Hier fallen 4 Werthe innerhalb, 2 fallen gerade mit den Gränzen zusammen und 2 liegen knapp auferhalb.

Es wurde also sowohl für die Barometerstände, als für die Regenmengen und für die Windstärken und Richtungen gezeigt, dafs die Schwankungen, welche die nach den Kategorien der Mondesphasen gebildeten Mittel aufweisen, als rein zufällige zu betrachten sind.

Dasselbe wurde ferner auch bei den Resultaten von Flaugergues und Schübler bewiesen, und würde sich gewifs bei allen anderen ähnlichen Untersuchungen ebenso beweisen lassen.

Der Nachweis wurde auf rein mathematischem Wege geliefert, daher folgendes Theorem hierüber aufgestellt werden kann: „Der Mond übt auf die Schwankungen von Barometer, Regen und Wind in unseren Breiten keinen solchen Einflufs, dafs derselbe mit unseren Instrumenten und Beobachtungsmethoden innerhalb eines Zeitraumes von 20 Jahren gefunden werden könnte. Ist derselbe dennoch vorhanden, so mufs er so auferordentlich gering seyn, dafs er für jede Bestimmung als nicht bestehend betrachtet werden kann.“

VI. *Ueber die Zurückwerfung und Brechung des Lichtes durch dünne Metallschichten;* von *E. Jochmann.*

Die optischen Eigenschaften dünner metallischer Lamellen sind neuerdings von Quincke einer Reihe sorgfältiger und nach mannigfaltigen Methoden abgeänderter Experimentaluntersuchungen unterworfen worden¹⁾. Die merk-

1) Pogg. Ann. Bd. 128 S. 541; Bd. 129 S. 44 und 177; Bd. 132 S. 29, 204, 321 und 561; sowie Nachrichten d. Göttinger Ges. d. Wissensch. v. 21. December 1870.

würdigen und zum Theil unerwarteten Resultate dieser Untersuchungen machen eine in der Reflexionstheorie bestehende Lücke fühlbar, indem die Theorie der Interferenzerscheinungen dünner durchsichtiger Lamellen bisher auf metallische Medien nicht ausgedehnt worden ist. Von den Principien der Cauchy'schen Reflexionstheorie ausgehend, bin ich zu einem System von Formeln gelangt, welche die Erscheinungen der Reflexion und Brechung des Lichtes an dünnen metallischen Lamellen mit demselben Grade von mathematischer Genauigkeit darstellen, wie dies bei den bekannten Cauchy'schen Formeln für Metallreflexion unter der Voraussetzung einer beträchtlichen Dicke der reflektirenden Metallschicht der Fall ist. Die Cauchy'schen Formeln für Intensität und Phase des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes schliessen bekanntlich die vereinfachende Voraussetzung in sich, daß der vom Einfluß der longitudinalen Wellen herrührende Ellipticitätscoefficient ϵ gleich Null gesetzt werden darf. Der Einfluß dieses Coefficienten ist bekanntlich bei durchsichtigen Medien immer nur sehr klein, außer in der Nähe des Polarisationswinkels. Bei den Metallen ist ein Polarisationswinkel in dem Sinne wie bei den durchsichtigen Medien nicht vorhanden und die Vergleichung der Cauchy'schen Formeln mit der Erfahrung lehrt in der That, daß der Einfluß des Ellipticitätscoefficienten auch bei metallischen Medien ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden darf. Um so mehr wird diese Voraussetzung bei der Anwendung der Theorie auf dünne Metall-Lamellen gerechtfertigt seyn, bei welchen mehrfache Ursachen zusammenwirken, die den durch die Messungen erreichbaren Grad der Genauigkeit verringern. Obgleich die Methode, deren ich mich zur Ableitung der nachstehenden Formeln bedient habe, die Lösung der Aufgabe in voller Strenge durchzuführen erlaubt, so erschien es doch zweckmäfsig, im Fall des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes jene vereinfachende Voraussetzung einzuführen, um den Formeln eine für die Ableitung praktischer, zur Vergleichung mit der

Erfahrung geeigneter Folgerungen brauchbare Gestalt zu geben.

Die drei in Betracht kommenden Medien sollen der Reihenfolge nach als das 1ste, 2te, 3te bezeichnet und die auf dieselben bezüglichen Größen mit den entsprechenden Indices 1, 2, 3 versehen werden. Es seyen demnach λ_1 und λ_3 die Wellenlängen, α_1 und α_3 der Einfallswinkel im ersten und der Brechungswinkel im dritten Medium. Die Sinus und Cosinus dieser Winkel werden der Kürze wegen mit s_1, c_1, s_3, c_3 bezeichnet. Die Wellenlänge λ_2 und der Brechungswinkel α_2 für das zweite, metallische, Medium sind bekanntlich nach der von Cauchy eingeführten symbolischen Bezeichnungsweise imaginär. Wird demnach

$$\lambda_2 = l_2 e^{-\varepsilon i}$$

gesetzt und werden die complexen Werthe von $\sin \alpha_2$ und $\cos \alpha_2$ mit

