VI. *Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe; von W. Voigt.*

(Ueberarbeitet und vervollständigt aus den Sitzungsber. der Berl. Acad.
der Wiss. vom 22. Juni 1882.)

Der Stoss zweier cylindrischer Körper, deren Querschnitt klein ist gegen ihre Länge, ist als Problem der Elasticität zuerst von Cauchy¹⁾ behandelt worden, welcher aber nur einige Resultate seiner Entwicklungen, nicht diese selbst veröffentlicht hat. Später hat Poisson eine Lösung des Problems gegeben.²⁾ Sein Grundgedanke ist, dass während der Dauer ihrer Berührung die verschiedenen stossenden Stäbe angesehen werden können als einen einzigen zusammensetzend, sodass für diese Zeit diejenigen Betrachtungen, welche die longitudinalen Schwingungen von Prismen ergeben, Anwendung finden. Um die Trennung der einzelnen Theile zu bewirken, ist nach ihm erforderlich und hinreichend: erstens, dass zu beiden Seiten der Berührungsstelle die Spannung gleich Null ist, damit nicht der eine Stab gegen den anderen gedrückt wird, und zweitens, dass zugleich eine Geschwindigkeitsdifferenz der sich berührenden Grenzelemente im Sinne einer Trennung vorhanden ist. Auf Grund dieser Definition gelangt er zu dem Resultat, dass vollständig elastische Stäbe nach dem Stoss stets zusammenbleiben, mit Ausnahme des einzigen Falles, dass sie gleichartig und gleichgestaltet sind.

In den funfziger Jahren hat zuerst Hr. Geh. Rath F. Neumann in seinen Vorlesungen über Elasticität an hiesiger Universität den Fehler aufgedeckt, der in der Poisson'schen Definition des Zeitpunktes der Trennung liegt, und bei der vorgetragenen Lösung des Problems darauf hingewiesen, wie der Zusammenhang nicht mehr bestehen kann, wenn die elastische Spannung in der Grenzstelle aus einer Druckkraft (begleitet von einer Compression) zu einer Zugkraft (begleitet von einer Dilatation) wird, — eine Bemerkung,

1) Cauchy, Bull. d. Scienc. d. l. Soc. Philomat. Déc. 1826. p. 180.

2) Poisson, Traité de Mécanique § 499 bis 504.

kung, die der Erfahrung so entspricht, dass nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht. Ist in dem Moment, wo eine solche Dilatation in der Berührungsstelle entsteht, überdies eine Geschwindigkeitsdifferenz der Schwerpunkte der Stäbe vorhanden im Sinne einer Trennung, so beendet dieser Augenblick den Stoss, — wenn nicht, kann sich derselbe wiederholen.

Viel später hat (ohne die Neumann'sche Lösung zu kennen) Hr. Saint Venant¹⁾ das Problem in derselben Weise behandelt, sowohl für gleichartige und gleich dicke Stäbe, als für den allgemeineren Fall, den Neumann seiner Zeit nur andeutungsweise besprochen hat. Noch fehlte aber, soviel ich weiss, eine Prüfung der neuen Theorie, denn die von Schneebeili²⁾ veröffentlichten Beobachtungen sind ohne Rücksicht auf dieselbe durchgeführt. Dies bewog mich, einige Messungen anzustellen, um die Geschwindigkeiten der Stäbe nach dem Stoss, wie sie die Beobachtung zeigt, mit den nach der Theorie berechneten zu vergleichen; ich wollte mich dabei auf den einfachsten Fall gleichartiger und gleich dicker Stäbe beschränken, wurde aber am Schluss der Untersuchung durch die Bekanntschaft mit einer Arbeit von Hrn Prof. Boltzmann³⁾, wenigstens noch einige Beobachtungsreihen für den Stoss verschieden dicker Stäbe gleicher Art hinzuzufügen.

Im Folgenden werde ich zunächst zeigen, wie die Beobachtungen der genannten Theorie durchaus widersprechen, und sodann versuchen, dieselben durch eine etwas modificirte Theorie zu erklären.

