsgrade. Erstens kann es sich als starres System gegenüber der Nulllinie beliebig verdrehen und zweitens können sich alle seine Vektoren in ihrer Größe einander proportional ändern. Jedes System hätte man sich also mit Rücksicht auf seine Lage als Funktion von zwei Variablen zu denken. Diese Variablen sind aber nicht unabhängig voneinander, wie man sofort aus dem relativen Verhalten der beiden Vektorsysteme zueinander erkennt, welches charakterisiert wird durch den Quotienten:

$$q = \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_1} \dots \dots \dots 60)$$

der beiden Spannungsvektoren und den Zwischenwinkel

$$\varepsilon = \angle (\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) \dots \dots \dots 61)$$

derselben. Vollständig ist indessen die Sache durch 60) und 61) noch nicht bestimmt, denn man kann, ohne daß sich der Quotient q ändert, $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ noch mit einem beliebigen Proportionalitätsfaktor multiplizieren. Für das resultierende Diagramm wäre dies gleichbedeutend mit einer ähnlichen Abbildung oder Maßstabsveränderung.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man für die Diagramme die Annahme treffen, daß der Vektor $\mathfrak{E}_1$, unbekümmert um seine Größe in elektrischem Maße, durch eine konstante Normalstrecke von $\overline{\mathfrak{E}_1}$ Längeneinheiten dargestellt werde. Es besteht dann eine Gleichung von der Form:

$$p = \frac{\mathfrak{E}_1}{\overline{\mathfrak{E}_1}}, \dots \dots \dots 62)$$

durch welche der Faktor p aus der Amplitude $\mathfrak{E}_1$ der Primärspannung und der Diagramm-Normalstrecke $\overline{\mathfrak{E}_1}$ definiert wird.

Nach 60) muß nun für die Diagrammgrößen $\overline{\mathfrak{E}_1}$ und $\overline{\mathfrak{E}_2}$ noch die Gleichung bestehen:

$$\frac{\overline{\mathfrak{E}_2}}{\overline{\mathfrak{E}_1}} = \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_1} = q, \dots \dots \dots 63)$$

d. h. die Diagrammvektoren verhalten sich wie die Spannungsamplituden, und nach 62) vermittelt p den Zusammenhang zwischen dem elektrischen und vektoriellen Maße.

Der willkürlichen Länge der Normalstrecke $\overline{\mathcal{E}_1}$ wegen, wird das gegenseitige Verhalten der beiden Vektorsysteme für die Diagrammkonstruktionen durch q und ε hinreichend bestimmt. Da $\overline{\mathcal{E}_1}$ nach früherem die Phasen-Nullage bestimmt und konstant bleibt, ist auch das Vektorsystem I in den Diagrammen unveränderlich und stets

Abb. 3. Nullsystem.

„Winkeltransformation“ und im kombinierten Fall als „Ähnlichkeitstransformation“.

Die Transformationen sollen gewöhnlich von der sogenannten Nullage aus vorgenommen werden, wo die Spannungsvektoren um 180° gegeneinander verschoben und absolut gleich sind. Die in der Nullage vereinigten Vektorsysteme sollen das „Nullsystem“ heißen (vergleiche dazu Abb. 3). Es läßt sich dasselbe unter Zugrundelegung des kombinierten Kurzschlußdiagrammes leicht angeben.

Streckentransformation.

Wird mit dem Nullsystem ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2^0, \mathcal{J}_1', \mathcal{J}_1'', \mathcal{J}_2', \mathcal{J}_2''$) der Abb. 4 eine Streckentransformation vorgenommen, so bleibt im Vektorsystem I alles gleich; im Vektorsystem II hingegen ändern sich die Stromvektoren $\mathcal{J}_1''$ und $\mathcal{J}_2''$ in ihren Richtungen proportional dem Spannungsvektor $\mathcal{E}_2$. Wegen der Invarianz des Systems I und der für die Vektoren des Systems II beibehaltenen Richtungen sind die Orte der Endpunkte J_1 und J_2 der resultierenden Stromvektoren $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ für am Nullsystem beliebig vorzunehmende Streckentransformationen zwei gerade Linien g_1 und g_2 . Die Geraden g_1 und g_2 , die als Stromgeraden I und II bezeichnet werden sollen, verlaufen durch die Endpunkte der Stromkomponenten des Vektorsystems I parallel zu den entsprechenden Stromkomponenten des Vektorsystems II. Bei der Transformation bewegt sich die Spitze des Spannungsvektors $\mathcal{E}_2$ in dessen Richtungslinie, die in der Abbildung mit der Bezeichnung „Spannungsgerade“ versehen ist. Jedem Punkte E_2 auf der Spannungsgeraden entsprechen eindeutig zwei Punkte J_1 und J_2 auf den Stromgeraden g_1 und g_2 . Zur einfachen Auffindung derselben aus E_2 dient die Hilfsgerade h , deren Richtung aus O durch den Schnittpunkt H der beiden Hilfssehn s_1 und s_2 des Nullsystems bestimmt ist. Die Verbindungslinie der Punkte E_2 und H liefert eine gewisse Projektionsrichtung p , mit welcher jedem Punkte der Spannungsgeraden g_e ein Punkt der Hilfsgeraden h zugeordnet wird. Die Sehnen-

so orientiert, daß die Normalstrecke in die Nulllinie hinein fällt. Änderungsmöglichkeit besteht bloß für das Vektorsystem II und zwar in zweierlei Hinsicht; es kann sich um den Diagrammpol O verdrehen und dabei noch ähnlich vergrößern oder verkleinern. In Beziehung zum unveränderlichen Vektorsystem I ist das Vektorsystem II eine Funktion von zwei freien Variablen.

In der Folge bezeichnen wir die Umformung der resultierenden Vektoren bei einer bloß proportionalen Veränderung des Vektorsystems II als „Streckentransformation“, bei einer Drehung des starrgedachten Vektorsystems II als

richtungen s_1 und s_2 vermitteln dann noch den Zusammenhang der Punkte auf h mit den Punkten auf den beiden Stromgeraden g_1 und g_2 . Bei bekannter Hilfsgeraden ist die vollständige Streckentransformation durch drei Hilfslinien ausführbar; nämlich durch einen Projektionsstrahl p und zwei Richtungslinien s_1 und s_2 .

Abb. 4. Streckentransformation.

Aus allem geht hervor, daß die Punktreihen der Spannungs- und Stromgeraden einander ähnlich sind, jedoch entsprechen sich die Schnittpunkte der Geraden nicht selber.

Für Streckentransformationen, die nicht von der Nullstellung, sondern einer beliebigen gegenseitigen Lage der beiden Vektorsysteme aus vorgenommen werden, ist die Konstruktion genau dieselbe. Die Resultate unterscheiden sich äußerlich nur dadurch, daß die Spannungsvektoren nicht mehr um 180° verschoben sind.

Winkeltransformation:

Bei der Winkeltransformation verdreht sich das Vektorsystem II als starre Konfigurationsfigur gegenüber dem feststehenden Vektorsystem I. Der Endpunkt des Spannungsvektors $\mathcal{E}_2$ bewegt sich dabei auf dem „Spannungskreise“ (vgl. Abb. 5) und als geometrische Örter der Spitzen J_1 und J_2 der resultierenden Stromvektoren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ ergeben sich die „Stromkreise I und II“ mit den Endpunkten M_1 und M_2 der Vektoren $\mathcal{S}_1'$ und $\mathcal{S}_2'$ des Systems I als Mittelpunkten und den Vektoren $\mathcal{S}_1''$ und $\mathcal{S}_2''$ des Systems II als Radien. Die Strompunkte J_1 und J_2 liegen für eine beliebige Diagrammstellung auf den Stromkreisen gegenüber den der Nullage des Vektorsystems I entsprechenden Punkten J_1^0 und J_2^0 um die gleichen Winkel verdreht, wie der Spannungsvektor $\mathcal{E}_2$ gegenüber der Nullstellung $\mathcal{E}_2^0$. Um irgend zwei Punkte einer Diagrammstellung (E_2, J_1, J_2) aus der Angabe des dritten leicht finden zu können, verwendet man zweckmäßigerweise die geometrischen Hilfsörter von Punkten H_1 und H_2 , in welchen sich die aus den Punkten M_1 und M_2 nach den Strompunkten J_1 und J_2

gezogenen Radien mit dem Spannungsvektor $\mathfrak{E}_2$ schneiden. Diese Hilfsörter sind wegen der Konstanz der zur unveränderlichen Konfiguration des Vektorsystems II gehörenden

Abb. 5. Winkeltransformation.

J_1 und J_2 ist also auch hier, wie bei der Streckentransformation durch drei Hilfslinien möglich.

Ähnlichkeitstransformation:

Die Ähnlichkeitstransformation ordnet in der Diagrammebene bei gegebenem Nullsystem jedem Punkte E_2 als Spitze des Spannungsvektors $\mathfrak{E}_2$ eindeutig zwei Punkte J_1 und J_2 als Endpunkte der resultierenden Stromvektoren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zu. Ist irgend einer der Vektoren $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ in seiner Lage gegen das Nullsystem festgelegt, so ist die Transformation bestimmt.

