**19. Zur Bestimmung der Capillaritätsconstanten;
Bemerkungen zu der Arbeit von Hrn. Quincke;
von Th. Lohnstein.**

Im vorigen Bande dieser Annalen¹⁾ hat Hr. Quincke eine Arbeit veröffentlicht, die sich mit der alten Methode der Bestimmung der Capillaritätsconstanten durch Messung capillarer Steighöhen beschäftigt. Nr. 6 der Sätze, in denen er die Ergebnisse seiner Messungen zusammenfasst, lautet²⁾: „Für die weiten Capillarröhren aus Jenaer Normalglas und englischem Flintglas findet man bei $18^\circ = 7,846$ resp. $7,776$ mg, also noch grösser, als mit den Methoden *c, d, e, f, g, h. i*, und *beinahe ebenso gross wie mit flachen Luftblasen*, die man als Messungen in sehr weiten Capillarröhren auffassen kann.“

Demgegenüber möchte ich mir erlauben, auf zwei Arbeiten aufmerksam zu machen, welche, seit der letzten diesen Gegenstand betreffenden Publication Hrn. Quincke's³⁾ vom J. 1886 erschienen, dessen in den gesperrt gedruckten Worten implicite enthaltene Ansicht zu widerlegen suchten und ihm entgangen zu sein scheinen.

Die erste derselben (1887 als Dissertation gedruckt), im Berliner physikalischen Institute ausgeführt, rührt von Hrn. Erich Sieg her und führt den Titel: „*Ueber die Bestimmung von Capillaritätsconstanten an Tropfen und Blasen*“. Die andere Arbeit, vom Schreiber dieser Zeilen, ist im Auszuge im 44. Bande dieser Annalen⁴⁾ mitgetheilt.

Aus der experimentellen Kritik, die Hr. Sieg an der Messmethode Quincke's übt, scheint mir zu folgen, dass dessen Bestimmungen der Höhe von Luftblasen mit einer Unsicherheit von mindestens $0,05$ mm behaftet sind. Hr. Sieg unterzieht an der Hand einer Poisson'schen Formel ferner

1) Quincke, Wied. Ann. 52. p. 1. 1894.

2) l. c. p. 16.

3) Quincke, Wied. Ann. 27. p. 219—229. 1886.

4) Lohnstein, Wied. Ann. 44. p. 52—73. 1891.

die Berechnungen Quincke's einer Besprechung und kommt zu demselben Ergebniss, wie vorher schon andere Autoren, dass die Correction, durch welche Hr. Quincke Tropfen von endlicher Breite auf unendlich breite umrechnet, unzulänglich ist. Aus *eigenen* Versuchen an Luftblasen in reinem luftfreien Wasser, bei denen die Methode der Messung bedeutend verfeinert ist, berechnete Sieg die Capillaritätsconstante zu $7,30$.¹⁾ Bei längerem Stehenlassen einer solchen Luftblase findet er eine merkliche Vergrösserung der Oberflächenspannung, die er, gestützt auf weitere Versuche, mit der Absorption von Luft in Zusammenhang bringt. Aus der Uebereinstimmung seiner Zahlen mit denen, die viele Beobachter aus Steighöhenbeobachtungen gewonnen haben, schliesst er, dass der Randwinkel von reinem Wasser in Capillarröhren gleich 0 ist. Hr. Quincke hatte früher durch Vergleichung seiner Luftblasen- und Steighöhenbestimmungen diesen Winkel zwischen 10° und 30° geschätzt. In seiner neuesten Arbeit findet er durch eine directe Messung Werthe, die zwischen 3° und 9° liegen. Ich glaube, letztere Zahlen sprechen für die Richtigkeit der Anschauung, dass in Wirklichkeit der Randwinkel $= 0$ ist. Denn meiner Ansicht nach ist Hr. Quincke's Messmethode nicht im Stande, den Randwinkel, falls derselbe den Werth 0 besitzt, als solchen zu constatiren, weil die Reflexion der Grenzstrahlen, die Hr. Quincke benutzt, dann in Räumen stattfindet, deren Dimensionen theilweise von der Ordnung der Lichtwellenlängen sind.²⁾ Ob für solche Räume die Gesetze der geometrischen Optik noch so gelten, dass sie sich für *exacte* Winkelmessungen verwerthen lassen, ist zum mindesten zweifelhaft.

