versagt, dürfte sich am meisten die Beobachtung des Polarisationswinkels $\bar{\varphi}$ und des zugehörigen Amplitudenverhältnisses $\bar{\rho}$ unter Zugrundelegung der neuen strengen Formeln empfehlen. Die Methode der totalen Reflexion erscheint bei absorbirenden Medien theoretisch mindestens bedenklich und wird daher nur am Platze sein, wo es nicht auf die grösstmögliche Genauigkeit ankommt.

Göttingen, Juli 1884.

XIV. Ueber die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger krystallinischer Medien; von W. Voigt.

In meiner Arbeit über „die Theorie des Lichtes für vollständig durchsichtige Medien¹⁾ habe ich die allgemeinsten Gesetze für die zwischen den ponderablen und Aethertheilchen wirkenden Kräfte auch für Krystalle aufgestellt und untersucht, durch welche Verfügungen sie auf das Fresnel'sche Gesetz der Fortpflanzung ebener Wellen führen. Hingegen habe ich damals, wo es sich zunächst nur um die Aufstellung der Grundzüge der neueren Theorie handelte, nichts über das Problem der Reflexion und Brechung an der Grenze krystallinischer Medien veröffentlicht und will daher jetzt, nachdem sich die neue Theorie in den verschiedensten Gebieten bewährt hat²⁾, das darauf bezügliche in Kürze nachtragen.

Bekanntlich sind die Gesetze der hierher gehörigen Erscheinungen zuerst von Hrn. F. Neumann³⁾ gegeben und später in höchst eleganter Weise von Hrn. Kirchhoff⁴⁾ unter Einführung seiner neuen Grenzbedingung, welche ich als „Kirchhoff'sche Princip“ bezeichnet und in einer verallgemeinerten Form vielfach angewandt habe, neu abgeleitet worden. Diese durch die Beobachtung bestätigten Gesetze folgen auch aus der von mir vertretenen Theorie,

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883, (durchsichtige isotrope, anisotrope und circularpolarisirende Medien) 23. p. 104 u. 554, 1884, (absorbirende isotrope, — Metalle und Farbstoffe) p. 577 (pleochroitische Krystalle) p. 498, (magnetisch-active Medien).

3) F. Neumann, Sitzungsber. der Berl. Acad. 1835. p. 1.

4) G. Kirchhoff, Sitzungsber. der Berl. Acad. 1876. p. 57.

obgleich das von mir aufgestellte Potential der auf den Aether wirkenden Kräfte und die erweiterte Form des Kirchhoff'schen Princips, welche ich benutze, zunächst das Gegentheil zu ergeben scheinen. Ich werde im Folgenden nur zeigen, dass meine Theorie, wenn in ihr diejenigen Werthe der Constanten benutzt werden, welche der Neumann'schen Definition der Polarisationssebene entsprechen, genau auf die Grundgleichungen führt, von welchen Herr Kirchhoff ausgegangen ist.

Hr. Kirchhoff lässt bei der Lichtbewegung nur innere Kräfte des Aethers erregt werden, nimmt für deren Potential den Green'schen Ausdruck an, welcher auf die optischen Symmetrieachsen als Hauptachsen bezogen und unter Einführung der Incompressibilitätsbedingung:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{lautet:}$$

$$(2) \quad -2(F) = a_{11}(y^2 z^2 - 4y_y z z) + a_{22}(z x^2 - 4z_z x x) + a_{33}(x y^2 - 4x_x y y),$$

und schreibt in den Druckkräften:

$$(X_x) = \frac{\partial(F)}{\partial x_x}, \quad (X_y) = \frac{\partial(F)}{\partial x_y}, \dots$$

die Bewegungsgleichungen in der Form¹⁾:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial(X_x)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y)}{\partial y} + \frac{\partial(X_z)}{\partial z}, \\ -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial(Y_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Y_z)}{\partial z}, \\ -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial(Z_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Z_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Z_z)}{\partial z}, \end{array} \right.$$

und die Grenzgleichung, welche ich als neues (Kirchhoff'sches) Princip bezeichne, falls $\mu \nu \pi$ die Richtungscosinus der Normale auf der ebenen Grenze zwischen zwei Medien (1) und (2) darstellen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[(\bar{X}_x u + \bar{X}_y v + \bar{X}_z \pi) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{Y}_x u + \bar{Y}_y v + \bar{Y}_z \pi) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{Z}_x u + \bar{Z}_y v + \bar{Z}_z \pi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right]_1 \\ = \left[(\bar{X}_x u + \bar{X}_y v + \bar{X}_z \pi) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{Y}_x u + \bar{Y}_y v + \bar{Y}_z \pi) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{Z}_x u + \bar{Z}_y v + \bar{Z}_z \pi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right]_2. \end{array} \right.$$