Ist z. B. der Vektor $\mathfrak{E}_2$ gegenüber dem Vektor $\mathfrak{E}_2^0$ der Nullage um den Winkel $\varphi = 180^\circ - \varepsilon$ verdreht und im Verhältnis q proportional verändert, so kann man, um die Ähnlichkeitstransformation zu erhalten, zuerst aus dem Nullsystem eine dem Faktor q entsprechende Streckentransformation ableiten und mit dem resultierenden Systeme noch eine Winkeltransformation um den Winkel φ vornehmen. Auch die umgekehrte Reihenfolge der Teiltransformationen führt zum Ziele. Es gilt daher der Satz:

Satz I. Die Ähnlichkeitstransformation (q, φ) ist das Resultat aus der Streckentransformation (q) und der Winkeltransformation (φ) in beliebiger Reihenfolge.

Eine noch klarere Einsicht in die der Vektorkinematik des Transformators zugrunde liegende Ähnlichkeitstransformation erhalten wir durch Betrachtung von Abb. 6. Darin sind $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$ die festbleibenden Vektoren des Nullsystems und aus $\mathfrak{E}_2^0$, $\mathfrak{S}_1''$, $\mathfrak{S}_2''$ gehen bei der Transformation die um den Winkel φ verdrehten und im Spannungsverhältnisse q proportionalen Vektoren $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$ hervor. Die Dreiecke $OE_2^0E_2$,

Winkel $\gamma_1'' = \angle(\mathfrak{E}_2, \mathfrak{S}_1'')$ und $\gamma_2'' = \angle(\mathfrak{E}_2, \mathfrak{S}_2'')$ zwei Kreise (Hilfskreise I und II) mit den Peripheriewinkeln γ_1'' und γ_2'' über den festen Sehnen $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$.

Zur Ausführung beliebiger Winkeltransformationen konstruiert man aus den Größen des Nullsystems das „Transformationsystem“, bestehend aus dem Spannungskreise, den beiden Strom- und Hilfskreisen. Die Winkeltransformation vollzieht sich dann in äußerst einfacher Weise. Ist z. B. die Stellung des Spannungsvektors $\mathfrak{E}_2$ gegeben, so schneidet dessen Richtungslinie auf den Hilfskreisen zwei Punkte H_1 und H_2 heraus, durch welche die Radien der Strompunkte J_1 und J_2 verlaufen. Die Transformation der beiden Punkte J_1^0 und J_2^0 in die Punkte

$M_1 J_1^0 J_1$ und $M_2 J_2^0 J_2$ (Transformationsdreiecke) enthalten deshalb alle den Winkel φ zwischen Seiten, die zueinander im Verhältnisse q stehen, und sind einander also ähnlich. Diese Dreiecke befinden sich aber nicht in ähnlicher Lage, sondern die „Stromdreiecke“ sind gegenüber dem „Spannungsdreiecke“ um die unveränderlichen Winkel γ_1'' und γ_2'' verdreht. Aus allem resultiert der Satz:

Abb. 6. Ähnlichkeitstransformation.

Satz II. Die Spitzen des Spannungsvektors $\mathfrak{E}_2$ und der resultierenden Stromvektoren $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ liegen für jede Diagrammstellung in den dritten Eckpunkten von über den Vektoren $\mathfrak{E}_2^0$, $\mathfrak{J}_1''$ und $\mathfrak{J}_2''$ des Nullsystems errichteten ähnlichen Dreiecken.

Daraus ergibt sich sofort folgendes:

Transformationsprinzip. Bei der Ähnlichkeitstransformation bewegen sich die Spitzen der Vektoren $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ um die Pole O , M_1 , M_2 auf Kurven k , k_1 , k_2 , die einander in den Verhältnissen $\mathfrak{E}_2^0 : \mathfrak{J}_1'' : \mathfrak{J}_2''$ ähnlich und gegeneinander um die Winkel von $\mathfrak{E}_2^0$, $\mathfrak{J}_1''$, $\mathfrak{J}_2''$ verdreht sind.

Ist also z. B. irgend eine der Kurven ein Kreis, so sind dies auch die andern.

Eine Bestätigung dafür gibt die Abb. 5 der Winkeltransformation, die jedoch nicht dem allgemeinen Falle entspricht, da die Kreise zu den Polen O , M_1 und M_2 auch exzentrisch liegen können.

Aus der Ähnlichkeit der Transformationsdreiecke, in welchen für jede beliebige Diagrammstellung die Seiten $\mathfrak{E}_2^0$, $\mathfrak{J}_1''$, $\mathfrak{J}_2''$ in gleicher Konfiguration und Länge vorkommen, folgt unter Berücksichtigung von:

$$\gamma_1'' = \angle(\mathfrak{E}_2^0, \mathfrak{J}_1'')$$

$$\gamma_2'' = \angle(\mathfrak{E}_2^0, \mathfrak{J}_2'')$$

für die Winkel σ_1 , σ_2 , τ_1 , τ_2 der Abb. 6:

$$\sigma_1 = \tau_1 = \gamma_1'' - 180^\circ \quad \dots \quad 64)$$

$$\sigma_2 = \tau_2 = \gamma_2'' \quad \dots \quad 65)$$

Die Schenkel jedes dieser Winkel gehen aber durch zwei feste Punkte, nämlich:

von σ_1	durch	O	und	M_1
„ σ_2	„	O	„	M_2
„ τ_1	„	E_2^0	„	J_1^0
„ τ_2	„	E_2^0	„	J_2^0

die geometrischen Örter ihrer Scheitelpunkte S_1, S_2, T_1, T_2 sind daher Kreise mit den Peripheriewinkeln $\gamma_1'' - 180^\circ$ bzw. $\gamma_2'' - 180^\circ$ über den Verbindungsstrecken entsprechender Punkte. Die Kreise durch O, M_1, M_2 (vgl. Abb. 7) bezeichnen wir als Hilfskreise I und II und die Kreise durch E_2^0, J_1^0, J_2^0 als Transformationskreise I und II.

Abb. 7. Ähnlichkeitstransformation (Konstruktion).

Das Nullsystem und diese Kreise bilden das „Transformationssystem“, mit welchem aus der Nullstellung des Transformators in sehr einfacher Weise die jedem Betriebszustande entsprechende Diagrammstellung abgeleitet werden kann.

Ist die Lage des Spannungsvektors $\mathcal{E}_2$ in der Diagrammebene bekannt, so voll zieht sich für die Stromvektoren die Ähnlichkeitstransformation aus dem Nullsystem wie folgt: durch den Endpunkt E_2 (Spannungspunkt) des Vektors $\mathcal{E}_2$ lege man die unbegrenzte Gerade (Spannungsgerade) durch den Diagrammpol O und die Gerade nach der Spitze E_2^0 des Vektors $\mathcal{E}_2^0$ (Transformationsstrahl).

Die Spannungsgerade schneidet die Hilfskreise außer in O noch in zwei Punkten S_1 und S_2 und der Transformationsstrahl die Transformationskreise außer in E_2^0 noch in den Punkten T_1 und T_2 . Es liegt dann:

der Endpunkt J_1 von $\mathfrak{J}_1$ im Schnitte der Sekanten $M_1 S_1$; $J_1^0 T_1$
und „ „ J_2 „ $\mathfrak{J}_2$ „ „ „ „ $M_2 S_2$; $J_2^0 T_2$.

Die Richtigkeit der Konstruktion erkennt man sofort durch Nachweis der Übereinstimmung der resultierenden Transformationsdreiecke mit denjenigen der Abb. 6.

Bei gegebenem Transformationssystem sind für eine Transformation im ganzen sechs Linien nötig; nämlich die Spannungsgerade, der Transformationsstrahl und vier Hilfssekanten.

Ist für eine Transformation statt des Spannungsvektors einer der Stromvektoren vorgeschrieben, so sind genau dieselben Hilfslinien zu zeichnen wie vorher; sie ergeben sich aber beim Konstruieren in anderer Reihenfolge.

Transformationsaufgaben.

Mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation lassen sich eine Reihe interessanter Aufgaben über den Transformator lösen. Zur Orientierung will ich hier ein für die Anwendungen wichtiges Beispiel behandeln.

Das Nullsystem eines Transformators bestimmt sich, abgesehen vom Maßstabe, aus den Diagrammen eines ersten und zweiten Kurzschlußversuches, wenn man $q = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = 1$ und $\varepsilon = \angle(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 180^\circ$ annimmt. Es ist daher nach S. 261 fest-

gelegt durch die fünf Konstanten R_1, R_2, L_1, L_2, M des Transformators und die Kreisfrequenz ω des Wechselstromes. Statt dieser sechs Bestimmungsgrößen (Systemkonstanten) können auch sechs bekannte Funktionen derselben gegeben sein.

Wir wollen nun untersuchen, ob es möglich sei, das Nullsystem eines Transformators, dessen Konstanten R_1, R_2, L_1, L_2, M nicht bekannt sind, für eine gegebene Frequenz f aus irgend zwei Betriebszuständen mit sinusförmigen Spannungen und Strömen zu ermitteln.