*Meine eigene Arbeit*³⁾ enthält ebenfalls sowohl theoretische wie experimentelle Beiträge zu der in Rede stehenden Frage. — In seiner Arbeit vom J. 1886 sagt Hr. Quincke⁴⁾: „Man

1) Sieg, Dissert. p. 29. 1887.

2) Die Entfernung einer unter dem Winkel 3° gegen die Röhrenwand geneigten Stelle der Kuppe (den Randwinkel $= 0$ vorausgesetzt) von der Röhrenwand ist ca. $r/800$; ist r , wie in einer von Hr. Quincke benutzten Röhre, gleich $0,29$ mm, so ergibt sich hierfür $0,000360$ mm.

3) Lohnstein, Wied. Ann. 44. 1891 und Dissert. Berlin 1891.

4) Quincke, Wied. Ann. 27. p. 222. 1886.

kann nämlich die Messungen an flachen Luftblasen von 100 mm Durchmesser benutzen, um genaue Bestimmungen der Capillari-
tätsconstanten von Wasser, Alkohol oder Lösungen von Salzen
in diesen Flüssigkeiten zu erhalten, ohne zeitraubende und
nicht ganz einwandfreie Correctionsrechnungen nöthig zu haben.“
Hr. Quincke hat meines Erachtens, wie es auch schon Hr.
Sieg bemerkt hat¹⁾, nicht Recht, Luftblasen vom Durchmesser
100 mm als unendlich gross anzusehen, und sie demgemäss
als Grundlage empirischer Correctionsrechnungen zu benutzen²⁾;
man muss ihm aber darin Recht geben, dass die gewöhnlich
verwendeten Correctionsformeln nicht ganz einwandfrei sind.
Von diesem Fehler sind die Correctionsrechnungen frei, die
ich in meiner erwähnten Arbeit angestellt habe. Mit Hülfe
der dort erhaltenen Formeln bin ich in der Lage, darzuthun,
dass die Beobachtungsergebnisse von Hrn. Quincke, *richtig
verwerthet*, durchaus keine erhebliche Abweichung von den aus
Steighöhen gewonnenen Zahlen zeigen.

Mit Rücksicht auf die Kürze meiner früheren Mittheilungen
in diesen Annalen sei es mir gestattet, die damals unter-
drückten mathematischen Hülfsätze zur Vervollständigung des
Beweises meiner Formeln wenigstens anzugeben und gleich-
zeitig noch einige neue Entwicklungen hinzuzufügen.

Es sei σ_1 das specifische Gewicht der Flüssigkeit, σ_2 die
Dichte des mit ihr in Berührung befindlichen Gases, g die
Beschleunigung der Schwere, A_{12} die Constante der an der
Grenzfläche wirkenden Capillarkräfte, in absolutem Maasse
gemessen. Die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche ist dann
bekanntlich durch die partielle Differentialgleichung

$$A_{12} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = g(h + y)(\sigma_1 - \sigma_2)$$

bestimmt, in welcher ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Halbmesser der
Hauptkrümmungen in einem Punkte der Fläche bedeuten.
 h ist eine Constante, deren Werth nach Festlegung der
Horizontalebene $y = 0$ von den Grenzbedingungen abhängt.
Setzt man

$$a^2 = \frac{2 A_{12}}{g(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

1) Sieg, Dissert. p. 12. 1887.

2) Quincke, Pogg. Ann. 160. p. 354. 1877.

so ist a^2 die „specifische Cohäsion“ Hrn. Quincke's, und $\frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2)$ die gewöhnlich als Capillaritätsconstante schlechthin bezeichnete Grösse.

Für Rotationsflächen geht die partielle Differentialgleichung über in die bekannte Form:

$$(A) \quad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2} (h + y),$$

in welcher x die Entfernung des betreffenden Punktes der Fläche von der Rotationsaxe bedeutet. Diese Differentialgleichung erfordert je nach den Krümmungsverhältnissen der Fläche wesentlich andere Behandlungen. Für Tropfen und Luftblasen hat sie dieselbe Form, falls das Coordinatensystem so gewählt wird, dass der Nullpunkt mit der Kuppe des Tropfens, resp. mit dem tiefsten Punkte der Luftblase zusammenfällt. Die Gestalt der Flächen ist also, wie bekannt, in beiden Fällen dieselbe. Was die physikalische Bedeutung der Constante h anlangt, so entspricht sie der Steighöhe in dem Fall der Capillarröhren. Sie hat einen positiven Werth, wenn das Coordinatensystem so gewählt ist, dass y für jeden Punkt der Fläche positiv ist. a^2/h bezeichnet den gemeinsamen Werth der beiden Hauptkrümmungsradien in der Kuppe.