$$s_2 e^{-\varepsilon i} \quad c_2 e^{\varepsilon i}$$

bezeichnet, wo l_2, s_2, c_2 reelle positive Größen und ε, u reelle, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Winkel sind, so hat man bekanntlich

$$\frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{s_2}{l_2} = \frac{s_3}{\lambda_3}$$

und die complexen Brechungsverhältnisse für den Uebergang aus dem ersten oder dritten in das zweite Medium werden durch

$$\vartheta_1 e^{\varepsilon i} \quad \vartheta_3 e^{\varepsilon i}$$

ausgedrückt, wo

$$\vartheta_1 = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\lambda_1}{l_2} \quad \vartheta_3 = \frac{s_3}{s_2} = \frac{\lambda_3}{l_2}$$

Die Größen s_2, c_2, ε, u sind dabei durch die stets identisch zu erfüllenden Relationen

$$s_2^2 \cos 2\varepsilon + c_2^2 \cos 2u = 1$$

$$s_2^2 \sin 2\varepsilon - c_2^2 \sin 2u = 0$$

unter einander verbunden.

Zur Abkürzung sey ferner für $\nu = 1$ oder 3

$$q_\nu = \frac{c_\nu s_\nu}{c_\nu s_\nu}$$

$$q_\nu = \frac{c_\nu s_\nu}{c_\nu s_\nu}$$

$$U_\nu = 1 + 2 q_\nu \cos(\varepsilon + u) + q_\nu^2$$

$$U_\nu = 1 + 2 q_\nu \cos(\varepsilon - u) + q_\nu^2$$

$$V_\nu = 1 - 2 q_\nu \cos(\varepsilon + u) + q_\nu^2$$

$$V_\nu = 1 - 2 q_\nu \cos(\varepsilon - u) + q_\nu^2$$

Wird dann die Dicke der Lamelle mit Δ bezeichnet und

$$L = \frac{2\pi c_\nu \sin(\varepsilon + u)}{l_\nu} \cdot \Delta \quad D = e^{-\frac{2\pi c_\nu \sin(\varepsilon + u)}{l_\nu} \cdot \Delta}$$

gesetzt, so ergeben sich für die Amplituden a' und a''' und für die Phasenverzögerungen d' und d''' des in das erste Medium zurückgeworfenen und des in das dritte Medium gebrochenen Strahles die folgenden Ausdrücke:

I. Für ¶ der Einfallsebene polarisiertes Licht:

$$\begin{aligned} a'^2 &= \frac{V_1 U_3 - 2 D^2 [(q_1^2 - 1)(q_3^2 - 1) + 4 q_1 q_3 \sin^2(\varepsilon + u)] \cos 2L - 2 (q_1 q_3 + 1) (q_1 - q_3) \sin(\varepsilon + u) \sin 2L}{U_1 U_3 - 2 D^2 [(q_1^2 - 1)(q_3^2 - 1) - 4 q_1 q_3 \sin^2(\varepsilon + u)] \cos 2L - 2 (q_1 q_3 - 1) (q_1 + q_3) \sin(\varepsilon + u) \sin 2L} + D^4 U_1 V_3 \\ a''^2 &= \frac{U_1 U_3 - 2 D^2 [(q_1^2 - 1)(q_3^2 - 1) - 4 q_1 q_3 \sin^2(\varepsilon + u)] \cos 2L - 2 (q_1 q_3 - 1) (q_1 + q_3) \sin(\varepsilon + u) \sin 2L}{16 D^2} + D^4 V_1 V_3 \end{aligned}$$

$$\tan g d' = \frac{2q_1 \sin(\varepsilon + u) - U_3 + 2D^2 \cos g.(\varepsilon + u) [(q_3^2 - 1) \sin 2L + 2q_3 \sin(\varepsilon + u) \cos 2L] + D^4 V_3}{(q_1^2 - 1)} - \frac{U_3 + 2D^2 q_1^2 + 1}{q_1^2 - 1} [(q_3^2 - 1) \cos 2L - 2q_3 \sin(\varepsilon + u) \sin 2L] - D^4 V_3$$

$$\tan g d''' = \frac{\sqrt{U_1 U_3} \sin(L - \psi) - D^2 \sqrt{V_1 V_3} \sin(L - \varphi)}{\sqrt{U_1 U_3} \cos(L - \psi) + D_2 \sqrt{V_1 V_3} \cos(L - \varphi)}$$

$$\text{wo } \tan g \psi = \frac{(q_1 q_3 - 1) \sin(\varepsilon + u)}{q_1 + q_3 + (q_1 q_3 + 1) \cos(\varepsilon + u)}, \quad \tan g \varphi = \frac{(q_1 q_3 - 1) \sin(\varepsilon + u)}{q_1 + q_3 - (q_1 q_3 + 1) \cos(\varepsilon + u)}.$$