Wir messen beim Betriebszustand I:

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2; \quad \varepsilon_{12} = \angle(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2); \quad \gamma_1 = \angle(\mathcal{E}_1, \mathfrak{I}_1); \quad \gamma_2 = \angle(\mathcal{E}_1, \mathfrak{I}_2)$$

und beim Betriebszustand II:

$$\mathcal{E}_I, \mathcal{E}_{II}, \mathfrak{I}_I; \quad \varepsilon_{II} = \angle(\mathcal{E}_I, \mathcal{E}_{II}); \quad \gamma_I = \angle(\mathcal{E}_I, \mathfrak{I}_I).$$

Nun sind aber nach früherem:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{I}_1 \\ \mathfrak{I}_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{durch die Ähnlichkeitstransformation} \\ \text{aus dem Nullsystem bestimmbare Funktionen} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathfrak{I}_1 \\ \mathfrak{I}_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{array}} \right\} \text{ von } \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \varepsilon_{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{I}_I \\ \gamma_I \end{array} \right\} \text{ desgleichen} \quad \text{von } \mathcal{E}_I, \mathcal{E}_{II}, \varepsilon_{II}.$$

Da die Ähnlichkeitstransformation für irgend ein beliebiges Nullsystem ohne weiteres ausführbar ist, repräsentieren diese Funktionen sechs selbständige Gleichungen, in welchen bloß die sechs Bestimmungsgrößen des Nullsystems unbekannt sind. Es muß also möglich sein, das Nullsystem aus den gemessenen Größen zu finden.

Für beide Betriebszustände denken wir uns die Diagrammstellungen konstruiert. Durch ähnliche Reduktion und entsprechende Verschiebung und Drehung bringen wir dieselben in solche Orientierung, daß $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_I$ der Größe und Richtung nach mit der in der Nulllinie der Diagrammebene liegenden Normalstrecke zusammenfallen. Wir wollen annehmen, die Konfiguration der Vektoren $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_I, \mathcal{E}_2, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathcal{E}_{II}, \mathfrak{I}_I$ sei dabei so herausgekommen, wie dies die Abb. 8 zeigt. Zwecks einer Analysis für die Konstruktion des Nullsystems aus diesen Vektoren wollen wir vorerst das Nullsystem jener Abbildung als bekannt voraussetzen. Die Stromvektoren $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_I$ ergeben sich dann aus den absoluten Beträgen und Stellungen der Spannungsvektoren $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_{II}$ durch die Ähnlichkeitstransformation, d. h. es müssen die Vierecke: $OE_2^0 E_2 E_{II}; M_1 J_1^0 J_1 J_I$

und die Dreiecke $OE_2^0 E_2$; $M_2 J_2^0 J_2$ einander ähnlich sein. Daraus resultiert aber die folgende einfache Konstruktion für die oben gestellte Aufgabe.

Am Konfigurationssystem $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_{II}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_I$ konstruiere man zuerst das Viereck $OE_2^0 E_2 E_{II}$ und dann ein dazu ähnliches Viereck, ausgehend von der Verbindungsstrecke $J_1 J_I$ der Spitzen der Stromvektoren $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_I$, die im ersten Viereck der Strecke $E_2 E_{II}$ entspricht. Dadurch findet man die Lage der Punkte J_1^0 und M_1 des Nullsystems. Gleich lang und entgegengesetzt gerichtet wie $M_1 J_1^0$ ist die Strecke OM_2 (vgl. S. 264 vorletzten Absatz). Über der nunmehr bekannten Strecke $J_2 M_2$ kann jetzt noch das zum Dreieck $OE_2^0 E_2$ ähnliche Dreieck $M_2 J_2^0 J_2$ angegeben werden; damit ist aber das ganze Nullsystem gefunden.

Abb. 8. Transformationsaufgabe.

Die hier behandelte Aufgabe löst in einfacher Weise eine andere sehr wichtige Aufgabe.

Für einen Transformator sollen aus der Lage und Größe der Spannungs- und Stromvektoren von zwei mit der Frequenz f aufgenommenen Belastungsversuchen die Vektoren irgendeines neuen Versuches dieser Frequenz angegeben werden.

Die Aufgabe läßt sich in exakter Weise ohne jede Rechnung wie folgt lösen:

Man ermittelt zuerst, wie vorher gezeigt wurde, das der Frequenz f entsprechende

Nullsystem des Transformators und daraus das Transformationssystem mit seinen beiden Hilfs- und Transformationskreisen, worauf die Vektoren des neuen Betriebszustandes nach der im letzten Abschnitte behandelten Methode der Ähnlichkeitstransformation leicht zu finden sind.

Zwei einander gegenüberstehende Spezialisierungen dieser Aufgabe sind:

- I. Die Bestimmung der Vektorsysteme I und II der Kurzschlußversuche aus den Vektorkonfigurationen von zwei Belastungsversuchen.
- II. Die Bestimmung der Leerlaufdiagramme aus zwei Belastungsdiagrammen.

Die Spezialisierung I wird direkt erledigt durch die am Anfange dieses Abschnittes behandelte Aufgabe; denn die Vektorsysteme I und II sind bereits im Nullsysteme enthalten und lassen sich daraus leicht trennen.

Die Spezialisierung II erfordert auch die Konstruktion des Nullsystemes und nachträglich noch eine Ähnlichkeitstransformation, bei welcher der Endpunkt des verschwindenden Stromvektors im Diagrammpole O vorgeschrieben ist. Die Transformation ist hierdurch bestimmt und wird am einfachsten unter Zugrundelegung der Konstruktion von Abb. 6 vollzogen.

Belastungsdiagramme des Transformators.

Der Belastungskreis eines Transformators läßt sich bei Verwendung von sinusförmigen Strömen für die Beurteilung an den Transformator клемmen stets reduzieren auf eine Serieschaltung von Ohmschem Widerstande R , Induktivität L und Kapazität C .

Der Einfluß von L und C wird gleichzeitig berücksichtigt durch die resultierende Reaktanz

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad 66)$$

Die Konstanten R und S bedingen eine Phasenverschiebung des Belastungsstromes gegenüber der Spannung an den Klemmen des Transformators um den Winkel

$$\gamma = \arctg \frac{S}{R} \quad 67)$$

Weil die dem Belastungskreise zugeführte Energie für den Transformator einen Energieverlust (eine Energie, die in demselben nicht in Stromwärme umgewandelt wird) bedeutet, liegt γ in den Grenzen $\frac{\pi}{2} < \gamma < 3\frac{\pi}{2}$ und ist also für ein positives S größer und für ein negatives S kleiner als π . Für den Leistungsfaktor des im Nutzkreise gewonnenen Effektes kommt der Winkel $\gamma_n = \gamma - \pi$ in Frage. Dieser liegt also in den Grenzen $-\frac{\pi}{2} < \gamma_n < +\frac{\pi}{2}$ und hat das Vorzeichen von S.

Für die nachfolgenden Diagramme der Schrift wurde angenommen, daß der Transformator sekundär über einen Kreis (R, L, C) belastet sei. Für konstante R und S sind die Vektoren $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{E}_2$ proportional der primären Klemmenspannung $\mathfrak{E}_1$. Da wir aber in unseren Diagrammen den Vektor $\mathfrak{E}_1$ immer durch dieselbe Normalstrecke darstellen, gleichviel wie groß er in elektrischem Maße an und für sich sei, so sind bei gegebenem Nullsysteme die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{E}_2$ in der Diagrammebene schon bloß durch die Annahme von R und S bestimmt. Von diesen Punkten kann nur der Endpunkt J_2 von $\mathfrak{S}_2$ direkt ermittelt werden; die andern ergeben sich dann daraus durch eine Ähnlichkeitstransformation.

In Abb. 9 bedeuten $\mathfrak{E}_2$ und OJ_2 die sekundären Vektoren für Spannung und Strom, deren Lage und Größe wir suchen; sie sind gegeneinander um den Winkel γ verschoben. Zufolge des Transformationsprinzipes muß J_2 auf einem Strahle K_2J_2 liegen, der gegen den Vektor $\mathfrak{S}_2''$ des Nullsystems um den gleichen Winkel φ verdreht ist, wie $\mathfrak{E}_2$ gegen $\mathfrak{E}_2^0$. Die Rückverlängerung des Spannungsvektors $\mathfrak{E}_2$ schneidet deshalb den Strahl K_2J_2 im Punkte P unter dem Winkel $\gamma_2'' = \angle(\mathfrak{E}_2^0, \mathfrak{S}_2'')$ des Nullsystems. Mit Hilfe des Dreieckes J_2OP der Abb. 9 folgt nun:

$$\chi = \angle K_2J_2O = \gamma - \gamma_2'' \quad 68)$$

Ist das Verhältnis $\frac{S}{R}$ konstant, so ist nach 67) auch γ unveränderlich, und es ergibt sich, da dann auch χ konstant bleibt, als erster geometrischer Ort des Endpunktes J_2 von $\mathfrak{S}_2$ ein Kreis k_p über der Sehne K_2O mit χ als Peripheriewinkel.