Ich meinestheils habe die Annahme gemacht, dass der Lichtäther in allen Medien ein identisches Verhalten zeigt, sowohl um sein freies Fluctuiren durch die Körper hindurch anschaulicher zu machen, als um die Schwierigkeit zu um-

1) Um Uebereinstimmung mit dem Folgenden hervorzubringen, habe ich entgegengesetzte Vorzeichen in (2) und (3) eingeführt.

gehen, in verschiedenen Medien bei derselben Dichte doch verschiedene Elasticität des Aethers annehmen zu müssen; alle optischen Verschiedenheiten verschiedener Medien müssen hiernach also von der directen Einwirkung der ponderabeln auf die Aethertheilchen herrühren. Demzufolge lassen sich in meiner Theorie die allgemeinen Bewegungsgleichungen zwar auch in der Form schreiben:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial z}, & -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}, \\ & & -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

und die Gleichung des Kirchhoff'schen Principis analog:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[(\mathfrak{U}_x \mu + \mathfrak{U}_y \nu + \mathfrak{U}_z \pi) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\mathfrak{B}_x \mu + \mathfrak{B}_y \nu + \mathfrak{B}_z \pi) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\mathfrak{C}_x \mu + \mathfrak{C}_y \nu + \mathfrak{C}_z \pi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right]_1 \\ & = \left[(\mathfrak{U}_x \mu + \mathfrak{U}_y \nu + \mathfrak{U}_z \pi) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\mathfrak{B}_x \mu + \mathfrak{B}_y \nu + \mathfrak{B}_z \pi) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\mathfrak{C}_x \mu + \mathfrak{C}_y \nu + \mathfrak{C}_z \pi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right]_2, \end{aligned} \right.$$

aber die Grössen $\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \dots$ haben hier zusammengesetztere Werthe, als in Hrn. Kirchhoff's Theorie.

Es ist nämlich:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{U}_x &= X_x + A_x - l, & \mathfrak{U}_y &= X_y + A_y, & \mathfrak{U}_z &= X_z + A_z. \\ \mathfrak{B}_y &= Y_y + B_y - l, & \mathfrak{B}_x &= Y_x + B_x, & \mathfrak{B}_z &= Y_z + B_z, \\ \mathfrak{C}_x &= Z_x + C_x - l, & \mathfrak{C}_x &= Z_x + C_x, & \mathfrak{C}_y &= Z_y + C_y. \end{aligned} \right.$$

und bezeichnen hierin $X_y, X_x, \dots$ die Druckcomponenten der inneren Kräfte des Aethers, deren Potential F ist:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} -F &= E \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \right.$$

und $A_x, A_y, \dots$ analog gebildeten Grössen für die Wechselwirkung zwischen Aether und Materie deren allgemeinstes Potential f ist:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} -2f &= A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + A_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + A_3 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & + B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + B_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + B_{21} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + B_{23} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + B_{31} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + B_{32} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ & + 2 \left(C_1 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + C_2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + C_3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + D_1 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + D_2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + D_3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right.$$

solange man keine Annahme zur Bestimmung der Constanten einführt, als dass das Medium in optischer Hinsicht dreifach symmetrisch ist; die Constanten A, B, C sind hierbei Functionen der Schwingungsdauer. Endlich bedeutet l den unbekannten hydrostatischen Druck, den man infolge der Incompressibilität des Aethers entweder aus den X_x, Y_y, Z_z sich absondernd oder durch die Anwendung der Methode der Multiplicatoren direct in die Hauptgleichungen eingeführt denken kann.¹⁾

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn gezeigt ist, dass die so definirten $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \dots$ mit den Kirchhoff'schen $(X_x), (X_y), \dots$ gleiche Form haben.