Von der Differentialgleichung (A) habe ich in meiner Dissertation zunächst folgende Sätze bewiesen:

1. y lässt sich in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Potenzreihe befriedigen, deren Coefficienten sämmtlich positiv sind;

2. dasselbe gilt von der Function

$$\frac{y'}{x(1+y'^2)^{3/2}};$$

3. diese Potenzreihen convergiren noch für $x=r$, wenn r die Abscisse ist, für welche $y' = \infty$.

Ferner benutze ich folgenden Hülssatz¹⁾: Ist $f(\xi)$ eine Function der reellen Variablen ξ , welche von 0 bis x nebst allen ihren Ableitungen bis zur $(n+1)$ ten einschliesslich

1) Lohnstein, Diss. p. 9—12. 1891.

2) l. c. p. 10.

positiv ist, und welche für $\xi = 0$ von der n ten Ordnung verschwindet, so ist

$$\int_0^x f(\xi) d\xi < \frac{x}{n+1} f(x).$$

Endlich zeige ich noch, dass die zweite Ableitung der Function

$$\frac{y'}{x(1+y^2)^{3/2}} = \frac{\sin \vartheta}{x}$$

nach y von $x = 0$ bis $x = r$ beständig negativ ist.¹⁾

Durch eine erste Integration folgt aus (A):

$$1 - \cos \vartheta + \int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy = \frac{y^2 + 2hy}{a^2}.$$

Um einen annähernden Werth des Integrals

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy$$

zu ermitteln, schliessen wir dasselbe in Grenzen ein. ϑ sei $\leq (\pi/2)$. $\sin \vartheta/x$, als Function von y betrachtet, wird im Integrationsintervall nur wachsen, da es, wie y , durch eine Potenzreihe von x mit nur positiven Coefficienten dargestellt ist. Da aber $d^2(\sin \vartheta/x)/dy^2$ negativ ist, so wird die Curve CB , welche $\sin \vartheta/x$ als Function von y mit letzterem als Abscisse darstellt, ihre Concavität der Abscissenaxe zukehren (Fig. 1). Aus der geometrischen Bedeutung des Integrals

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy$$

als Flächenstück folgt dann unmittelbar, dass

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy > \frac{y}{2} \left(\frac{h}{a^2} + \frac{\sin \vartheta}{x} \right),$$

1) Lohnstein, Dissert. p. 12—13. 1891.

da

$$\lim_{y=0} \frac{\sin \vartheta}{x} = \lim_{x=0} \frac{\sin \vartheta}{x} = \frac{h}{a^2}$$

ist. Hieraus folgt weiter:

$$\frac{y^2 + 2 h y}{a^2} > 1 - \cos \vartheta + \frac{y}{2} \left(\frac{h}{a^2} + \frac{\sin \vartheta}{x} \right),$$

oder:

$$(I) \quad a^2 < \frac{y^2 + \frac{3}{2} h y}{1 - \cos \vartheta + \frac{y}{2x} \sin \vartheta}.$$

In ähnlicher Weise können wir auch eine untere Grenze für a^2 ableiten. Ziehen wir in den Punkten, die zu den Abscissenwerthen 0 und y gehören, Tangenten, so bestimmen letztere mit den zugehörigen Ordinaten und der Abscissenaxe das Fünfeck $OCDBA$ (Fig. 1), welches, wie ohne weiteres ein Blick auf die Figur lehrt, grösser ist als das Flächenstück, welches das Integral

Fig. 1.

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy$$

darstellt. Der mathematische Ausdruck für die Fläche des Fünfecks $OCDBA$ ist ziemlich complicirt, wenn $\vartheta \leq \pi/2$; für $\vartheta = \pi/2$ vereinfacht er sich beträchtlich, und für letzteren Fall, in welchem y mit y_0 , x mit r bezeichnet werden soll, findet man auf diese Weise:

$$(II) \quad a^2 > \frac{(y_0 + h)^2}{1 + \frac{y_0 + 2h}{r} - \frac{a^2}{r^2}}.$$