Da diesem Kreise nach dem Transformationsprinzip für die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ wieder zwei Kreise als Örter entsprechen, gilt der Satz:

Satz I: Jeder Belastungsänderung des Transformators, die so vorgenommen wird, daß sich der Leistungsfaktor des Belastungskreises nicht ändert, liegt ein Kreisdiagramm zugrunde.

Die Vektoren $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{S}_2$ des Sekundärkreises haben noch der bekannten Wechselstromformel zu genügen:

$$\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{S}_2} = \sqrt{R^2 + S^2} = \varrho \quad 69)$$

Abb. 9. Hilfskonstruktion für Belastungsdiagramme.

und nach dem Transformationsprinzip folgt mit der Bezeichnung $\mathfrak{R}$ für den Vektor $K_2 J_2$ des Dreiecks $J_2 K_2 O$:

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}_2''} = \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_2^0} = q,$$

woraus nach 69) hervorgeht:

$$v = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}_2} = \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} \cdot \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_2^0} = \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{E}_2^0} \cdot q,$$

und also:

$$v = q \cdot \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{E}_2^0} \dots \dots \dots 70)$$

Führt man hierin noch $\mathfrak{S}_2''$ aus Tabelle II, S. 261. ein, so folgt das Resultat:

$$v = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{q}{\mathfrak{E}_2^0} \dots \dots \dots 71)$$

v stellt das Verhältnis der Abstände des Strompunktes J_2 von den beiden festen Punkten K_2 und O dar. Bei gleichbleibender Frequenz ist v konstant, wenn der scheinbare Widerstand des Belastungskreises nicht variiert. Die Beziehung:

$$v = \text{konst.}$$

liefert als zweiten geometrischen Ort des gesuchten Punktes J_2 denjenigen Apollonischen Kreis k_a , der die Strecke OK_2 innen und außen im Verhältnis v teilt. Zur Konstruktion des Kreises dient also die Relation:

$$\frac{K_2 U}{OU} = - \frac{K_2 V}{OV} = v \dots \dots \dots 72)$$

Aus dem Apollonischen Kreise k_a gehen bei der Ähnlichkeitstransformation als Orte für die Spitzen der beiden Vektoren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ wieder zwei Kreise hervor. Wir haben daher den Satz:

Satz II: Jeder Belastungsänderung des Transformators, bei welcher der scheinbare Widerstand des Belastungskreises gleich bleibt, entspricht ein Kreisdiagramm.

Die durch 68) und 70) bzw. 71) bestimmten Kreise schneiden sich in dem gesuchten Endpunkte J_2 des sekundären Stromvektors $\mathfrak{S}_2$. Die Endpunkte J_1 und E_2 der zugehörigen Vektoren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ findet man daraus am einfachsten vermittelt der Konstruktion von Abb. 6 über die Ähnlichkeitstransformation.

Kreisdiagramm für rein Ohmsche Belastung des Transformators.

Nach Satz I des vorigen Abschnittes erhält man für die Belastung des Transformators über induktions- und kapazitätslose Widerstände ein Kreisdiagramm; d. h. die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{E}_2$ bewegen sich, wenn Änderungen im Ohmschen Nutzwiderstand vorgenommen werden, auf Kreisen. Da in diesem Falle $\mathfrak{E}_2$ gegen $\mathfrak{S}_2$ um 180° verschoben ist, muß nach 68) sein:

$$\chi = 180^\circ - \gamma_2'' \dots \dots \dots 73)$$

Damit ist aber der durch die Punkte K_2 und O gehende „Stromkreis II“ für den Endpunkt J_2 des Vektors $\mathfrak{S}_2$ durch das Nullsystem bestimmt (vgl. Abb. 10). Diesem Kreise entsprechen durch die Ähnlichkeitstransformation für die Spitze J_1 von $\mathfrak{S}_1$ der „Stromkreis I“ und für die Spitze E_2 von $\mathfrak{E}_2$ der „Spannungskreis“. Da für sekundären Kurzschluß das Vektorsystem II verschwindet, muß der Endpunkt K_1 des Nullsystemvektors $\mathfrak{S}_1'$ auf dem Stromkreise I und der Diagrammpol O auf dem Spannungskreise liegen.

Für die Konstruktion der beiden noch unbekannten Kreise braucht man also bloß die Mittelpunkte M_1 und M_e aus M_2 zu transformieren und findet ihre Radien dann ohne weiteres aus M_1K_1 und M_eO .

Die Mittelpunktsskonstruktion ergibt sich nach dem Transformationsprinzip S. 269 auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke $J_2^0K_2M_2$, $E_2^0OM_e$ und $J_1^0K_1M_1$; wobei das erste vollständig bekannt ist, und die beiden andern durch die Vektoren $\mathfrak{E}_2^0$ und $\mathfrak{J}_1''$ des Nullsystems in ihrer Lage und Größe festgelegt sind.

Für die weitem Hilfsttransformationen empfiehlt sich auch hier die Einführung der in Abb. 7 verwendeten Hilfskreise I und II. Der Hilfskreis II enthält über der Sehne $OK_2 = \mathfrak{J}_2'$ nach der gleichen Seite den Peripheriewinkel γ_2'' wie der Stromkreis II und ist also mit diesem identisch. Der Hilfskreis I (in Abb. 10 einfach als Hilfskreis bezeichnet) ist durch den Winkel $\gamma_1'' - 180^\circ$ als Peripheriewinkel über der Sehne $OK_1 = \mathfrak{J}_1'$ bestimmt. Irgend eine Sekante E_2O des Spannungskreises durch O (Spannungsgerade) schneidet den Stromkreis II in einem Punkte J_2 , der demselben entsprechenden Sehne J_2K_2 und den Hilfskreis in einem Punkte H , der dem Stromkreise I entsprechenden Sekante HK_1 . Durch diese Sekanten bzw. Sehnen werden die Punkte des Spannungskreises und der Stromkreise einander der Ähnlichkeitstransformation gemäß zugeordnet. Wenn die Richtungslinie der Vektoren $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{J}_2$ (Spannungsgerade) als bekannt vorausgesetzt wird, so ist zur Konstruktion einer beliebigen Diagrammstellung eigentlich bloß eine Hilfslinie nötig; nämlich der Hilfsstrahl HK_1 , welcher auf dem Stromkreise I den Endpunkt J_1 des primären Stromvektors $\mathfrak{J}_1$ herauschneidet.

Die Verwendung der Hilfskreise gestattet auch eine abgekürzte Konstruktion der Mittelpunkte für den Spannungskreis und den Stromkreis I. Dem Durchmesser K_2N vom Stromkreise II entspricht nämlich für den Spannungskreis die Diametrale ON und dieser die Diametrale K_1H_1 für den Stromkreis I. Um nun auf diesen Mittelpunktsgerechten M_e und M_1 selber zu finden, genügt es, noch den Winkel $\vartheta = \angle K_2J_2^0M_2$ von E_2^0 an $\mathfrak{E}_2^0$ und von J_1^0 an $\mathfrak{J}_1'$ anzutragen (vgl. dazu in der Abb. 10).

Die Diagrammstellung für einen bestimmten Belastungswiderstand R findet man leicht unter Zuhilfenahme von Formel 70), die auf den vorliegenden Fall spezialisiert lautet:

$$v = R \cdot \frac{\mathfrak{J}_2''}{\mathfrak{E}_2^0} \dots \dots \dots 74)$$

Es ist dazu die Konstruktion des auf S. 273 erwähnten Apollonischen Kreises erforderlich.

Die gewöhnliche Belastung des Transformators liegt zwischen den beiden Grenz-

Abb. 10. Kreisdiagramm für rein Ohmsche Belastung.

fällen — Kurzschluß und Leerlauf. Für den sekundären Kurzschluß erhält man auf den Stromkreisen I und II die „Kurzschlußpunkte K_1 und K_2 “ als Endpunkte der Stromvektoren. Im sekundären Leerlaufe ist der Strom $\mathfrak{J}_2$ gleich Null und die Spannungsgerade $E_2 J_2$ wird dann im Diagrammpole O zur Tangente (t) an den Stromkreis II. Mittels t ergeben sich die Leerlaufspunkte L_t auf dem Spannungskreise und L_1 auf dem Stromkreise I. Da nun γ_2'' stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist [es folgt dies aus dem zu 53) analogen Energiesatze des zweiten Kurzschlußversuches], kommen für alle möglichen Belastungsänderungen bloß die kürzern Bogenstücke

$K_1 L_1$ auf dem Stromkreise I,
 $K_2 O$ „ „ „ II
 und OL_t „ „ Spannungskreise
 in Betracht.

Heylanddiagramm.