Die erste Bewegungsgleichung (5) wird nach den Werthen (7), (8) und (9):

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & (A_1 + C_1 + D_1 - (C_2 + C_3 + D_2 + D_3) + E) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + (B_{12} + E) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_{13} + E) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(l - (C_1 + D_1) \frac{\partial u}{\partial x} - (C_2 + D_2) \frac{\partial v}{\partial y} - (C_3 + D_3) \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Wir schreiben dafür kürzer:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial x}, \\ \text{und ebenso die übrigen:} \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = B_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y}, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = B_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen führen auf das Fresnel'sche Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Verbindung mit der Neumann'schen Definition der Polarisationssebene, wenn die sechs Relationen bestehen:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{23}' = B_{32}' = B_1', \quad B_{31}' = B_{13}' = B_2', \quad B_{12}' = B_{21}' = B_3', \\ A_1' = B_2' + B_3' - B_1', \quad A_2' = B_3' + B_1' - B_2', \quad A_3' = B_1' + B_2' - B_3', \end{array} \right.$$

in welchen $B_1' = B_1 + E$, $B_2' = B_2 + E$, $B_3' = B_3 + E$ neue Constanten bezeichnen.

1) Im Obigen ist die vielfach von mir angeführte Annahme, dass bei der Verschiebung eines Elementes Aethers als ganzen keine merklichen Kräfte entstehen, bereits berücksichtigt. Soll sie auch für analoge Drehungen gelten, so muss in (9) sein:

$$B_{12} = B_{21} = D_3, \quad B_{23} = B_{32} = D_1, \quad B_{31} = B_{13} = D_2.$$

Die Hauptgleichungen (10) werden hierdurch:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (B_2' + B_3' - B_1') \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_3' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_2' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial x}$$

u. s. f. und ergeben, wenn man sie resp. nach x , y und z differentiirt und addirt unter Rücksicht auf (1):

$$\Delta L = \Delta \left(B_1' \frac{\partial u}{\partial x} + B_2' \frac{\partial v}{\partial y} + B_3' \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

woraus man für unser Problem schliessen kann:

$$L = B_1' \frac{\partial u}{\partial x} + B_2' \frac{\partial v}{\partial y} + B_3' \frac{\partial w}{\partial z}, \text{ also:}$$

$$(12) \quad l = (B_1 + C_1 + D_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (B_2 + C_2 + D_2) \frac{\partial v}{\partial y} + (B_3 + C_3 + D_3) \frac{\partial w}{\partial z},$$

da das in E multiplicirte Glied nach (1) verschwindet.

Führt man diesen Werth neben $X_x, X_y, \dots, A_x, A_y, \dots$ in (7) ein, so ist $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \dots$ vollständig bestimmt. Man erhält für diese Grössen vollständige Uebereinstimmung mit den Kirchhoff'schen (X_x)...., wenn man einzig noch setzt ¹⁾:

$$D_1 = B_1, \quad D_2 = B_2, \quad D_3 = B_3;$$

denn dann wird:

$$(13) \quad \begin{cases} -\mathfrak{A}_x = -2(B_3' y_y + B_2' z_z), & -\mathfrak{B}_z = -\mathfrak{C}_y = B_1' y_z \\ -\mathfrak{B}_y = -2(B_1' z_z + B_3' x_x), & -\mathfrak{C}_x = -\mathfrak{A}_z = B_2' z_x \\ -\mathfrak{C}_z = -2(B_2' x_x + B_1' y_y), & -\mathfrak{A}_y = -\mathfrak{B}_x = B_3' x_y, \end{cases}$$

und diese Ausdrücke können angesehen werden als herrührend von einem Potential $\mathfrak{F}$, für welches ist:

$$(14) \quad -2\mathfrak{F} = B_1'(y_z^2 - 4y_y z_z) + B_1'(z_x^2 - 4z_x x_x) + B_3'(x_y^2 - 4x_x y_y),$$

d. h. welches mit dem Green'schen Ausdruck (2), von welchem Hr. Kirchhoff ausgegangen ist, völlig übereinstimmt. Das Potential (9) der Wechselwirkung zwischen Materie und Aether erhält dabei den Werth:

$$-2f = 2[(B_2 + B_3 - B_1)x_x^2 + (B_3 + B_1 - B_2)y_y^2 + (B_1 + B_2 - B_3)z_z^2] \\ + B_1 y_z^2 + B_3 z_x^2 + B_2 x_y^2.$$

Die Uebereinstimmung der Resultate unserer Theorie mit denen der Kirchhoff'schen ist hierdurch erwiesen.

Göttingen, August 1884.

1) Ueber die Bedeutung dieser Annahme s. die vorige Anmerkung.