Ehe wir die Beziehungen I und II praktisch verwerthen können, haben wir uns noch mit der in ihnen auftretenden Grösse h zu beschäftigen. Für relativ grosse Werthe von r , wie sie für unseren Zweck in Betracht kommen, ist h bekanntlich sehr klein; die folgende Betrachtung wird zeigen, dass es wie eine Exponentialfunction abnimmt. Da eine strenge Berechnung mit fast unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden ist, so begnügen wir uns auch hier mit der Aufstellung von Grenzen. Dazu müssen wir noch einige Beziehungen aus der Differentialgleichung (A) ableiten. Aus derselben folgt:

$$x \sin \vartheta = \frac{2}{a^2} \int_0^x x(y+h) dx < \frac{h}{a^2} x^2 + \frac{x^3 y}{2 a^2}$$

(vgl. den oben mitgetheilten Hülfsatz); demnach:

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy < \frac{h}{a^2} y + \frac{y^2}{4 a^2},$$

mithin

$$(IIIa) \quad a^2 > \frac{\frac{3}{4} y^2 + h y}{1 - \cos \vartheta}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\sin \vartheta}{x} > \frac{h}{a^2},$$

mithin

$$(IIIb) \quad a^2 < \frac{y^2 + h y}{1 - \cos \vartheta}.$$

Aus (IIIb) folgt:

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{dx}{dy} > \frac{a^2 - y^2 - h y}{\sqrt{(y^2 + h y)(2a^2 - y^2 - h y)}},$$

also

$$x < \int_0^y \frac{a^2 - y^2 - h y}{\sqrt{(y^2 + h y)(2a^2 - y^2 - h y)}} dy.$$

Um diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} - \int_0^y \frac{(y^2 + h y) dy}{\sqrt{(y^2 + h y)(2a^2 - y^2 - h y)}} &> - \int_0^y \frac{y + \frac{h}{2}}{\sqrt{2a^2 - y^2 - h y}} dy \\ &= -a \left(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{y^2 + h y}{a^2}} \right); \end{aligned}$$

$$\int_0^y \frac{a^2 dy}{\sqrt{(y^2 + hy)(2a^2 - y^2 - hy)}} = \int_0^y \frac{a dy}{\sqrt{2y(y+h)}} \\ + \int_0^y \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} \frac{\sqrt{y(y+h)}}{a^2} + \dots \right) dy.$$

Da nun die in dem zweiten der vorstehenden Integrale rechts auftretende Entwicklung nur positive Coefficienten enthält, so verkleinert man sie, wenn man in ihr $h = 0$ setzt; dadurch wird die Integration leicht ausführbar und man erhält so:

$$x + a \left(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{y^2 + hy}{a^2}} \right) > \frac{a}{\sqrt{2}} \log \frac{4 \sqrt{y(y+h)} + 4y + 2h}{h \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y^2}{2a^2}} \right)} \\ > \frac{a^2}{\sqrt{2}} \log \frac{8y}{h \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y^2}{2a^2}} \right)},$$

demnach

$$(IVa) \quad h > \frac{8y}{1 + \sqrt{1 - \frac{y^2}{2a^2}}} e^{-\frac{\pi \sqrt{2}}{a} - 2 + 2 \sqrt{1 - \frac{y^2 + hy}{a^2}}}$$

In ganz ähnlicher Weise folgt aus (IIIa):

$$(IVb) \quad h < \frac{6y + 4h}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{8} \left(y + \frac{2}{3}h \right)^2}} e^{-\frac{\pi \sqrt{6}}{2a} - 2 + 2 \sqrt{1 - \frac{3}{8} \frac{y^2}{a^2}}}$$

Das Formelsystem (I), (II), (IVa), (IVb), bei dessen Ableitung keine nicht streng bewiesene Annahme gemacht ist, gestattet uns nun, aus Versuchen an Tropfen und Blasen die Capillaritätsconstante mit einer Annäherung zu berechnen, die sich ihrem Grade nach einigermaßen übersehen lässt.

In drei von Hrn. Quincke angestellten Beobachtungen war bei $\vartheta = \pi/2$:

1. $r = 9 \text{ mm}$, $y_0 = 4,112 \text{ mm}$;
2. $r = 25 \text{ mm}$, $y_0 = 4,096 \text{ mm}$;
3. $r = 50 \text{ mm}$, $y_0 = 3,975 \text{ mm}$.