I. Die Beobachtungen sind mit Stäben aus glashartem Stahl von ca. 8 und 11 mm Dicke und 20 bis 40 cm Länge⁴⁾ angestellt, welche mit je vier Fäden von $2\frac{1}{3}$ m Länge als Pendel an einem geeigneten nahe der Decke an der Wand des Beobachtungsraumes befestigten Gestelle aufgehängt

1) Saint Venant, Liouville's Journ. (2) 12. p. 237. 1867.

2) Schneebeili, Pogg. Ann. 143. p. 239. 1871.

3) L. Boltzmann, Sitzb. d. k. Acad. d. Wissensch. 84. p. 1225. 1881. Wied. Ann. 17. p. 343.

4) Die Schwierigkeit der Härtung verbot grössere Längen.

waren. Als Zeiger angebrachte feine Spitzen gestatteten, auf einer Theilung die Schwingungsamplituden abzulesen, die der stossende Stab vor dem Zusammentreffen und beide nach demselben erreichten. Der gestossene Stab befand sich anfangs in Ruhe — was die Allgemeingültigkeit der gezogenen Folgerungen augenscheinlich nicht beeinträchtigt, denn die ganze Erscheinung hängt nur von den relativen Geschwindigkeiten ab.

Eine ganz besondere Sorgfalt war darauf zu verwenden nöthig, dass die Stäbe mit ihren Längsaxen in eine Gerade fielen und sich ohne seitliche Schwankungen vor und nach dem Stoss bewegten. Demgemäss wurde der stossende Stab an einem geeignet geschnittenen feinen Papierstreifen in seiner Anfangslage gehalten und erst, nachdem er vollständig beruhigt war, durch Durchbrennen jenes Streifens in Bewegung gesetzt. Nach dem ersten Stoss wurden die ersten Amplituden beider Stäbe gleichzeitig beobachtet. Hr. stud. Wiechert hat mich hierbei freundlichst unterstützt.

Ferner war zu berücksichtigen, dass in der Ruhelage die beiden Stäbe sich berühren mussten, ohne irgend einen Druck aufeinander auszuüben; dies liess sich dadurch prüfen, dass jeder Stab, wenn der andere entfernt wurde, seine Lage ungeändert beibehalten musste; Abweichungen, die 0,1 mm nicht überstiegen, wurden bei der Berechnung der Resultate berücksichtigt. — Um bei der Ablesung der Amplituden Parallaxe zu vermeiden, waren hinter den Scalen Spiegelglasstreifen aufgestellt.

In den folgenden Tafeln sind die Resultate der Beobachtungen mitgetheilt. Die erste Colonne enthält die Anfangsamplitude des stossenden Stabes, der durch eine römische Zahl charakterisirt ist. Die Amplituden sind so klein gewählt, dass sie ohne merklichen Fehler als Maass für die Stossgeschwindigkeit angesehen werden können. Die zweite und dritte Colonne enthalten die ersten Amplituden (resp. Geschwindigkeiten) des stossenden und gestossenen Stabes nach der Trennung.

Jede Ablesung ist öfter wiederholt worden, je nach Umständen fünf- bis zwölfmal, aber da alle Fehlerquellen im

gleichen Sinne, nämlich die Amplituden verkleinernd, wirkten, so war es unthunlich, aus allen beobachteten Zahlen das Mittel zu nehmen; es sind vielmehr von vornherein alle auffällig kleinen Werthe, zumal solche Beobachtungen, bei denen die wohl nie vollständig fehlenden seitlichen Schwankungen der Stäbe stark waren, von der Berechnung ausgeschlossen, und nur drei bis vier der grössten der Regel nach benutzt worden. Die einzelnen Ablesungen differirten bei den kleinsten Amplituden (20 mm) kaum um 0,3 mm, bei den grössten (200 mm) um fast 1,5 mm; die Sicherheit der angegebenen Zahlen schätze ich im ersten Falle auf etwa 0,2 mm, im letzten auf 0,5 mm.

Die Längen der verwandten gleich dicken Stäbe I bis IV waren:

$$L_I = L_{II} = 30 \text{ cm}, \quad L_{III} = 20 \text{ cm}, \quad L_{IV} = 40 \text{ cm}$$

und ihre Massen sehr nahe ihren Längen proportional; genauer, wenn man mit μ die mittlere Masse auf 10 cm Länge bezeichnet:

$$m_I = 226,0 \text{ g} = \mu (3 - 0,0022); \quad m_{II} = 226,1 \text{ g} = \mu (3 - 0,0020); \\ m_{III} = 151,4 \text{ g} = \mu (2 + 0,0027); \quad m_{IV} = 302,5 \text{ g} = \mu (4 + 0,0016).$$

Dabei war $\mu = 75,5 \text{ g}$.