Für $\perp$ zur Einfallsebene polarisiertes Licht:

$$q'^2 = \frac{\mathfrak{B}_1 u_3 - 2D^2 [((q_1^2 - 1)(q_3^2 - 1) + 4q_1 q_3 \sin^2(\varepsilon - u)) \cos 2L - 2(q_1 q_3 + 1)(q_1 - q_3) \sin(\varepsilon - u) \sin 2L] + D^4 u_1 \mathfrak{B}_2}{u_1 u_3 - 2D^2 [((q_1^2 - 1)(q_3^2 - 1) + 4q_1 q_3 \sin^2(\varepsilon - u)) \cos 2L - 2(q_1 q_3 - 1)(q_1 + q_3) \sin(\varepsilon - u) \sin 2L] + D^4 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}$$

$$q'''^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2} \cdot \frac{u_1 u_3 - 2D^2 [((q_1^2 - 1)(q_3^2 - 1) - 4q_1 q_3 \sin 2(\varepsilon - u)) \cos 2L - 2(q_1 q_3 - 1)(q_1 + q_3) \sin(\varepsilon - u) \sin 2L] + D^4 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}{16q_3^2 D^2}$$

$$\tan g d' = \frac{2q_1 \sin(\varepsilon - u) + u_3 - 2D^2 \cos g.(\varepsilon - u) [(q_3^2 - 1) \sin 2L + 2q_3 \sin(\varepsilon - u) \cos 2L] - D^4 \mathfrak{B}_2}{(q_1^2 - 1)} - \frac{u_3 - 2D^2 q_1^2 + 1}{q_1^2 - 1} [(q_3^2 - 1) \cos 2L - 2q_3 \sin(\varepsilon - u) \sin 2L] + D^4 \mathfrak{B}_2$$

$$\tan g d''' = \frac{\sqrt{u_1 u_3} \sin(L - \psi') - D^2 \sqrt{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_3} \sin(L - \varphi')}{\sqrt{u_1 u_3} \cos(L - \psi') + D^2 \sqrt{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_3} \cos(L - \varphi')}$$

$$\text{wo } \tan g \psi' = \frac{(q_1 q_3 - 1) \sin(\varepsilon - u)}{q_1 + q_3 + (q_1 q_3 + 1) \cos(\varepsilon - u)}, \quad \tan g \varphi' = \frac{(q_1 q_3 - 1) \sin(\varepsilon - u)}{q_1 + q_3 - (q_1 q_3 + 1) \cos(\varepsilon - u)}.$$

Um jede Unsicherheit hinsichtlich der Quadranten, in welchen die Phasen zu nehmen sind, auszuschließen, sind die Tangentenformeln so geschrieben, daß die Zähler und Nenner derselben dem Vorzeichen nach stets mit dem Sinus und Cosinus übereinstimmen. Die Amplitude des einfallenden Strahles ist gleich Eins gesetzt und die übrigen Amplituden sowie die in den Ausdrücken für d_{III} , b_{III} vorkommenden Quadratwurzeln sind stets ihrem absoluten, positiven Werthe nach zu nehmen.

Die Formelsysteme I und II unterscheiden sich nur dadurch, daß in letzterem an Stelle von q_ν und u , q_ν und $-u$, mithin auch $\mathfrak{U}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ an Stelle von U_ν , V_ν getreten sind, während L und D ihre Werthe unverändert behalten. Außerdem ist in dem Ausdruck für a_{III}^2 der Factor $\frac{c_1^2}{c_3^2}$ hinzugetreten.

Für *senkrechte* Incidenz wird

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = s_3 &= 0 & c_1 = c_2 = c_3 &= 1 \\ u &= 0 & q_\nu = q_\nu &= \vartheta_\nu \end{aligned}$$

und beide Formelsysteme werden identisch. Für die reflektirten Strahlen ist allerdings in den Formeln ein Phasenunterschied $d' - b' = \pm \pi$ angezeigt; dieser rührt jedoch lediglich von der *Richtungsumkehrung* des Strahles her. Erfolgen nämlich die Aetherschwingungen *senkrecht* zu der als Coordinatenebene gewählten Einfallsebene, so entspricht der gleichen Phase des einfallenden und des reflektirten Strahles auch die gleiche Schwingungsrichtung, erfolgen dagegen die Schwingungen *in* der Einfallsebene, so entspricht der gleichen Phase die entgegengesetzte Schwingungsrichtung des normal reflektirten Strahles.

Ist $\vartheta_1 > \vartheta_3$, so behalten die Formeln ihre Geltung für alle Werthe des Einfallswinkels; bei streifender Incidenz wird dann $q_1 = \infty$, $q_1 = 0$ und es wird stets

$$a'^2 = a'^2 = 1, \quad d' = b' = \pi.$$

Ist dagegen $\vartheta_3 > \vartheta_1$, so gelten die Formeln nur bis zum Gränzwinkel der totalen Reflexion am dritten Medium,

für welchen $s_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$, $s_3 = 1$, $q = \infty$, $q_3 = 0$ wird. Der Fall $s_3 > 1$ erfordert eine besondere Discussion.