Die Spezialisierung des Belastungsdiagrammes des vorigen Abschnittes auf den Fall, wo die Widerstände R_1 und R_2 der Transformatorwicklungen vernachlässigt werden, liefert uns das seiner Anwendungen wegen wichtige „Heylanddiagramm“¹⁾. Bekanntlich läßt sich das Motordigramm der asynchronen Drehstrommotoren näherungsweise auf dieses für den ruhenden Transformator geltende Diagramm zurückführen. Bei den Asynchronmotoren ist der Ohmsche Widerstand in der Statorwicklung (Primärwicklung) meistens vernachlässigbar und der Rotor- und Anlaßwiderstand (im Sekundärkreise) lassen sich im sekundären Nutzwiderstande R berücksichtigen. Auf R wirkt dann die Spannung $\mathfrak{E}_2$.

Nach Tabelle III, S. 261, dienen zur Bestimmung des Nullsystemes für $R_1 = R_2 = 0$ die Winkel:

$$\gamma_1'' = 3\frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2'' = \frac{\pi}{2}, \quad \delta' = \pi, \quad \delta'' = \pi, \quad \varepsilon = \pi, \quad 75)$$

d. h. die Stromvektoren $\mathfrak{J}_1', \mathfrak{J}_2', \mathfrak{J}_1'', \mathfrak{J}_2''$ fallen alle in dieselbe Gerade, und die Spannungsvektoren $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2^0$ stehen senkrecht darauf. Nach 68) wird deshalb auch $\chi = \frac{\pi}{2}$, und aus den Kreisbogen $K_1 L_1, K_2 O, OL_t$ von Abb. 10 gehen die Halbkreise über den Durchmessern $K_1 L_1, K_2 O, OL_e$ der Abb. 11a hervor. Aus dem Hilfskreise der Abb. 10 entsteht in Abb. 11a wegen $\gamma_1'' - \pi = \frac{\pi}{2}$ auch ein Halbkreis über $K_1 O$ als Durchmesser. Die Konstruktion einer beliebigen Diagrammstellung ist sonst gleich wie vorher und wird aus Abb. 11a gut ersichtlich.

Die Kreisdurchmesser des Diagrammes lassen sich in der folgenden einfachen Weise aus den Induktionskoeffizienten des Transformators und der primären Klemmenspannung $\mathfrak{E}_1$ berechnen.

In Abb. 11a ist nach dem Transformationsprinzip (S. 269):

$$\frac{d}{\mathfrak{E}_1} = \frac{\mathfrak{J}_2'}{\mathfrak{J}_2''} 76)$$

Nun ist aber nach Tabelle II, S. 261, mit Berücksichtigung von $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2^0$ und Gl. 35):

$$\frac{\mathfrak{J}_2'}{\mathfrak{J}_2''} = i \cdot \frac{L_2}{M} = \frac{M}{L_1},$$

und also:

$$d = \mathfrak{E}_1 \cdot \frac{M}{L_1} 77)$$

¹⁾ ETZ 1894, S. 561.

Da außerdem $\mathfrak{S}_2' = \mathfrak{S}_1''$ (vgl. im Nullsystem Abb. 3), ist nach 76) und dem Transformationsprinzip:

$$\frac{d}{\mathfrak{E}_1} = \frac{\mathfrak{S}_1''}{\mathfrak{S}_2''} = \frac{d_1}{d_2} \dots \dots \dots 78)$$

und also auch:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{M}{L_1} \dots \dots \dots 79)$$

Aus Abb. 11a folgt ferner:

$$\frac{d_2}{d_H} = \frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_1''},$$

und weil nach Tabelle II, S. 261, und Formel 35)

$$\frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_1''} = \lambda \cdot \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2}$$

ist, findet man:

$$\frac{d_2}{d_H} = \frac{M}{L_2} \dots \dots \dots 80)$$

Aus 79) und 80) geht noch die interessante Beziehung

$$\frac{d_1}{d_H} = k^2 \dots \dots \dots 81)$$

hervor, worin k den Kopplungskoeffizienten des Transformators darstellt.

Um nun noch den Zusammenhang der Durchmesser d_1 und d_2 der beiden Stromkreise mit dem Durchmesser d des Spannungskreises und der primären Klemmenspannung $\mathfrak{E}_1$ zu bekommen, berechnen wir zunächst den Sekundärwiderstand R_g , der dem Verhältnis $v_g = 1$ der Formel 74) entspricht. Es ist dann mit Tabelle II, S. 261:

$$v_g = R_g \cdot \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{E}_2^0} = \frac{R_g}{\nu \cdot S_2} = 1.$$

Nach 56) haben wir hier noch zu setzen: $\nu = 1 - k^2$, und erhalten

$$R_g = (1 - k^2) S_2 \dots \dots 82)$$

Beiläufig bemerkt, stellt R_g denjenigen sekundären Widerstand dar, bei welchem die vom Transformator primär aufgenommene Leistung ein Maximum ist; denn weil $v_g = \frac{K_2 J_2}{O J_2} = 1$ ist, halbiert der Hilfsstrahl OH den rechten Winkel bei O , und J_1 steht im Stromkreise I, wie es der maximalen Leistung entspricht, im obersten Punkte.

Für die betrachtete Diagrammstellung ($v_g = 1$) gilt nun aber einerseits nach der Abb. 11a und andererseits nach dem Ohmschen Gesetze:

Abb. 11a und 11b. Heylanddiagramme.

$$\left(\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{S}_2}\right)_g = \frac{d}{d_2} = R_g \dots \dots \dots 83)$$

und also mit 82)

$$\frac{d}{d_2} = (1 - k^2) S_2 \dots \dots \dots 84)$$

Die Berechnung des Diagrammes erfolgt auf Grund der Formeln 77), 79), 80) bzw. 81) und 84), die ich hier in dafür geeigneter Weise noch zusammenstellen will.

$$\left. \begin{aligned} d &= \mathfrak{E}_1 \cdot \frac{M}{L_1} \\ d_2 &= \frac{d}{(1 - k^2) \omega L_2} \\ d_1 &= d_2 \cdot \frac{M}{L_1}, \quad d_H = d_2 \cdot \frac{L_2}{M}, \quad (d_1 = k^2 \cdot d_H) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 85)$$

In Abb. 11b sind an Stelle der Ströme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die magnetischen Flüsse

$$\Phi_{11} = \mathfrak{S}_1 L_1, \dots \dots \dots 86)$$

$$\Phi_{21} = \mathfrak{S}_2 M \dots \dots \dots 87)$$

vektoriell aufgetragen. Vom Spannungskreise abgesehen, den wir unverändert lassen, hat sich dann die Figur rechts von $\mathfrak{E}_1$ dem Faktor L_1 und die Figur links von $\mathfrak{E}_1$ dem Faktor M entsprechend im Maßstabe (ähnlich) vergrößert bzw. verkleinert.

Aus den Durchmessern d_1 und d_2 der Stromkreise I und II von Abb. 11a sind in Abb. 11b wegen 79) zwei gleichgroße Durchmesser

$$\left. \begin{aligned} D &= d_1 L_1 \\ D &= d_2 M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 88)$$

entstanden. In der neuen Darstellung ist der Stromkreis II entbehrlich, denn die Größe und Richtung des Vektors Φ_{21} findet man auch in der zu OJ_2 parallelen und gleichlangen Strecke J_1L . Der vom Diagrammpole O bis an den Punkt L reichende Vektor

$$\Phi_1 = \mathfrak{S}_0 L_1 \dots \dots \dots 89)$$

stellt als geometrische Summe der Vektoren Φ_{11} und Φ_{21} den resultierenden Primärfluß dar. Wenn $\mathfrak{E}_1$ konstant ist, so bleibt in Übereinstimmung mit den Folgerungen aus dem Induktionsgesetze auch Φ_1 bei jeder beliebigen Belastungsänderung von derselben Größe.

Beim praktischen Transformator ($k \sim 1$) gilt näherungsweise nach 79)

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{M}{L_1} \sim \frac{c \cdot z_1 z_2}{c \cdot z_1^2} = \frac{z_2}{z_1}$$

(c bedeutet eine Konstante und z_1 bzw. z_2 die primäre bzw. sekundäre Windungszahl des Transformators), d. h. man kann unter Zugrundelegung der Approximationsformel

$$d_1 z_1 = d_2 z_2$$

für die zweite Darstellung (Abb. 11b) anstatt der Flüsse auch die Amperewindungen auftragen.

Das Diagramm Abb. 11b ist identisch mit dem nach seinem Erfinder benannten „Heylanddiagramm“. Darin trägt der Kreis rechts als Ort für die Endpunkte der Vektoren Φ_{11} und Φ_{21} den Namen „Heylandkreis“.

Wir haben das Heylanddiagramm erhalten als Spezialisierung des Belastungsdiagrammes des vorhergehenden Abschnittes und jenes als einen Spezialfall der Ähnlichkeitstransformation. Mithin ist das Heylanddiagramm eine Spezialisierung zweiter Ordnung aus der Ähnlichkeitstransformation. Es wurde hier nicht mit Hilfe von

Streuungskoeffizienten, sondern auf einfachste Weise aus den Induktionskoeffizienten des Transformators bestimmt [vgl. 85)].

Energiesatz für den Transformator.