Der dünnere Stab V hatte eine Länge von 30 cm und wog 115 g.

Tabelle I.
Stäbe von gleichem Querschnitt.

V_1^0	V_1	V_2	V_2^0	V_2	V_1
I	I	II 1)	II	II	I 2)
20	0,3	19,7	20	0,3	19,5
40	0,5	39,2	40	0,5	39,3
80	1,1	78,8	80	1,3	78,7
120	1,6	117,9	120	1,7	118,2
160	2,3	156,8	160	2,1	157,5
I	I	III 3)	III	III	I 4)
20	4,2	23,2	20	— 3,2	15,9
40	8,4	46,2	40	— 6,8	31,2
80	18,0	91,6	80	—12,0	61,4
160,4	37,6	183,6	160,8	—22,0	122,0

V_1^0	V_1	V_2	V_2^0	V_2	V_1
I	I	IV 5)	IV	IV	I 6)
20	— 2,5	16,5	20	3,0	22,3
40	— 4,9	33,3	40	6,6	44,7
80	— 9,1	66,3	80	13,1	89,3
120	—13,4	99,2	120	20,0	133,3
160	—17,2	132,0			
III	III	IV 7)	IV	IV	III 8)
20	— 6,0	13,0	20	6,9	26,0
40	—11,4	25,8	40	14,0	51,8
80,4	—20,8	50,4	80,2	29,6	99,6
160,8	—35,4	98,0	160,4	62,8	194,2

Stäbe von verschiedenem Querschnitt.

I	I	V 9)	V	V	I 10)
20	6,6	25,5	20	— 6,0	13,0
40	13,3	52,2	40	—12,0	26,1
80	26,6	104,2	80	—24,6	52,4
120	39,6	156,4	160	—48,8	106,0
IV	IV	V 11)	V	V	IV 12)
20	9,0	27,8	20	— 8,2	10,5
40	18,4	55,7	40	—15,9	21,2
80	37,6	110,1	80	—30,8	41,8
120	57,7	163,6	160	—60,2	83,5

Um die in diesen Tafeln enthaltenen Zahlenwerthe mit der Theorie vergleichbar zu machen, sind sie noch von Fehlern zu befreien. Der Luftwiderstand ist bei so kleinen Amplituden zwar fast unmerklich; es beträgt nämlich die Abnahme der Amplituden pro Doppelschwingung bei 160 mm Ausschlag:

für die Stäbe	I und II	0,6 mm
für „ „	III	0,7 mm
für „ „	IV	0,5 mm
und für „ „	V	1,1 mm,

es fällt also der Einfluss während einer einfachen Schwingung beinahe in die Grenze der Beobachtungsfehler¹⁾ — aber eine andere Wirkung der umgebenden Luft ist merklicher.

1) Eine Correction ist deshalb nur näherungsweise angebracht.

Während der Einleitung des Stosses entsteht zwischen den Stäben eine Verdichtung der Luft, während ihrer Trennung eine Verdünnung. Beide Umstände wirken in entgegengesetzter Weise auf das System ein, aber wahrscheinlich nicht mit gleicher Stärke. Ich glaube annehmen zu müssen, dass die Verdünnung eine energischere ist, als die vorhergehende Verdichtung, und sehe die in den beiden ersten Tafeln ausgesprochene Erscheinung, dass bei zwei gleichen Stäben entgegen der Erwartung der stossende nicht nach dem Stoss in Ruhe verharret, sondern dem gestossenen noch ein wenig folgt, als eine Wirkung dieser Ursache an. Demgemäss corrigire ich zunächst die Beobachtungen der ersten beiden Tafeln dadurch, dass ich die kleine im stossenden Stab übrige Geschwindigkeit dem gestossenen noch zulege, und danach die der übrigen (indem ich berücksichtige, dass die besprochene Ursache nur von der relativen Geschwindigkeit der beiden Stäbe abhängen kann und indirect proportional ihren Massen auf sie wirken muss) dadurch, dass ich bei jeder Beobachtung den aus der ersten oder zweiten Tafel für die relative Geschwindigkeit der betreffenden beiden Stäbe passenden Werth entnehme und denselben, mit dem umgekehrten Verhältniss der Massen multiplicirt, von der Endgeschwindigkeit des stossenden Stabes abziehe, zu der des gestossenen zufüge. Z. B. ist in der dritten Beobachtung der fünften Tafel die relative Geschwindigkeit nahe dieselbe wie in der dritten, der ersten und zweiten Tafel. Ich bilde daher den corrigirten Werth:

