11. *Ueber transversale Töne von Kautschukfäden; von Viktor v. Lang.*

(Aus den Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse, Bd. CVII. Abth. IIa. October 1898.)

1. Spannt man einen Kautschukfaden mit beiden Händen und bringt ihn vor dem Ohre durch Zupfen zum Tönen, so bemerkt man, dass sich sein Ton von einem gewissen Punkte an durch stärkeres Spannen nur sehr wenig mehr ändert. Dieses anderen Fäden entgegengesetzte Verhalten überrascht, wird aber begreiflich, wenn man die bisherigen Beobachtungen über die Dehnung von Kautschukfäden nachsieht. In jeder solchen Beobachtungsreihe giebt es nämlich immer ein längeres Intervall, in welchem die Gesamtlänge des Fadens proportional dem spannenden Gewichte ist. Setzt man nun die Gültigkeit der Taylor'schen Formel voraus, nach welcher die Tonhöhe proportional der Quadratwurzel aus dem Verhältniss der Spannung zur Länge ist, so ergibt sich sogleich die Constanz des Tones für jenes Intervall.

Es schien mir nicht ohne Interesse, das angegebene Experiment messend zu verfolgen, besonders auch, um zu sehen, wie weit die Taylor'sche Formel auf dasselbe anwendbar ist. Zu den Versuchen wurden käufliche Kautschukfäden benutzt, die aber alle quadratischen Querschnitt haben, ferner schwarze Kautschukröhrchen, wie sie zu den Ventilen der Velocipeds benutzt werden, endlich auch ein runder Faden aus vulcanisirtem Kautschuk, welchen ich der Güte des Hrn. E. Herbst, Director der Gummiwaarenfabrik Breitensee, verdanke.

2. Nachstehende Figur zeigt die angewandte Spannvorrichtung, welche aus einem verticalen starken Prisma aus Holz mit zwei ebenfalls hölzernen Schlitten besteht. Um namentlich die äusserst schwachen Töne bei geringer Spannung der Fäden wahrnehmen zu können, ist an dem unteren Schlitten, der ein für allemal festgeklemmt wurde, ein hölzerner Arm angebracht, an welchen das Ohr bequem angelegt werden kann. Ferner war das Holzprisma auch in Berührung mit einem

Ende des Monochords, womit die Tonhöhe bestimmt wurde. Dasselbe war mit einer blanken und einer überspannenen Stahlsaite versehen. Die Tonhöhe der ersteren wurde durch Resonanz einer α -Stimmgabel bestimmt und schwankte um 90.

Die Tonhöhe der überspannenen Saite, welche nur für die tiefsten Töne benutzt wurde, war ungefähr 35.

Die Enden der Kautschukfäden wurden zwischen zwei Paar Messingplatten eingeklemmt, von denen das eine an den oberen Schlitten angeschraubt ist und mit demselben in geeigneter Höhe festgestellt wurde. Das andere, untere Paar trägt eine Waagschale für die spannenden Gewichte und wurde erst nach der Belastung, eventuell nach vollständiger Ausfädelung des Fadens an den unteren Schlitten festgeklemmt.

Bei Bestimmung der Länge der gespannten Fäden konnte hier nicht die genaue Methode angewandt

werden, bei der nur die Entfernung zweier Punkte der Fäden berücksichtigt wird, die näher als die Befestigungsstellen aneinander liegen: es sollte ja auch die Tonhöhe der Fäden ermittelt werden. Um nun die Fäden beim Einklemmen möglichst zu schonen, wurden die Enden derselben vorher mit Kautschukband umwickelt; freilich bleibt dann immer eine kleine Unsicherheit bei Bestimmung der Länge.

3. Ich gebe nun zuerst eine Beobachtungsreihe, welche an einem Röhrchen (vgl. oben) derart ausgeführt wurde, dass man

den Kautschuk niemals entlastete und jede Beobachtung unmittelbar an die vorhergehende anschloss. Das Zeitintervall zwischen zwei Beobachtungen beträgt daher nur ungefähr vier Minuten.