Für die dem Transformator im Zeitelemente dt von außen zugeführte elektrische Energie findet man mit Hilfe der Transformatorgleichungen 1) und 2) folgende Zerlegung:

$$dE = dW + dU, \quad \dots \dots \dots 90)$$

wo die

$$\left. \begin{array}{l} \text{zugeführte elektrische Energie: } dE = e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt \\ \text{entwickelte Stromwärme: } dW = i_1^2 R_1 dt + i_2^2 R_2 dt \\ \text{entstandene magn. Energie: } dU = L_1 d\left(\frac{i_1^2}{2}\right) + M d(i_1 i_2) + L_2 d\left(\frac{i_2^2}{2}\right) \end{array} \right\} \dots \dots 91)$$

ist. Die während der Periodenzeit T eines periodisch verlaufenden Vorganges (e_1, e_2, i_1, i_2 sind periodische Funktionen der Zeit) umgesetzte magnetische Energie ist Null, und man erhält deshalb aus 90) mit den Bezeichnungen von:

$$\left. \begin{array}{l} \text{der zugeführten Leistung} \left\{ \begin{array}{l} \text{primär: } P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T e_1 i_1 dt \\ \text{sekundär: } P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T e_2 i_2 dt \end{array} \right. \\ \text{dem Jouleschen Effekte} \left\{ \begin{array}{l} \text{primär: } Q_1 = \frac{R_1}{T} \int_0^T i_1^2 dt = R_1 \cdot I_1^2 \\ \text{sekundär: } Q_2 = \frac{R_2}{T} \int_0^T i_2^2 dt = R_2 \cdot I_2^2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \dots \dots \dots 92)$$

(I_1 und I_2 bedeuten die Effektivwerte der Ströme i_1 und i_2)

die folgende auf die Zeiteinheit bezogene mittlere Energiegleichung:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{T} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 \\ P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2, \end{array} \right\} \dots \dots \dots 93)$$

oder

was in Worten lautet:

Mittlerer Energiesatz: Der in den Transformator von außen eingeführte mittlere Effekt ($P_1 + P_2$) wird in demselben vollständig in Stromwärme ($Q_1 + Q_2$) umgewandelt.

Nehmen wir sinusförmige Spannungen und Ströme an

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t) \quad i_1 = \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t - \gamma_I) \\ e_2 = \mathfrak{E}_2 \sin(\omega t - \varepsilon) \quad i_2 = \mathfrak{I}_2 \sin(\omega t - \varepsilon - \gamma_{II}) \end{array} \right\} \dots \dots 94)$$

$$[\varepsilon = \angle(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)],$$

so genügen diese der Gl. 90) mit Berücksichtigung von 91), wenn die Amplituden $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ und die Phasenwinkel $\gamma_I = \angle(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{I}_1), \gamma_{II} = \angle(\mathfrak{E}_2, \mathfrak{I}_2)$ bei der gegebenen Kreisfrequenz ω mit Hilfe der Formeln auf S. 261 in ihrer Abhängigkeit von $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \varepsilon$ und

den Konstanten des Transformators bestimmt werden. Außerdem ergibt die Auswertung der Integrale in 92) mit den Spannungen und Strömen von 94) für 93) die bekannte Gleichung:

$$\mathcal{E}_1 \mathfrak{I}_1 \cos \gamma_I + \mathcal{E}_2 \mathfrak{I}_2 \cos \gamma_{II} = \mathfrak{I}_1^2 R_1 + \mathfrak{I}_2^2 R_2 \dots \dots \dots 95)$$

Links steht die mittlere zugeführte Energie und rechts die ihr äquivalente Joulesche Wärme des Transformators.

Die Gl. 95) muß für die Vektoren jeder durch die Ähnlichkeitstransformation aus dem Nullsystem des Transformators ableitbaren Diagrammstellung erfüllt sein. Daraus erhellt, daß der Nachweis des Energiesatzes 95) aus der Abb. 6 über die Ähnlichkeitstransformation eines der besten Mittel zur Kontrolle der Richtigkeit der letzteren ist. Im nunmehr folgenden soll dieser Nachweis geführt werden. Wir verwenden dazu Abb. 12. Darin findet man die Spannungs- und Stromvektoren in der gleichen Anordnung wie in Abb. 6; aber mit ausführlicherer Bezeichnung ihrer Phasenwinkel.

Abb. 12. Hilfsdiagramm für den Energiesatz.

Zum Beweise gehen wir aus vom doppelten Effekte

$$2P = \mathcal{E}_1 \mathfrak{I}_1 \cos \gamma_I + \mathcal{E}_2 \mathfrak{I}_2 \cos \gamma_{II} \dots \dots \dots 96)$$

der auf der linken Seite von Gl. 95) vorkommt und dessen Terme mittelst der Vektoren und Winkel der Abb. 12 wie folgt gedeutet werden können:

$$\mathcal{E}_1 \mathfrak{I}_1 \cos \gamma_I = \mathcal{E}_1 [\mathfrak{I}_1' \cos \gamma_1' + q \cdot \mathfrak{I}_1'' \cos (\gamma_1'' + \varepsilon)] \dots \dots \dots 97)$$

$$\mathcal{E}_2 \mathfrak{I}_2 \cos \gamma_{II} = q \mathcal{E}_2^0 [\mathfrak{I}_2' \cos (\gamma_2' - \varepsilon) + q \cdot \mathfrak{I}_2'' \cos \gamma_2''] \dots \dots \dots 98)$$

q hat darin die Bedeutung:

$$q = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_2^0} \dots \dots \dots 99)$$

Mit Berücksichtigung der Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_2^0 &= \mathcal{E}_1 \\ \mathfrak{I}_1'' &= \mathfrak{I}_2' \\ \gamma_1'' &= \gamma_2' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 100)$$

zwischen Größen des Nullsystemes (vgl. dazu die vorletzten Absätze auf den Seiten 264 und 266) folgt aus 97) und 98):

$$2P = 2q \mathcal{E}_1 \cdot \mathfrak{I}_2' \cos \gamma_1'' \cos \varepsilon + \mathcal{E}_1 \mathfrak{I}_1' \cos \gamma_1' + q^2 \mathcal{E}_2^0 \mathfrak{I}_2'' \cos \gamma_2'' \dots \dots 101)$$

Nun läßt sich die Identität beweisen:

$$\mathfrak{E}_1 \cos \gamma_1'' \cos \varepsilon = \mathfrak{I}_1' R_1 \cos(\delta' + \varepsilon) + \mathfrak{I}_2'' R_2 \cos(\delta' - \varepsilon) \quad 102)$$

Beweis. Aus den beiden letzten Formeln von Tabelle III S. 261 findet man leicht:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta' &= \frac{R_2}{\varrho_2} & \cos \delta' &= -\frac{S_2}{\varrho_2} \\ \sin \delta'' &= \frac{R_1}{\varrho_1} & \cos \delta'' &= -\frac{S_1}{\varrho_1} \end{aligned} \right\} \quad 103)$$

und also mit den Gleichungen für $\mathfrak{I}_1'$ und $\mathfrak{I}_2''$ aus Tabelle II S. 261

$$\frac{\mathfrak{I}_1' R_1}{\mathfrak{I}_2'' R_2} = \frac{\sin \delta''}{\sin \delta'}; \quad 104)$$

dies in 102) eingeführt ergibt:

$$\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{I}_2'' R_2} \cos \gamma_1'' \sin \delta' \cos \varepsilon = \sin \delta'' \cos(\delta' + \varepsilon) + \sin \delta' \cos(\delta'' - \varepsilon) \quad 105)$$

Hierin ist nach 103) und der letzten Formel von Tabelle II S. 261:

$$\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{I}_2'' R_2} \sin \delta' = \nu \quad 106)$$

Für die rechte Seite von 105) erhält man durch Entwicklung der beiden Cosinusfunktionen nach dem Additionstheoreme und entsprechend anderer Zusammenfassung der entstehenden Glieder:

$$\cos \varepsilon \cdot \sin(\delta' + \delta'') \quad 107)$$

Die Identität 102) ist also nach 105), 106) und 107) richtig, wenn die Gleichung Gültigkeit hat:

$$\nu = \frac{\sin(\delta' + \delta'')}{\cos \gamma_1''} \quad 108)$$

Nun besteht aber, wie einerseits mit 103) und andererseits mit 38), 39) und der zugehörigen Fußnote leicht einzusehen ist, die Doppelgleichung:

$$\sin(\delta' + \delta'') = \sin(\alpha_1 - \beta_1) = -\frac{R_1 S_2 + R_2 S_1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} \quad 109)$$

und aus 23) folgt mit 100) [wegen $\gamma_1'' = \gamma_2'$]:

$$\cos \gamma_1'' = -\sin \beta_1 \quad 110)$$

Wegen 109) und 110) schreibt sich nun 108) folgendermaßen:

$$\nu = -\frac{\sin(\alpha_1 - \beta_1)}{\sin \beta_1} = \cos \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \cos \beta_1 \quad 111)$$

und 111) mit 46), 48) und 49):

$$\nu = \frac{1 - \eta \lambda}{\nu} + \lambda \cdot \frac{\lambda - \eta}{\nu},$$

wonach mit Übereinstimmung von Gl. 40) herauskommt:

$$\nu^2 = 1 - 2 \eta \lambda + \lambda^2 \quad 112)$$

Damit ist aber der Nachweis für die Richtigkeit der Identität 102) erbracht.