Für verschwindende Metalldicke oder für $\Delta = 0$, $L = 0$, $D = 1$ reduciren sich die Intensitätsausdrücke auf die Fresnel'schen Intensitätsformeln, während die Tangenten der Phasen zu Null werden, wie dies zu erwarten war, da bei Herleitung des Formelsystems II der Ellipticitätscoefficient gleich Null angenommen ist.

Für $\Delta = \infty$, $D = 0$ erhält man

$$a'^2 = \frac{U_1}{V_1}, a''^2 = 0, \tan d' = \frac{-2q_1 \sin(\varepsilon + u)}{-(q_1^2 - 1)}, \lim d''' = L - \psi$$

$$a'^2 = \frac{u_1}{\mathfrak{B}_1}, a''^2 = 0, \tan b' = \frac{+2q_1 \sin(\varepsilon - u)}{+(q_1^2 - 1)}, \lim b''' = L - \psi'$$

welches die Cauchy'schen Formeln sind. Durch das Zeichen $\lim$ ist angedeutet, daß d''' und b''' sich bei wachsender Dicke der angegebenen Gränzform nähern. Ein constanter Gränzwertb ist nur vorhanden in dem unten zu erörternden Gränzfall $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Die Formelsysteme I und II sind im Wesentlichen durch die eigenthümliche Verbindung der periodischen und exponentiellen Functionen charakterisirt. Der Einfluß der einen oder der andern überwiegt je nach dem Werth der Größe $\varepsilon + u$, welche mit dem doppelten Werth des sogenannten „Hauptazimut's“ der elliptischen Polarisation übereinkommt. Durch diese Größe wird nämlich der Werth des Verhältnisses

$$\frac{-\log \text{nat } D}{L} = \tan(\varepsilon + u)$$

bedingt. Der Winkel ε kann zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ variiren.

1. Der Gränzfall $\varepsilon = 0$ entspricht den *durchsichtigen* Medien. In Folge der zwischen den Größen s_3 , c_2 , ε , u bestehenden Relationen ist dann $u = 0$ oder $u = \frac{\pi}{2}$, je

nachdem $s_2 < 1$ oder $s_2 > 1$. — Der Fall $\varepsilon = 0$, $u = 0$, $D = 1$ liefert die bekannten Formeln für gewöhnliche Reflexion und Brechung an durchsichtigen Lamellen, aus welchen die exponentiellen Functionen verschwunden sind.

Der Fall $\varepsilon = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, woraus $L = 0$ folgt, entspricht der Reflexion an einer dünnen durchsichtigen Lamelle, für welche der Gränzwinkel der Totalreflexion überschritten ist. Wie aus den Beobachtungen von Newton, Stokes und Quincke bekannt ist, kann in diesem Fall dennoch bei hinreichend kleinen Werthen von Δ Licht aus dem ersten in das dritte Medium übergehen. In der That findet nach den Grundsätzen der Cauchy'schen Reflexionstheorie in einer sehr dünnen Schicht jenseits der Gränzfläche des total reflektirenden Mediums eine Aetherbewegung statt, welche derjenigen in der Oberflächenschicht metallischer Medien analog ist und als ein Gränzfall derselben betrachtet werden kann. Durch Einsetzung obiger Werthe für ε und u reduciren sich die Formeln I und II, wenn noch

$$q_1 = \tan \varphi_1 \quad q_1 = \tan \psi_1$$

$$q_3 = \tan \varphi_3 \quad q_3 = \tan \psi_3$$

gesetzt wird, auf:

$$a'^2 = \frac{(1 - D^2)^2 + 4 D^2 \sin^2 (\varphi_1 - \varphi_3)}{(1 - D^2)^2 + 4 D^2 \sin^2 (\varphi_1 + \varphi_3)}$$

$$\alpha'^2 = \frac{(1 - D^2)^2 + 4 D^2 \sin^2 (\psi_1 - \psi_3)}{(1 - D^2)^2 + 4 D^2 \sin^2 (\psi_1 + \psi_3)}$$

$$\alpha_{III}^2 = \frac{q_3}{q_1} (1 - a'^2) = \frac{16 D^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_3}{(1 - D^2)^2 + 4 D^2 \sin^2 (\varphi_1 + \varphi_3)}$$

$$\alpha_{III}^2 = \frac{q_3}{q_1} (1 - \alpha'^2) = \frac{c_1^2}{c_3^2} \cdot \frac{16 D^2 \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_3}{(1 - D^2)^2 + 4 D^2 \sin^2 (\psi_1 + \psi_3)}$$

$$\tan d' = \frac{-\sin 2\varphi_1}{+\cos 2\varphi_1} \cdot \frac{1 - D^4}{1 - 2 D^2 \frac{\cos 2\varphi_3}{\cos 2\varphi_1} + D^4}$$

$$\tan d' = \frac{-\sin 2\psi_1}{-\cos 2\psi_1} \cdot \frac{1 - D^4}{1 - 2 D^2 \frac{\cos 2\psi_3}{\cos 2\psi_1} + D^4}$$

$$\operatorname{tang} d_{iii} = \frac{+\cos(\varphi_1 + \varphi_3)}{+\sin(\varphi_1 + \varphi_3)} \cdot \frac{1 - D^2}{1 + D^2}$$

$$\operatorname{tang} d_{iii} = \frac{-\cos(\psi_1 + \psi_3)}{+\sin(\psi_1 + \psi_3)} \cdot \frac{1 - D^2}{1 + D^2}$$