$$v_1 = -9,1 - 1,2 = -10,3, \quad \text{aber:}$$

$$v_2 = 66,3 + 1,2 \cdot \frac{m_I}{m_{IV}}, \quad \text{d. i., da } \frac{m_I}{m_{IV}} = \frac{1}{4} \text{ ist,} \quad v_2 = 67,2.$$

Zu letzterem Werth würde wegen des Luftwiderstandes noch beinahe 0,2 hinzukommen.

Das Gleiche habe ich bei den Beobachtungen der neunten bis zwölften Tafel gethan in der Annahme, dass wegen der schwachen Abrundung der Enden der Stäbe ihr Querschnitt auf die genannte Erscheinung nur geringen Einfluss üben möchte; indess scheint es (vergl. p. 62), dass die so gebildete Correction etwas zu gross ausfällt.

Stellt man nach diesen Reductionen die beobachteten Werthe mit den nach der Neumann-Saint Venant'schen Formel berechneten zusammen, so erhält man folgende Uebersicht.

Tabelle II.

Stäbe von gleichem Querschnitt.

beobachtet		berechnet		beobachtet		berechnet	
V_1	V_2	V_1	V_2	V_2	V_1	V_2	V_1
$\frac{m_1}{m_2} = 1$ 1)				$\frac{m_2}{m_1} = 1$ 2)			
0	20,0	0	20,0	0	19,8	0	20,0
0	39,7	0	40,0	0	39,8	0	40,0
0	80,1	0	80,0	0	80,1	0	80,0
0	119,7	0	120,0	0	120,1	0	120,0
0	159,5	0	160,0	0	160,0	0	160,0
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$ 3)				$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}$ 4)			
3,9	23,5	6,7	20,0	— 3,6	16,2	0	13,3
7,9	47,0	13,3	40,0	— 7,6	31,7	0	26,7
16,8	93,5	26,7	80,0	—13,9	62,9	0	53,3
35,3	187,4	53,3	160,4	—25,5	124,0	0	106,7
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$ 5)				$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$ 6)			
— 2,8	16,7	0	15	2,8	22,6	5	20
— 5,4	33,7	0	30	6,2	45,2	10	40
—10,3	67,4	0	60	12,2	90,5	20	80
—15,1	100,6	0	90	18,8	135,1	30	120
—19,5	134,1	0	120				
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$ 7)				$\frac{m_2}{m_1} = 2$ 8)			
— 6,4	13,2	0	10	6,7	26,4	10	20
—12,2	26,2	0	20	13,6	52,6	20	40
—21,6	51,4	0	40,2	28,7	101,5	40,1	80,2
—38,7	99,0	0	80,4	61,0	197,7	80,2	160,4

Stäbe von verschiedenem Querschnitt.

$\frac{m_1}{m_2} = 1,96$ 9)				$\frac{m_2}{m_1} = 0,51$ 10)			
6,3	26,1	6,5	26,5	— 6,6	13,3	— 6,5	13,5
12,8	53,2	13,0	53,0	—13,8	26,6	—13,0	27,0
25,4	106,7	26,0	106,0	—27,0	53,8	—26,0	54,0
38,0	160,1	39,1	159,1	—51,8	108,0	—52,1	108,0
$\frac{m_1}{m_2} = 0,38$ 11)				$\frac{m_2}{m_1} = 2,63$ 12)			
8,8	28,4	9,9	13,5	— 8,8	10,7	— 6,5	10,1
18,0	56,7	19,8	26,9	—16,9	21,6	—13,1	20,2
36,8	112,6	40,7	53,8	—33,3	42,7	—26,2	40,3
56,1	167,0	60,5	80,7	—63,6	85,3	—52,3	80,6