Aus (IVa) und (IVb) folgt für diese Fälle der Reihe nach

1. $0,304 \text{ mm} < h < 0,563 \text{ mm};$
2. $0,0011 \text{ mm} < h < 0,0032 \text{ mm};$
3. $0,0000001 \text{ mm} < h < 0,0000013 \text{ mm}.$

Verwenden wir zur Berechnung die Mittelwerthe der beiden Grenzen von h , so finden wir für a^2 aus (I) und (II):

1. $r = 9 \text{ mm}, y_0 = 4,112 \text{ mm}, 7,53 < \frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2) < 7,95;$
2. $r = 25 \text{ mm}, y_0 = 4,096 \text{ mm}, 7,36 < \frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2) < 7,75;$
3. $r = 50 \text{ mm}, y_0 = 3,975 \text{ mm}, 7,35 < \frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2) < 7,59.$

Nehmen wir die Mittelwerthe, welche von den wahren jedenfalls nicht sehr abweichen, so finden wir:

$$\frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2) = 7,74; 7,55; 7,47.$$

Hr. Quincke berechnet dagegen in diesen Fällen:

$$\frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2) = 8,45; 8,37; 7,88.$$

Selbst in dem Falle des von ihm als unendlich gross betrachteten Tropfens beträgt der Fehler noch über 5 Proc.

Es ergibt sich somit, dass die von Hrn. Quincke an Luftblasen ausgeführten Messungen, richtig verwerthet, Zahlen für die Capillaritätsconstante ergeben, welche durchaus in den Rahmen der nach anderen Methoden ermittelten Werthe fallen. Die Differenzen der einzelnen Beobachtungen selbst erklären sich hinreichend aus dem eingangs über die Messung der Tropfenhöhe im Anschluss an Hrn. Sieg Bemerkten.

Für Werthe von h , die so klein sind, wie in dem letzten der vorstehend berechneten drei Beispiele, lässt sich noch eine andere Methode der Berechnung anwenden, die allerdings umständlicher ist, aber viel genauere Resultate liefert. Es ist:

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy = \frac{\int_0^y \sin \vartheta dy}{x} + \int_0^x \left(\frac{dx}{x^2} \int_0^y \sin \vartheta dy \right) > \frac{1}{x} \int_0^y \sin \vartheta dy$$

$\int_0^y \sin \vartheta dy$ lässt sich in eine Potenzreihe als Function von x entwickeln, die nur ungerade Potenzen enthält und mit x^3 be-

ginnt; aus den früher angeführten Sätzen folgt ferner, dass ihre Coefficienten positiv sind. Setzt man demgemäss:

$$\int_0^y \sin \vartheta dy = d_3 x^3 + d_5 x^5 + \dots,$$

so ergibt sich mit Benutzung des früher citirten Hülfsatzes:

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy &< \frac{2k+3}{2k+2} \frac{1}{x} \int_0^y \sin \vartheta dy + \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} d_3 x^2 + \frac{1}{4} \frac{k-1}{k+1} d_5 x^4 \\ &+ \frac{1}{6} \frac{k-2}{k+1} d_7 x^6 + \dots + \frac{1}{2k} \frac{1}{k+1} d_{2k+1} x^{2k}. \end{aligned}$$

k kann hier jeden ganzzahligen Werth besitzen. Die $d_3, d_5 \dots$ sind ganze Functionen von h , die mit der zweiten Potenz beginnen. Man wählt k möglichst gross, aber nur so gross, dass man sicher ist, dass die Summe

$$\frac{1}{2} \frac{k}{k+1} d_3 x^2 + \frac{1}{4} \frac{k-1}{k+1} d_5 x^4 + \dots + \frac{1}{2k} \frac{1}{k+1} d_{2k+1} x^{2k}$$

vernachlässigt werden kann. Wie ich mich durch Ausrechnung der d -Coefficienten in dem Beispiel (3) unter Zugrundelegung des grösseren Grenzwertes von h überzeugt habe, hat diese Summe für $k=6$ noch keinen Einfluss, der das Resultat, falls man sich mit zwei Decimalstellen nach dem Komma bei der Angabe der Capillaritätsconstante begnügt, beeinflusst. Für solche Fälle ist also

$$\int_0^y \frac{\sin \vartheta}{x} dy < \frac{2k+3}{2k+2} \frac{1}{x} \int_0^y \sin \vartheta dy.$$