Im Fall, dass das dritte Medium mit dem ersten identisch ist, gehen die Formeln in die für diesen Fall von Stokes ¹⁾ gegebenen über. Für $D = 0$ wird

$$a'^2 = a'^2 = 1 \quad a_{iii}^2 = a_{iii}^2 = 0$$

$$d' = -2\varphi_1 \quad d' = 2\psi_1 - \pi$$

welches mit Rücksicht auf die Bedeutung von φ_1 und ψ_1 die gewöhnlichen Formeln für Totalreflexion sind.

2. Der Gränzfall $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, woraus stets $u = 0$, $L = 0$ folgt, ist zwar in der Natur, wie es scheint, nicht verwirklicht. Indessen nähern sich demselben die meisten Metalle, insbesondere aber die bisher am leichtesten in durchsichtigen Schichten darstellbaren Edelmetalle weit mehr als dem entgegengesetzten Gränzfall $\varepsilon = 0$. Andererseits ist das Ergebniss theoretisch bemerkenswerth, dass das dem Fall $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ entsprechende Formelsystem mit dem oben für Totalreflexion an durchsichtigen Lamellen aufgestellten der Form nach fast völlig identisch ist, mit der Modification nämlich, dass die Zähler der Ausdrücke für $\operatorname{tang} d'$ und $\operatorname{tang} d_{iii}$ die entgegengesetzten Vorzeichen erhalten. Die den Spielraum der Einfallswinkel beschränkende Bedingung $s_2 > 1$ fällt aber hier fort und s_1 kann von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, wenn nicht die gröfseren Werthe durch Eintritt der Totalreflexion am *dritten* Medium ausgeschlossen sind. — Für $\Delta = \infty$ hat man den Fall einer Totalreflexion für beliebige Einfallswinkel. — Es ist leicht zu erweisen, dass bei wachsender Dicke weder im gebrochenen noch im reflektirten Licht Maxima oder Minima der Intensität stattfinden können. Die Maxima von a'^2

1) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society Vol. VIII 1849.*

und α''^2 müßten nämlich den Minimis von α'''^2 und α''^2 und auch den Maximis des Ausdrucks $\left(D - \frac{1}{D}\right)^2 + 4 \sin^2(\varphi_1 + \varphi_3)$ entsprechen. In diesem ist aber das zweite Glied von der Dicke unabhängig, während die quadrierte Klammer zwischen den Gränzen $\Delta = 0$ und $\Delta = \infty$ kein reelles Minimum besitzt. Es würde also ein derartiges Medium in einer Schicht von variabler Dicke weder im reflektirten noch im durchgehenden Licht eine den Newton'schen Farben durchsichtiger Körper analoge Interferenzerscheinung zeigen.

Für den durchgelassenen Strahl läßt sich nun diese Behauptung sogleich dahin verallgemeinern, daß bei wachsender Dicke niemals Maxima und Minima der Intensität stattfinden können, sobald $\varepsilon + u > \frac{\pi}{4}$ ist. Denkt man sich nämlich Zähler und Nenner des allgemeinen Ausdrucks für α'''^2 durch D^2 dividirt, so wird der Zähler von der Dicke unabhängig und der Nenner nimmt die Form an:

$$N = U_1 U_3 D^{-2} + V_1 V_3 D^2 - 2(A \cos 2L + B \sin 2L),$$

wo, wie eine leichte Rechnung ergibt:

$$A^2 + B^2 = U_1 U_3 V_1 V_3$$

ist. Die Maxima von α'''^2 müssen nun den Minimis von N entsprechen und umgekehrt. Die Differentiation nach Δ ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{4\pi c_2} \frac{\partial N}{\partial \Delta} &= \sin(\varepsilon + u) (U_1 U_3 D^{-2} - V_1 V_3 D^2) + \\ &\quad + 2 \cos(\varepsilon + u) (A \sin 2L - B \cos 2L) \\ \frac{l_2}{4\pi c_2} \frac{\partial^2 N}{\partial \Delta^2} &= \sin^2(\varepsilon + u) (U_1 U_3 D^{-2} + V_1 V_3 D^2) + \\ &\quad + 2 \cos^2(\varepsilon + u) (A \cos 2L + B \sin 2L). \end{aligned}$$