Die vorstehende Zusammenstellung zeigt ausser in den Tafeln 1, 2, 9 und 10, von denen später gesprochen werden wird, durchweg ausserordentliche Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung. Besonders auffällig ist, dass, während bei Stäben gleichen Querschnitts die Theorie, wenn der kürzere stösst, nach dem Stosse für denselben Ruhe verlangt, die Beobachtung consequent ein lebhaftes Zurückspringen ergibt (vgl. Tafel 4, 5 und 7); ferner, dass sich ganz allgemein die nach dem Stoss übrige lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung sehr erheblich grösser findet, als sie die Theorie ergibt, und beide Umstände sprechen dagegen, dass Fehlerquellen die Ursachen der Abweichungen sind. — Bestätigt erscheint vollständig das allgemeine Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Aber mit den Neumann-Saint Venant'schen Stossformeln sind diese Beobachtungen unvereinbar.

Hier ist nun der Ort, der Beobachtungen, die Hr. Boltzmann¹⁾ veranlasst und publicirt hat, zu gedenken. Sie betreffen nur den speciellen Fall zweier Stäbe von nahe gleicher Masse und gleichem oder verschiedenem Querschnitt, aber ich trage Bedenken, ihnen entscheidende Bedeutung beizulegen. Einmal sind nämlich die Querdimensionen so gross gegen die Längsdimensionen (bei den dickeren ist das Verhältniss 17:100), dass man kaum die Theorie, welche die Querdimensionen verschwindend klein voraussetzt, auf sie anwenden kann, und zweitens sind die mitgetheilten Beobachtungen noch nicht von dem Einfluss der oben erörterten Fehlerquellen befreit, der bei den sehr leichten Stäben (aus grauem Kautschuk gefertigt) ausserordentlich gross gewesen sein muss; wenigstens ergab die Beobachtung mit gleichen Stäben den Ausschlag des gestossenen Stabes, resp. = 83,5, 42 und 26 mm, wo nach der Theorie (die in diesem Falle sich bei meinen Versuchen vollständig bewährt hat, ja wie man weiter sehen wird, sich bewähren musste) resp. 100, 50 und 30 mm zu erwarten gewesen wäre.

Trotz alledem geben die Boltzmann'schen Beobach-

1) L. Boltzmann, l. c. p. 1227.

tungen durch ihre Abweichungen von den theoretischen Zahlenwerthen Grund zu schwerem Zweifel gegen die Richtigkeit der Theorie, eventuell ihre Anwendbarkeit auf die unter den gewöhnlichen Umständen angestellten Beobachtungen.

II. Den Grund für die Abweichung der Resultate der Beobachtung und der Neumann-Saint Venant'schen Formeln sehe ich in den letzteren zu Grunde liegenden Bedingungen an der Berührungsstelle beider Stäbe. Diese scheinen mir nicht nur im allgemeinen mit der Wirklichkeit, sondern auch unter sich im Widerspruch zu stehen. Sind die beiderseitigen Grenzelemente während der Berührung in solcher Lage und solchem Zustande, dass sie aufeinander wirken wie Nachbarelemente im Inneren eines einzigen Stabes, so können sie nicht durch eine beliebig kleine Dilatation getrennt werden (da dies von jenen keineswegs gilt), und zeigt umgekehrt die Beobachtung kein merkliches Auseinanderhaften, so können die beiderseitigen Grenzelemente nicht aufeinander wirken wie Theile eines ungetrennten Ganzen. Denn nach den Vorstellungen der Elasticitätstheorie ist mit gleicher relativer Lage zweier Körpermassen die gleiche Wirkung untrennbar verbunden, und es würde aus der zuerst von Poisson ausgesprochenen Annahme, dass von dem Moment der Berührung an die Stäbe als Theile eines einzigen elastischen Körpers angesehen werden können, folgen, dass sie sich niemals trennen, es sei denn, dass die durch den Stoss als Reaction erregte Dilatation gross genug wäre, die Cohäsion des einen Stabes zu überwinden, in welchem Falle das System aber nicht gerade an der ursprünglichen Grenzstelle, sondern z. B. bei gleicher Substanz und Dicke beider Stäbe an der Stelle zerreißen würde, wo die Dilatation zuerst auftritt.