Es ist nunmehr das Integral $\int_0^y \sin \vartheta dy$ zu berechnen. Dabei soll der Einfachheit halber von vorneherein $h=0$ gesetzt werden; ferner müssen wir uns auch hier auf die Ermittlung einer oberen und einer unteren Grenze beschränken. Es ist

$$1 - \cos \vartheta + \frac{y}{2x} \sin \vartheta < \frac{y^2}{a^2}$$

$$1 - \cos \vartheta + \frac{y}{x} \sin \vartheta > \frac{y^2}{a^2},$$

demnach

$$\sin \vartheta > \frac{-\frac{y}{x} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) + \sqrt{\frac{y^3}{a^2} \left(2 - \frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{y^3}{x^2}}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$\sin \vartheta < \frac{-\frac{y}{2x} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) + \sqrt{\frac{y^3}{a^2} \left(2 - \frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{y^3}{4a^2}}}{1 + \frac{y^2}{4x^2}}$$

Nach einigen Vereinfachungen, die sämtlich in dem Sinne eingeführt sind, dass die betreffenden Ungleichheiten a potiori gelten, folgt hieraus

$$\int_0^y \sin \vartheta dy > -\frac{y^2}{x} + \frac{y^4}{4a^2x} + \frac{1}{3a^2} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) (\sqrt{2a^2x^3} - \sqrt{2a^2x - y^2x^3})$$

$$\int_0^y \sin \vartheta dy < -\frac{y^2}{8x} + \frac{y^4}{6a^2x} + \frac{1}{3a^2} (\sqrt{2a^2x^3} - \sqrt{2a^2x - y^2x^3})$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{y^2}{x^2} (a\sqrt{2} - \sqrt{2a^2 - y^2})$$

Wir wollen diese beiden Grenzen für unser obiges Beispiel (3) numerisch berechnen. a^2 soll dabei gleich 15 angenommen werden. Man findet

$$2,22 \text{ mm} < \int_0^y \sin \vartheta dy < 2,48 \text{ mm.}$$

$$a^2 < \frac{15,80}{1 + \frac{2,22}{50}} = 15,13$$

$$a^2 > \frac{15,80}{1 + \frac{2,66}{50}} = 15,00$$

Hiernach würden sich Grenzen für die Capillaritätsconstanten 7,49 und 7,55 ergeben, was mit dem oben für dieses Beispiel ermittelten Resultat in befriedigender Uebereinstimmung ist.

In meiner oben erwähnten Arbeit ¹⁾ habe ich endlich kurz eine Methode zur Bestimmung der Capillaritätsconstante ausinandergesetzt, welche gewissermassen eine Modifikation der Methode des Herrn Quincke darstellt. Sie hat den Vorzug,

1) Wied. Ann. 44. p. 57—61. 1891.

dass sie ungemein leicht ausführbar ist, wenig Zeit und relativ einfache instrumentelle Hilfsmittel erfordert. Wie die in meiner Dissertation ¹⁾ niedergelegten Tabellen ausweisen, steht sie an Genauigkeit den bekannten Methoden ebenbürtig zur Seite. Der Umstand, dass in der kurzen Mittheilung im 44. Bande dieser Annalen keine Zeichnung beigegeben wurde und dass ferner keine Tabellen abgedruckt waren, hat wahrscheinlich ihr Bekanntwerden verhindert. Ich möchte daher, im übrigen auf die Beschreibung a. a. O. verweisend, nebenstehend die kleine Zeichnung (Fig. 2) geben, welche den gesammten Apparat dar-

stellt. Der Halbmesser des Cylinders wird zweckmässig $> 6a$ gewählt, weil dann der Einfluss der nicht so genau zu ermittelnden Grösse h gegenüber den von den Messungen herührenden Fehlerquellen verschwindet. Die beiden aus einem Ver-

Fig. 2.

such für $H/2$ nach den oben dargelegten Principien zu berechneten Grenzen liegen um so näher zusammen, je näher ϑ einem rechten Winkel kommt. Schon für $\vartheta = 70^\circ$ liegen sie übrigens so nah bei einander, dass ihr Mittelwerth als wahrer Werth der Capillaritätsconstante genommen werden kann. So wurde z. B. beobachtet (vgl. die Bezeichnungen meiner früheren Abhandlung):

$G = 4205 \text{ mgr}$, $y = 3,210 \text{ mm}$, $r = 22,699 \text{ mm}$, Temperatur: 13° .

Hieraus berechnete sich:

$$7,49 < \frac{H}{2} < 7,58; \quad \frac{H}{2} = 7,54.$$

Auch als Gesamtmittel aller Messungen für das von mir benutzte (nicht ausgekochte) destillirte Wasser fand ich damals $H/2 = 7,54$.

1) Lohnstein, Diss. p. 22—23. 1891.

Berlin, September 1894.