Bevor wir von der Identität 102) Gebrauch machen, wollen wir zur Umformung der beiden letzten Glieder in 101) der für Kurzschluß geltenden mittleren Energiegleichung 53) Rechnung tragen. Nach 53) gilt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_1' \mathfrak{I}_1' \cos \gamma_1' &= \mathfrak{I}_1'^2 R_1 + \mathfrak{I}_2'^2 R_2 \\ \mathfrak{E}_2^0 \mathfrak{I}_2'' \cos \gamma_2'' &= \mathfrak{I}_1''^2 R_1 + \mathfrak{I}_2''^2 R_2 \end{aligned} \right\} \quad 113)$$

und

Gl. 101) lautet dann mit Berücksichtigung von 102) und 113):

$$2P = R_1 [\mathfrak{S}_1'^2 + q^2 \mathfrak{S}_1''^2 + 2q \mathfrak{S}_1' \mathfrak{S}_1'' \cos(\delta' + \varepsilon)] \\ + R_2 [\mathfrak{S}_2'^2 + q^2 \mathfrak{S}_2''^2 + 2q \mathfrak{S}_2' \mathfrak{S}_2'' \cos(\delta' - \varepsilon)]. \quad \dots \quad 114)$$

Aus Abb. 12 folgt

$$\text{mit Hilfe von } \angle OM_1 H_1: \quad \zeta_1 = \varepsilon - \gamma_1' + \gamma_1'' - \pi \} \\ \text{„ „ „ } \angle OM_2 H_2: \quad \zeta_2 = \gamma_2'' + \pi + \varepsilon - \gamma_2' \} \quad \dots \quad 115)$$

und da nach 34) und 100):

$$\gamma_1'' - \gamma_1' = \delta' \\ \gamma_2' - \gamma_2'' = \delta''$$

sind, haben wir also:

$$\left. \begin{array}{l} \delta' + \varepsilon = \pi + \zeta_1 \\ \delta'' - \varepsilon = \pi - \zeta_2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad 116)$$

Durch Einführung dieser Werte für die Cosinusfunktionen der Gl. 114) folgt mit Berücksichtigung von Abb. 12:

$$2P = \mathfrak{S}_1^2 R_1 + \mathfrak{S}_2^2 R_2 \quad \dots \quad 117)$$

Der Vergleich von 117) mit 96) bestätigt im Anschlusse an unsere Betrachtungen die Gültigkeit des Energiesatzes 95) für jede durch die Ähnlichkeitstransformation aus dem Nullsysteme des Transformators bestimmbare Diagrammstellung.

Für den belasteten Transformator ist der Effekt $P_2 = \mathfrak{E}_2 \mathfrak{S}_2 \cos \gamma_{II}$ an der Belastungsseite negativ, weil er vom Transformator weggeführt wird. $\cos \gamma_{II}$ muß deshalb negativ sein und $\gamma_{II} > \frac{\pi}{2}$. Der mittlere Energiesatz würde dann auf diesen Fall modifiziert lauten:

Die Differenz aus dem zu- und weggeführten Effekte wird im Transformator in Stromwärme verwandelt.

Den Diagrammstellungen der Abb. 4, 5, 6 und 7 entsprechen positive Effekte P_1 und P_2 , die also im Transformator vollständig in Joulesche Wärme übergehen, während für die Belastungsdiagramme der Abb. 10, 11a und 11b P_1 positiv und P_2 negativ ist und bei jenen Diagrammstellungen nur die Differenz $|P_1| - |P_2|$ im Transformator in Jouleschen Effekt umgewandelt wird. Der mittlere Energiesatz läßt sich an allen diesen Abbildungen im Speziellen leicht verifizieren. Bei der rechnerischen Kontrolle ist aber zu berücksichtigen (vgl. Fußnote 2 auf S. 262), daß die Längeneinheit für die Stromvektoren zweimal größer ist als für die Spannungsvektoren.

Der Transformator bei willkürlichen periodischen Wellen.

Sind die primäre und sekundäre Klemmenspannung des Transformators zwei willkürliche periodische Funktionen der Zeit

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \varphi_1(\omega t) \\ e_2 = \varphi_2(\omega t) \\ (\omega = \frac{2\pi}{T}, T = \text{Periodenzeit}), \end{array} \right\} \quad \dots \quad 118)$$

so entwickeln wir diese in trigonometrische Reihen. Mit Fourier kann man für irgend eine einwertige periodische Funktion $\varphi(\omega t)$ setzen¹⁾:

¹⁾ Vgl. z. B. E. Kittler: Allgemeine Elektrotechnik, Bd. II, S. 286 bis 289, und Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen, Bd. I, S. 79.

$$\varphi(\omega t) = \mathfrak{E}^{(0)} + \mathfrak{E}^{(1)} \sin(\omega t - \varepsilon^{(1)}) + \mathfrak{E}^{(2)} \sin(2\omega t - \varepsilon^{(2)}) + \\ \mathfrak{E}^{(3)} \sin(3\omega t - \varepsilon^{(3)}) + \dots + \mathfrak{E}^{(n)} \sin(n\omega t - \varepsilon^{(n)}) + \dots^1) \quad \text{I19)}$$

Hierin kann man jede Sinuswelle als Summe von zwei gleichfalls sinusförmigen Komponenten auffassen, entsprechend:

$$\mathfrak{E}^{(n)} \sin(n\omega t - \varepsilon^{(n)}) = \mathfrak{U}^{(n)} \sin n\omega t + \mathfrak{B}^{(n)} \cos n\omega t, \quad \dots \quad \text{I20)}$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}^{(n)} &= \sqrt{\mathfrak{U}^{(n)2} + \mathfrak{B}^{(n)2}} \\ \varepsilon^{(n)} &= -\arctg \frac{\mathfrak{B}^{(n)}}{\mathfrak{U}^{(n)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{I21)}$$

Die sogen. Fourierschen Koeffizienten $\mathfrak{U}^{(n)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ sind bestimmt durch:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}^{(n)} &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \varphi(\omega \tau) \sin(n\omega \tau) d\tau \\ \mathfrak{B}^{(n)} &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \varphi(\omega \tau) \cos(n\omega \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{I22)}$$

Wenn wir die folgenden Abkürzungen verwenden

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(n)} &= \mathfrak{E}_1^{(n)} \sin(n\omega t - \varepsilon_1^{(n)}) \\ e_2^{(n)} &= \mathfrak{E}_2^{(n)} \sin(n\omega t - \varepsilon_2^{(n)}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{I23)}$$

so können wir für die Spannungen e_1 und e_2 nach I18) und I19) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \mathfrak{E}_1^{(0)} + e_1^{(1)} + e_1^{(2)} + e_1^{(3)} + \dots + e_1^{(n)} + \dots \\ e_2 &= \mathfrak{E}_2^{(0)} + e_2^{(1)} + e_2^{(2)} + e_2^{(3)} + \dots + e_2^{(n)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{I24)}$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{E}_1^{(0)}$, $\mathfrak{E}_2^{(0)}$ zwei Gleichspannungen, $e_1^{(1)}$, $e_2^{(1)}$ die ersten, $e_1^{(2)}$, $e_2^{(2)}$ die zweiten, $e_1^{(3)}$, $e_2^{(3)}$ die dritten Harmonischen usw. der primären bzw. sekundären Klemmenspannung des Transformators.

Den Teilspannungen $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$ einer beliebigen Kreisfrequenz $n\omega$ sollen in der primären und sekundären Transformatorwicklung die Ströme $i_1^{(n)}$, $i_2^{(n)}$ entsprechen; d. h. es sollen die vier Größen

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(n)}, & \quad i_1^{(n)} \\ e_2^{(n)}, & \quad i_2^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{I25)}$$

für sich allein den Transformatorgleichungen 1) und 2) genügen. Mit I24) ist dann unschwer einzusehen, daß die resultierenden Ströme i_1 und i_2 durch die folgenden Reihen als Summen der Teilströme hervorgehen:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \mathfrak{I}_1^{(0)} + i_1^{(1)} + i_1^{(2)} + i_1^{(3)} + \dots + i_1^{(n)} + \dots \\ i_2 &= \mathfrak{I}_2^{(0)} + i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + i_2^{(3)} + \dots + i_2^{(n)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{I26)}$$

Die Teilströme $i_1^{(1)}$, $i_2^{(1)}$ usw. sind durch sinusförmige Spannungen [s. I23) und I25)] hervorgerufen und nach früherem also ebenfalls sinusförmig und von der gleichen

¹⁾ Für technische Wechselströme gilt wegen der Erzeugungsweise desselben in den Maschinen $\varphi(\omega t) = -\varphi\left[\omega\left(t \pm (2n-1)\frac{T}{2}\right)\right]$. In der Fourier-Entwicklung kommen dann nur ungeradzahlige Harmonische vor.