<i>S</i>	<i>l</i>	<i>n</i>	<i>TF</i>	<i>S</i>	<i>l</i>	<i>n</i>	<i>TF</i>
0 g	50 mm	—	—	440 g	191 mm	144	163
30	53	104	78	480	235	145	164
40	60	107	84	520	218	143	160
60	62	127	102	560	231	143	161
80	63	127	117	600	243	144	159
100	64,5	132	129	640	254	146	164
120	68	139	137	680	263,5	148	166
140	72,5	147	143	720	276,5	149	167
160	77	147	148	760	279,5	151	170
180	89	150	147	800	290	151	172
200	90,5	150	154	840	298	152	173
220	97	150	156	880	306	153	175
240	106	151	156	920	313	149	177
260	119,5	150	153	960	325,5	151	178
280	123,5	148	156	840?	318	140	168
300	133	147	155	740	318	140	158
320	141,5	147	155	640	314	132	148
340	151	146	155	540	310	124	136
360	159,5	145	155	440	302	112	125
380	167,5	145	156	340	291	101	112
400	177	145	156	240	257	95	100

In dieser Tabelle bedeutet *S* das spannende Gewicht in Gramm, natürlich mit Einschluss der Fassung und der Waagschale, *l* ist die zugehörige Länge des Kautschuks in Millimeter und *n* die Schwingungszahl seines Transversaltones. Die letzte Columne *TF* enthält die nach der Taylor'schen Formel

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{l} \frac{g}{G}}$$

berechneten Schwingungszahlen, wobei das Gewicht *G* des Fadens gleich 0,227 g war. Die ersten zwei Beobachtungen für *n* sind naturgemäss sehr unsicher, später konnte *n* mit grosser Genauigkeit ermittelt werden, da der Kautschukfaden sehr deutliche Schwebungen mit der Monochordsaite gab. Beide Töne wurden durch Zupfen hervorgerufen.

Betrachten wir zuerst die bei steigenden Belastungen angestellten Versuche, so sehen wir, dass der Ton des Fadens in der That von der $1\frac{1}{2}$ fachen Verlängerung angefangen bis zur 6 fachen ziemlich gleich blieb. Die nach der Taylor'schen Formel berechneten Zahlen steigen jedoch merklich an, es steigt also auch das Verhältniss der Spannung zur Länge und ist nur etwa von der 1,8 fachen bis zur 3,5 fachen Verlängerung constant. Bei der Belastung von ungefähr 170 g stimmen die beobachteten und berechneten Werthe ziemlich überein.

Dieses scheint auch für die bei abnehmenden Belastungen ausgeführten Beobachtungen zu gelten. Letztere Messungen zeigen aber deutlich, wie sehr die Werthe von n von der vorhergegangenen Behandlung des Kautschukfadens abhängen, und es ist kein Zweifel, dass wenn die Beobachtungen in einem langsameren Tempo ausgeführt worden wären, ganz andere Zahlen zum Vorschein gekommen wären.

4. Um den Einfluss der Zeit zu zeigen, will ich aus Beobachtungen, die an einem ähnlichen Velocipedröhrchen angestellt wurden, zwei Reihen herausheben. Die ursprüngliche Länge des Röhrchens war 60 mm, sein Gewicht 0,335 g. Bei der Belastung von 140 g wurde beobachtet:

	l	n	TF
	88 mm	107,6	111,1
13 ^h später	85	111,6	109,9
3 ^h „	85	112,8	109,8

In der Zeit zwischen zwei Beobachtungen war natürlich das untere Ende des Kautschuks frei und wurde nur während der Ablesungen fest geklemmt. Bei der Belastung von 1240 g wurde gefunden:

	l	n	TF
	438 mm	144,5	144,0
13 ^h später	444	142,9	143,0
7 ^h „	445,5	142,1	142,7
17 ^h „	447	142,1	142,5