Für $\Delta = 0$ besitzt $\frac{\partial N}{\partial \Delta}$ den *positiven* Anfangswerth $\frac{4\pi c_2}{l_2} \cdot 4 q_1 q_3 (q_1 + q_3) \sin 2(\varepsilon + u)$. Der zweite Differentialquotient aber kann, für $\varepsilon + u > \frac{\pi}{4}$, nie negativ werden, denn man hat:

$$(\mathcal{V}(U_1 U_3) \cdot D^{-1} - \mathcal{V}(V_1 V_3) \cdot D^1)^2 = U_1 U_3 D^{-2} + \\ + V_1 V_3 D^2 - 2 \mathcal{V}(U_1 U_3 V_1 V_3) > 0.$$

Der numerische Werth der Klammer $A \cos 2L + B \cos 2L$ kann nun die Gränzwerte $\pm \sqrt{A^2 + B^2} = \pm 2 \mathcal{V}(U_1 U_3 V_1 V_3)$ nicht überschreiten. Es ist also stets

$$(U_1 U_3 D^{-2} + V_1 V_3 D^2) \pm 2 (A \cos 2L + B \cos 2L) > 0,$$

woraus für $\varepsilon + u > \frac{\pi}{4}$ $\frac{\partial^2 N}{\partial \Delta^2} > 0$ folgt. Hieraus folgt aber ferner, daß $\frac{\partial N}{\partial \Delta}$ von seinem positiven Anfangswerthe aus stetig wächst, also nie Null werden kann, daß also im durchgehenden Licht keine Maxima oder Minima vorhanden sind, sondern die Intensität mit wachsender Dicke stetig abnimmt.

Für den *reflektirten* Strahl dagegen nimmt die Bedingung für die Maxima und Minima die Form an:

$$U_3 D^{-2} \sin(2L + \varepsilon + u - \varphi) + V_3 D^2 \sin(2L - \varepsilon - u - \psi) \\ - 2 \sqrt{\frac{U_3 V_3}{U_1 V_1}} \sin 2(\varepsilon + u) = 0,$$

wo

$$\operatorname{tg} \frac{\psi + \varphi}{2} = \frac{q_3^2 - 1}{2 q_3 \sin(\varepsilon + u)}, \quad \operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{q_1^2 - 1}{q_1^2 + 1} \cotg(\varepsilon + u).$$

Für größere Werthe von Δ wird hier offenbar der Einfluß des mit D^{-2} multiplicirten Gliedes überwiegend und da dieses in Folge seines periodischen Factors unendlich oft sein Vorzeichen wechselt, so sind unendlich viele Maxima und Minima vorhanden. Diese nehmen jedoch an Deutlichkeit sehr schnell ab, indem die periodisch schwankende Intensität sehr schnell gegen den Mittelwerth $\frac{V_1}{U_1}$ convergirt.

Es kommt noch darauf an, zu entscheiden, ob, nach Analogie der Erscheinungen der Newton'schen Farbringen zu sprechen, bei einer vom Centrum nach der Peripherie hin an Dicke zunehmenden Metallschicht die Mitte hell oder dunkel erscheint. Es wird für $\Delta = 0$:

$$\frac{\partial a'^2}{\partial \Delta} = \frac{4\pi c_2}{l_2} \cdot \frac{q_1 q_3^2 (q_1 - q_3) \sin 2(s + u)}{(q_1 + q_3)^3}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv oder negativ, je nachdem das dritte Medium optisch dichter oder dünner ist als das erste. Es muß also z. B. bei einer derartigen auf Glas haftenden Metallbelegung von variabler Dicke die Mitte im reflektirten Licht dunkel oder hell erscheinen, je nachdem die Reflexion in Luft oder in Glas erfolgt. — Ist das dritte Medium mit dem ersten identisch, ist also $q_1 = q_3$, so ist für $\Delta = 0$, $a'^2 = 0$ und $\frac{\partial a'^2}{\partial \Delta} = 0$ und die Mitte erscheint dunkel.

Zu vollkommen analogen Resultaten führt die Discussion der Ausdrücke für a'^2 und a_{III}^2 .

Was nun die Vergleichung der angegebenen Resultate mit der Erfahrung betrifft, so haben bisher nur einige Edelmetalle, insbesondere Silber, Gold und Platin sich zur Darstellung in hinreichend dünnen durchsichtigen Schichten geeignet erwiesen. Diese Metalle sind im Allgemeinen durch große Werthe der Constante ϵ charakterisirt. Für Silber ist nach den Beobachtungen von Jamin, bei Reflexion in Luft:

	$\log \mathcal{P}_1 =$	$s =$	$\mathcal{P}_1 \cos \epsilon$	$\mathcal{P}_1 \sin \epsilon$
für die Fraunhofer'sche Linie <i>D</i>	0,4595	79° 15'	0,5373	2,830
» » » » <i>H</i>	0,2740	77 16	0,4142	1,833

Aus den Beobachtungsreihen von Quincke (Opt. Unters. §§. 39—41) ergeben sich folgende Werthe für die optischen Constanten dünner Silber- und Goldlamellen bei Reflexion in Luft und in Glas (die Beobachtungen beziehen sich auf rothes Licht):