Frequenz wie diese. Von den Gleichströmen $\mathfrak{I}_1^{(0)}$, $\mathfrak{I}_2^{(0)}$ abgesehen, erhalten wir deshalb die resultierenden Ströme i_1 und i_2 als Superpositionen ihrer Grundwellen und allen zugehörigen Oberwellen (Harmonischen). Die n^{ten} Harmonischen sind von der Form:

$$\left. \begin{aligned} i_1^{(n)} &= \mathfrak{I}_1^{(n)} \sin(n\omega t - \gamma_1^{(n)}) \\ i_2^{(n)} &= \mathfrak{I}_2^{(n)} \sin(n\omega t - \gamma_2^{(n)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 127)$$

Die Amplituden $\mathfrak{I}_1^{(n)}$, $\mathfrak{I}_2^{(n)}$ und Phasenwinkel $\gamma_1^{(n)}$, $\gamma_2^{(n)}$ findet man mit Hilfe der Formeln von S. 261 auf analytischem Wege aus den Amplituden $\mathfrak{E}_1^{(n)}$, $\mathfrak{E}_2^{(n)}$ und Phasenwinkeln $\varepsilon_1^{(n)}$, $\varepsilon_2^{(n)}$ der Fourierschen Reihen [vgl. 119]] und den Konstanten des Transformators. Man kann dieselben jedoch auch graphisch ermitteln. Von Vorteil sind die graphischen Methoden hier nur dann, wenn die Ströme bei verschiedenen Betriebszuständen des Transformators bestimmt werden sollen. Zu diesem Zweck würde man die den einzelnen Kreisfrequenzen $n\omega$ entsprechenden Transformationssysteme konstruieren (s. S. 270). Aus diesen Systemen lassen sich dann leicht nach den auf den S. 269 bis 271 besprochenen Konstruktionen die den einzelnen Teilspannungen entsprechenden Teilströme mit Amplitude und Phase angeben. Um noch die resultierenden Ströme zu finden, überträgt man die Teilströme in ein Liniendiagramm und addiert die Ordinaten algebraisch.

Zusammenfassung. Der erste Abschnitt der Schrift enthält eine leichtverständliche Integrationsmethode der Transformatorgleichungen für sinusförmige Spannungen und Ströme. Die Resultate (vgl. S. 261) ergeben sich in einer einfachen und für die Verwendung bei graphischen Konstruktionen sehr geeigneten Form. Der nächstfolgende Abschnitt gilt einer genaueren Betrachtung der Diagramme für sekundären und primären Kurzschluß des Transformators. Dank der Unveränderlichkeit der Größen λ , η , ν für beide Kurzschlußversuche (s. Tabelle I S. 261) lassen sich beide Diagramme mit nur geringfügiger Modifikation aus derselben äußerst einfachen Konstruktion (siehe Seiten 263 bis 264) gewinnen.

Durch Superposition (geometrische Addition entsprechender Vektoren) beider Kurzschlußdiagramme (Vektorsysteme I und II) erhält man die Diagramme für den allgemeinen Betriebszustand des Transformators. Über den Vektormaßstab wird so verfügt, daß der primäre Spannungsvektor unbekümmert um seine Größe in elektrischem Maße immer durch dieselbe Normalstrecke dargestellt wird. Die Allgemeinheit der Behandlung leidet nichtsdestoweniger darunter (vgl. S. 265 unten).

Bei den „Diagrammtransformationen“ verändert sich das Vektorsystem II seinen zwei Freiheitsgraden entsprechend (S. 265) relativ zum Vektorsystem I. Eine bloß ähnliche Umformung des Vektorsystems II heißt „Streckentransformation“; dabei bewegen sich die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ auf Geraden (s. S. 266). Eine reine Drehung des Vektorsystems II hingegen wurde als „Winkeltransformation“ bezeichnet. Die Spitzen der Vektoren $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ bewegen sich in diesem Falle auf Kreisen (S. 268). Die Transformationen werden gewöhnlich aus dem „Nullsystem“ (Sekundärspannung entgegengesetzt gleich der Primärspannung), welches sich aus dem kombinierten Kurzschlußdiagramm leicht angeben läßt, vorgenommen. Der Übergang von einem beliebigen Betriebszustand des Transformators in einen andern benötigt eine „Ähnlichkeitstransformation“, die als Resultat einer Strecken- und Winkeltransformation hervorgeht. Es läßt sich ein „Transformationsprinzip“ formulieren (S. 269), nach welchem sich bei der Ähnlichkeitstransformation die Spitzen der resultierenden Vektoren $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ auf (in bestimmter Weise verschobenen und verdrehten) ähnlichen Kurven bewegen. Es wird dann eine Konstruktion angegeben, mit welcher die Ähnlichkeitstransformation aus dem Nullsystem mittelst Lineal und Zirkel auf einfachste Weise vorgenommen werden kann (vgl. S. 270). Im Anschluß folgt ein Abschnitt über „Transformationsaufgaben“, wo gezeigt wird, daß jeder überhaupt mögliche Betriebszustand des Transformators aus den Daten von irgend zwei bekannten Betriebszuständen abgeleitet werden

kann, und es wird die diesbezügliche, äußerst einfache und elegante Konstruktion angegeben. Aus den Diagrammstellungen der beiden Betriebszustände ergeben sich z. B. auch mit Leichtigkeit die Vektorkonfigurationen bei Kurzschluß und Leerlauf.

Im weiteren folgt die Anwendung der Ähnlichkeitstransformation auf den belasteten Transformator. Es erweist sich, daß jedem äußern Belastungskreis (R, L, C) bei gegebenem Nullsystem die Endpunkte der Spannungs- und Stromvektoren in der Diagrammebene eindeutig zugeordnet sind. Den Endpunkt des sekundären Stromvektors findet man mit den auf den Seiten 273 und 274 berechneten Größen χ und ν als Schnitt zweier Kreise, und die Lage und Größe der Vektoren $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{J}_1$ ergeben sich hieraus durch eine Ähnlichkeitstransformation. Bei beliebigen Belastungsänderungen hat man es mit einem zweidimensionalen Probleme zu tun; die Spitzen der resultierenden Vektoren $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ bewegen sich auf ähnlichen Kurven, die als Funktionen der Größen (R, L, C) bestimmt und leicht angebar sind.

Belastungsänderungen mit gleichbleibendem Leistungsfaktor oder gleichbleibendem scheinbarem Widerstand des Belastungskreises entsprechen Kreisdiagramme (S. 273 und 274). Als Spezialisierung dafür wird ein sehr handliches Kreisdiagramm für rein „Ohmsche“ Belastung des Transformators angegeben (s. S. 274 bis 276). Bei Vernachlässigung der Ohmschen Widerstände in den Transformatorwicklungen folgt daraus das bekannte „Heylanddiagramm“, welches aus den Induktionskoeffizienten des Transformators auf einfachste Weise berechnet werden kann [vgl. S. 278, Formeln 85].

Die Betrachtungen des darauf folgenden Kapitels (S. 279 bis 282) gelten dem Energiesatz des Transformators, welchen man dort in Differential- und Integralform (mittlerer Energiesatz) findet. Der direkte Nachweis des mittleren Energiesatzes am Diagramm über die Ähnlichkeitstransformation (Abb. 6 S. 269) liefert eine gute Probe für die letztere. Im Schlußkapitel wird noch gezeigt, wie die für sinusförmige Spannungen und Ströme abgeleiteten analytischen und graphischen Resultate bei zeitlich willkürlich verlaufenden periodischen Wellen zu erweitern sind. Die vollständige Erledigung dieses allgemeineren Falles durch alles bisher Behandelte ist möglich auf Grund der Gültigkeit der Fourierschen Entwicklungen von beliebigen einwertigen periodischen Funktionen in trigonometrische Reihen.

Im Transformationssysteme (S. 270) ist die vollständige Integration der Transformatorgleichungen mit konstanten Koeffizienten für sinusförmige Spannungen und Ströme enthalten. Die Vektordiagramme von stationären Wechselstromvorgängen, die sich in einem Einphasen-Transformatorkreise darstellen lassen, erhält man deshalb in Zukunft nicht mehr auf dem Wege des Probierens, sondern als das bestimmte Resultat der in dieser Schrift behandelten Methode der Ähnlichkeitstransformation.

Der Anlaßvorgang beim Gleichstrommotor.

Von

Erich Jasse, z. Zt. im Felde.

Einleitung. Beim Anlassen eines Gleichstrommotors handelt es sich darum, den Motoranker und die von ihm anzutreibenden Massen auf eine gewisse vorgeschriebene Geschwindigkeit zu bringen. Dies geschieht meist¹⁾ in der Weise, daß man seinem Anker einen Widerstand (den Anlaßwiderstand) vorschaltet und diesen in demselben

¹⁾ Die Anlaßmethode ohne Widerstand, die sogenannte Grobschaltung, soll hier außer Betracht bleiben, da sie von C. Trettin in der ETZ 1912 S. 759, 794, 822 unter dem Titel: „Das Schalten großer Gleichstrommotoren ohne Vorschaltwiderstände“ eingehend besprochen worden ist.