Wir sehen aus diesen Zahlen, dass während bei constanter Belastung die Länge mit der Zeit wächst, die Tonhöhe dagegen grösser oder kleiner wird. Ersteres tritt allerdings nur bei sehr geringen Belastungen ein. Die Unterschiede in der Tonhöhe sind aber hier viel beträchtlicher als bei den

grossen Belastungen, wo dafür die Länge sich nur langsam einer constanten Grösse nähert. Man muss also auch bei geringen Spannungen eine längere Zeit vor der Beobachtung der Tonhöhe verfliessen lassen, wenn man endgültige Zahlenwerthe erlangen will. Leider wurde in den nachfolgenden Beobachtungen diesem Umstande nicht in vollem Maasse Rechnung getragen, da er zu spät erkannt wurde, dagegen wurden die Beobachtungen bei höheren Belastungen immer nach so langer Zeit angestellt, dass eine weitere bemerkbare Aenderung der Länge nicht mehr zu erwarten war: einzelne Beobachtungsreihen nahmen daher bis zu vier Tagen in Anspruch, obwohl nur bei ungefähr zwölf, immer steigenden Belastungen abgelesen wurde.

5. Ich gebe zuerst die Resultate der Beobachtungen, die an vier Stücken eines Velocipedröhrchens angestellt wurden. Dieselben hatten die Längen von 70, 60, 50 und 52 mm. Die erhaltenen Zahlen lassen gar keinen Zweifel darüber, dass, sowie die Längen der verschiedenen Stücke bei einer und derselben Belastung immer proportional ihren ursprünglichen Längen sind, die Töne derselben sich verkehrt wie diese Längen verhalten. Rechnet man nämlich nach dieser Regel die vier Beobachtungsreihen auf die Länge von 100 mm um, so stimmen die Zahlen meist bis auf wenige Procente überein. Ich gebe daher gleich die Mittel dieser Zahlen.

<i>B</i>	<i>S</i>	<i>l</i>	<i>n</i>	<i>TF</i>	<i>n'</i>	<i>n - n'</i>
	0 g	100 mm	—	—	—	—
4	40	108	54,6	40,3	54,9	- 0,3
4	80	124	61,8	53,7	62,9	- 0,2
4	140	144	69,4	66,0	70,3	- 0,9
4	240	215	72,8	70,6	73,0	- 0,2
4	340	317	71,3	69,2	71,1	+ 0,2
4	440	432	69,3	67,4	69,0	+ 0,3
3	540	554	67,3	66,1	67,3	0,0
3	640	619	69,3	68,0	69,0	+ 0,3
3	740	650	72,7	70,5	72,1	+ 0,6
3	840	689	75,4	73,8	74,4	+ 1,0
2	940	704	77,5	75,5	77,7	- 0,2
2	1040	737	79,5	79,5	79,5	- 0,2

In der Columnne *B* ist angegeben, aus wie vielen Beobachtungen das Mittel abgeleitet ist; es wurden nämlich nicht

alle vier Beobachtungsreihen gleich weit fortgeführt, auch wurde gelegentlich durch Versehen eine Beobachtung ausgelassen. Die Schwingungszahlen n zeigen keine continuirliche Zunahme. Dieselben haben bei der zweifachen Verlängerung ein relatives Maximum, bei der $5\frac{1}{2}$ fachen ein solches Minimum. Denselben Gang zeigte die nach der Taylor'schen Formel mit $G = 0,549$ g berechnete Zahlenreihe und demzufolge auch das Verhältniss der Länge zur Spannung. Die Uebereinstimmung beider Zahlenreihen ist im Anfange schlecht, wird aber mit steigender Belastung besser und scheint bei extremen Spannungen vollkommen zu sein, wie wir dies auch schon an dem früheren Beispiel sahen.

Eine bessere Uebereinstimmung erzielt man natürlich, wenn man in der Taylor'schen Formel die Grössen S und l um constante Werthe vermehrt. Man erhält die letzte Zahlenreihe, wenn man setzt:

$$n' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g} \cdot \frac{S+54}{l+31,5}} = 66,83 \sqrt{\frac{S+54}{l+31,5}}.$$