	Reflex. in Luft		Reflex. in Glas		$\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_3}$	μ
	$\log \mathcal{P}_1$	s	$\log \mathcal{P}_3$	s		
Silber auf Crown Glas	0,5742	87° 54'	0,3545	84° 4' $\frac{1}{2}$	1,658	1,5149
Silber auf Flint Glas	0,5349	86 24	0,3764	81 37	1,440	1,6258
Gold auf Crown Glas	0,4016	84 57	0,2985	82 43	1,268	1,5149

Hier beziehen sich die in einer Horizontalreihe enthaltenen Beobachtungen jedesmal auf *dieselbe* Metallschicht. Die Theorie würde demnach fordern, daß die Werthe der Constante ε bei Reflexion in Luft und Glas identisch seyen und daß der Quotient $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}$ gleich sey dem in der letzten Columnne angegebenen Brechungsexponenten μ des Glases. Diese Forderungen der Theorie sind offenbar nur sehr unvollkommen erfüllt, was zu der Annahme nöthigt, daß in Folge einer verschiedenen Molekularbeschaffenheit der an Glas und an Luft gränzenden Metallflächen die Reflexionsconstanten etwas veränderte Werthe annehmen. — Aehnlich ergibt die Beobachtungsreihe des §. 43 für die Reflexionsconstanten derselben Silberoberfläche in Luft, Wasser und Terpentinöl:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 87^\circ 24' & \varepsilon_2 = 87^\circ 52' & \varepsilon_3 = 86^\circ 9' \\ l\vartheta_1 = 0,5178 & l\vartheta_2 = 0,4264 & l\vartheta_3 = 0,3595 \\ \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = 1,231, \mu_2 = 1,336 & | & \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} = 1,440, \mu_3 = 1,474 \end{array}$$

Für *durchsichtige* Metallschichten handelt es sich zunächst darum, festzustellen, ob der von der Theorie geforderte Grad der Durchsichtigkeit mit der Erfahrung übereinstimmt. Da der Ausdruck für die Intensität des durchgegangenen Strahls den Factor D^2 enthält, so wird dieser zunächst zu bestimmen seyn. Mit Hülfe der oben angegebenen optischen Constanten des Silbers für die Fraunhofer'schen Linien D und H berechnet man leicht die in folgender Tabelle enthaltenen Werthe von $\frac{1}{D^2}$ für verschiedene Silberdicken, unter Voraussetzung senkrechter Incidenz:

Δ mm	Fraunhofer'sche Linie		Δ mm	Fraunhofer'sche Linie	
	D	H		D	H
0,01	1,830	1,786	0,06	37,53	32,53
02	3,348	3,192	07	68,67	58,10
03	6,126	5,702	08	125,66	103,8
04	11,21	10,19	09	229,9	185,4
05	20,51	18,20	10	420,7	331,2

Stellt man ferner den wirklichen Intensitätsausdruck für den durch das System aus Silber und Flintglas hindurchgegangenen Strahl auf, wobei auch noch der Intensitätsverlust beim Durchgang durch die unbelegte Glasfläche in Betracht kommt, so ergibt sich, daß der Werth von D^2 bei senkrechter Incidenz noch mit einem numerischen Factor zu multipliciren ist, der sich bei wachsender Dicke für die Fraunhofer'sche Linie D dem Gränzwertb 1,747, für die Linie H dem Gränzwertb 2,2556 nähert, so daß die größere Durchsichtigkeit für die Strahlen von hoher Brechbarkeit dadurch noch mehr hervortritt.

Quincke fand (Opt. Unters. §. 52), daß Silber von $0^{\text{mm}},09$, Gold von $0^{\text{mm}},16$ und Platin von $0^{\text{mm}},40$ Dicke noch durchsichtig erschienen. Die Reihenfolge des Grades der Durchsichtigkeit ist mit Rücksicht auf die optischen Constanten dieser Metalle die von der Theorie zu erwartende und der Werth 0,09 für Silber wird als ein befriedigend mit der Theorie übereinstimmender Gränzwertb gelten können, da die Extinction bei dieser Dicke bis auf etwa $\frac{1}{100}$ der ursprünglichen Intensität fortgeschritten ist.

Wenn gleich die bisher erörterten Erscheinungen bereits Abweichungen von der Theorie erkennen ließen, die nur unter der Annahme gewisser molekularen Verschiedenheiten der Metalloberflächen und einer dadurch bedingten Variation der optischen Constanten zu erklären waren, so war doch der allgemeine Charakter der Erscheinungen mit der Theorie in Uebereinstimmung. — Eine principielle Differenz zwischen Theorie und Erfahrung tritt dagegen hervor in den von Quincke an dünnen Metall-Lamellen beobachteten Newton'schen Farbenringen (Opt. Unters. §. 49—64). Silber, Gold und Platin gehören unzweifelhaft zu der Gruppe von Metallen, für welche die Bedingung $\varepsilon + u > \frac{\pi}{4}$ erfüllt ist, für welche also, wie oben nachgewiesen worden, im durchgelassenen Licht überhaupt keine Maxima und Minima stattfinden können. Was ferner die Maxima und Minima des reflektirten Lichts betrifft, so