6. Ganz ähnliche Verhältnisse zeigen auch die Beobachtungen an Kautschukfäden mit quadratischem Querschnitte. Solche Fäden wurden hauptsächlich zu den Vorversuchen angewandt. Später, als grössere Uebung erlangt war, wurden noch zwei Versuchsreihen mit Stücken von 64 und 75 mm Länge eines Fadens angestellt, dessen Querschnitt beiläufig 1,5 mm Seitenlänge hatte. Die Gewichte der beiden Stücke waren 0,13 und 0,14 g, sodass das Gewicht für 100 mm dieses Fadens im Durchschnitte gleich 0,194 g wird. Die Mittel der beiden Beobachtungsreihen sind nun folgende:

S	l	n	TF	n'	$n - n'$
0 g	100 mm	—	—	—	—
40	125	66,6	63,6	67,1	-0,5
80	177	76,9	75,6	76,8	+0,1
140	302,5	77,3	77,4	77,2	+0,1
240	534,5	76,2	75,3	75,8	+0,4
340	650,5	81,7	81,3	81,5	+0,2
440	685	89,1	90,1	90,1	-1,0
540	723,5	98,1	97,1	96,9	+1,2
640	752	103,0	103,7	103,4	-0,4
740	781,5	108,8	109,4	109,0	-0,2

Der Gang der Zahlenwerthe von n ist derselbe wie in dem vorhergehenden Falle, dieselben werden durch die Taylor'sche Formel nur näherungsweise dargestellt. Eine bessere Uebereinstimmung wird erzielt, wenn man wieder in dieser Formel Spannung und Länge um constante Grössen vermehrt. Für letztere wurden durch Probiren die Werthe 10,8 und 17,8 gefunden, sodass die vorletzte Zahlenreihe sich aus folgender Formel ergibt:

$$n' = 112,43 \sqrt{\frac{S + 10,8}{l + 17,5}}.$$

7. Zum Schlusse gebe ich noch die Resultate der an dem runden Kautschukfaden angestellten Beobachtungen. Es wurden fünf Stücke untersucht, welche die Längen von 50, 80, 60, 40 und 61 mm und die Gewichte von 0,219, 0,340, 0,283, 0,170 und 0,257 g hatten. An den zwei ersten Stücken wurde auch der Durchmesser (d) bestimmt mit Hülfe eines Fernrohres, das mit einer Ocular-Mikrometerschraube versehen ist. Auf die Länge von 100 mm reducirt, geben die angestellten Beobachtungen folgende Mittelwerthe:

B	S	l	d	n	TF	n'	$n - n'$
	0 g	110 mm	2,20 mm	—	—	—	—
5	40	111	2,02	55,3	45,5	55,5	-0,2
5	80	123	1,97	66,7	61,1	68,2	-1,5
5	150	146	1,84	78,8	74,2	79,2	-0,4
5	240	206	1,58	84,6	81,7	85,0	-0,4
5	340	285	1,32	85,5	82,7	85,1	+0,4
5	440	350	1,23	86,9	84,9	86,8	+0,1
5	540	422	1,13	88,0	85,7	87,2	+0,8
3	640	482	1,03	89,4	87,3	88,6	+0,8
4	740	541	0,96	90,2	88,6	89,7	+0,5
3	840	610	—	89,9	88,9	89,9	0,0

Die Berechnung der Zahlen n' erfolgte hier nach der einfacheren Formel

$$n = 75,73 \sqrt{\frac{S + 19,7}{l}},$$

indem das Hinzufügen einer Constanten zur Länge l keine wesentliche Verkleinerung der Differenzen $n - n'$ bewirkte.

Die Tonhöhe n zeigt aber jetzt kein Maximum und Minimum mehr wie in den vorhergehenden zwei Fällen. Doch

scheint noch immer eine Andeutung davon vorhanden zu sein. Betrachtet man nämlich n als Function der Länge oder Spannung und construirt man eine Curve mit n als Ordinate und etwa l als Abscisse, so ist die Krümmung derselben abwechselnd convex, concav, convex. Der erste Wendepunkt, dessen Lage freilich sehr schwer zu bestimmen ist, liegt bei einer ungefähr 3,5 maligen Verlängerung, während er bei dem quadratischen Faden auf eine 4fache, bei dem Röhrchen auf eine 3,8 malige Verlängerung entfällt.

(Eingegangen 2. Mai 1899.)