sind deren allerdings unendlich viele vorhanden, welche sich jedoch, wie leicht zu zeigen ist, durch ihre geringe Intensität der Beobachtung entziehen. Bemerkt man, daß für eine Silberdicke von $0^{\text{mmm}},1$ nur noch Intensitätsschwankungen von der Ordnung von etwa $\frac{1}{400}$ der Gesamt-Intensität erwartet werden können, so braucht man nur die Anzahl der bis zu dieser Dicke der Theorie nach zu erwartenden Maxima und Minima abzuzählen. Für $\Delta = 0^{\text{mmm}},1$ wird $2L = \frac{4\pi c_2 \vartheta_1 \cos(\varepsilon + u)}{\lambda_1} \cdot 0^{\text{mmm}},1$. Im einfachsten Fall der senkrechten Incidenz wird $c_2 = 1$, $u = 0$, ferner für die Fraunhofer'sche Linie D $\lambda_1 = 0^{\text{mmm}},5888$, so daß man erhält:

$$2L = 0,1825 \cdot 2\pi = 65^\circ 42'.$$

Es haben also bis zu dieser Dicke die periodischen Glieder der Function ihre Periode noch nicht zum fünften Theile durchlaufen und es wird im günstigen Falle nur etwa ein Maximum oder ein Minimum, abgesehen von dem hellen oder dunklen Centrum, beobachtet werden können.

Merkwürdigerweise wurde die Breite der von Quincke beobachteten hellen und dunklen Streifen weder durch die Farbe noch durch den Einfallswinkel wesentlich beeinflusst. Wenn dieselben dennoch als Newton'sche Interferenzstreifen zu betrachten sind, so würde daraus folgen, daß die Cauchy'sche Reflexionstheorie auf so dünne Metall-Lamellen nicht ohne wesentliche Modification anwendbar ist. Es müßten den optischen Constanten wesentlich verschiedene Werthe beigelegt werden, insbesondere müßte die Constante ε beträchtlich kleinere Werthe erhalten als für undurchsichtige Metalle, um mit der Erfahrung in Einklang zu bleiben. Daraus würde sich aber mit Nothwendigkeit die weitere Consequenz ergeben, daß auch bei undurchsichtigen Metallen die Anordnung des Aethers in einer Oberflächenschicht von meßbarer Dicke wesentlich verschieden sey von derjenigen im Innern des Metalls, so daß die Größen l_2 und ε ihren Charakter als Constanten

verlieren und dafs, wie schon Quincke angenommen hat, die Reflexion nicht in einer geometrischen Gränzfläche, sondern innerhalb einer Uebergangsschicht von endlicher Dicke stattfinden würde.

Die Mitte des von Quincke beobachteten Fransen-systems, entsprechend $\Delta = 0$, erschien bei Silberlamellen dunkel, wenn die Reflexion in Luft, hell, wenn sie in Glas erfolgte, was mit dem oben entwickelten Resultat der Theorie übereinstimmt. Gold und Platin zeigten ein zum Theil abweichendes Verhalten.

Ich enthalte mich für jetzt einer näheren Discussion der Ausdrücke für die Phasen und beschränke mich darauf, nur noch auf ein leicht controlirbares Versuchsergebnat hinzuweisen, welches ebenfalls mit der Theorie in Widerspruch steht. Hr. Quincke fand nämlich (Gött. Nachr. Dec. 1870), dafs der Gangunterschied zwischen den durch Luft und durch Metall gegangenen Strahlen für verschiedene Metaldicken, welche $< 0^{\text{mm}},04$ sind, nahezu $\pm \pi$ betrug. Für *kleine* Metaldicken ist die Bedingung eines constanten Gangunterschiedes zwischen Metall und Luft durch die Theorie überhaupt nicht zu erfüllen. Für gröfsere Metaldicken nähert sich, wie bereits oben erwähnt, die Phase d_{III} der Gränzform $L - \psi$ und es müfste die mit der Dicke wachsende Gröfse L der entsprechenden Gröfse für Luft gleich seyn; wenn der Gangunterschied den constanten Werth ψ annehmen sollte. Die daraus folgende Bedingung ist:

$$\vartheta_1 \cos(\varepsilon + u) = \frac{c_1}{c_2}.$$

Dieselbe ist allgemein, d. h. für beliebige Einfallswinkel nicht erfüllbar; soll dieselbe für senkrechte Incidenz und näherungsweise für *kleine* Einfallswinkel gelten, so reducirt sie sich auf $\vartheta_1 \cos \varepsilon = 1$, während oben für Silber $\vartheta_1 \cos \varepsilon = 0,5373$ gefunden wurde. Aber selbst im Fall, dafs diese Bedingung erfüllt wäre, würde sich der constante Gangunterschied nicht gleich $\pm \pi$ ergeben, da der Winkel ψ stets im ersten Quadranten liegt.

Liegnitz, im Januar 1871.