Auf Grund dieser Betrachtungen habe ich mir über den Vorgang in der Grenze der stossenden Körper folgende Vorstellung gebildet.

Tritt die Erscheinung, die wir als Stoss bezeichnen, auf, so folgt daraus, dass die Stäbe während der „Berührung“ nicht in so inniger Verbindung sind, dass sie als ein Ganzes

anzusehen wären. Verschiedene Umstände werden dem entgegenwirken. Zunächst die meist vorhandene Krümmung der stossenden Endflächen¹⁾, ferner geringe Unebenheiten, die auch bei der vollkommensten Politur nicht fehlen, ebenso die auf der Oberfläche condensirten Gasschichten²⁾, endlich vielleicht der Zustand der Oberflächenschichten der Körper selbst, der aller Wahrscheinlichkeit nach von dem der inneren Theile abweicht. In allen diesen Fällen hat ein Element, welches durch zwei, der Berührungsstellen beiderseitig sehr nahe liegende Querschnitte begrenzt wird und welches ich kurz die „Zwischenschicht“ nennen will, wesentlich andere Eigenschaften als ein gleich starkes im Inneren eines der Stäbe. Werden die zwei Stäbe mit unendlich kleiner Kraft zusammengedrückt, so hat die Zwischenschicht eine gewisse Dicke, welche die natürliche heissen mag. Eine Vergrösserung des Druckes verringert die Dicke, aber nach der Natur der Zwischenschicht ist die Compression jedenfalls nicht proportional dem Druck, sondern wächst bei gleichmässiger Zunahme desselben anfangs sehr schnell, allmählich langsamer. Einem Zug setzt die Zwischenschicht gar keinen Widerstand entgegen.

Hieraus folgt, dass die Bedingungen in der Grenze zwischen den Stäben sein werden, falls $(Z_2)_1$ und $(Z_2)_2$ die Druckkräfte im ersten und zweiten Stab und w_1, w_2 die Verschiebungen in der Längsrichtung (welche in die z -Axe fallen mag) bezeichnen:

1) Auf den Einfluss der nie ganz fehlenden Krümmung der stossenden Flächen macht auch Hr. Boltzmann (l. c. p. 1225) aufmerksam und fügt hinzu: „dass daher bei gleich langen ebensowenig als bei ungleich langen Stäben die reflectirten Wellen sich wieder am Ausgangspunkte concentriren. Hiernach würde also der bedeutende Verlust von lebendiger Kraft beim Stosse nicht blos der elastischen Nachwirkung zuzuschreiben sein u. s. w.“ Aber dies letztere scheint mir angesichts des Resultates, dass die bei Stäben mit gekrümmten Endflächen erhaltenen Verluste an lebendiger Kraft durchweg viel geringer als nach der Neumann-Saint-Venant'schen Theorie, ja bei gleichen Stäben völlig verschwindend sind, nicht aufrecht zu erhalten. Hr. Prof. Boltzmann hat bei einer zweiten Veröffentlichung seiner Beobachtungen diesen Einwand gänzlich ignorirt. (Vgl. Wied. Ann. 17. p. 343. 1882.)

2) Vgl. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 39. 1883.

$$(\bar{Z}_x)_1 = (\bar{Z}_x)_2 \quad \text{und} \quad \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = F(\bar{Z}_x).$$

Hierin bezeichnet $F(\bar{Z}_x)$ die Grösse der Compression der Zwischenschicht, ist also eine Function, die für kleine Z_x sehr schnell, für grössere langsamer zunimmt.

Diese Bedingungen würden gelten, so lange an der Berührungsstelle eine Druckkraft wirkt; verwandelt sich diese in eine Zugkraft, so sind die Stäbe ohne Wirkung aufeinander und gilt also beiderseitig $(Z_x)_1 = 0$ und $(Z_x)_2 = 0$.

Mit einer unbekannten Function F lässt sich selbstverständlich das Problem nicht der Rechnung unterwerfen, und auch für die meisten einfachen und plausiblen speciellen Annahmen reichen die Mittel der Analysis nicht aus. Ich will daher folgendes angenäherte Verfahren benutzen. Bei einem bestimmten Stoss wird die Zwischenschicht um eine bestimmte Grösse zusammengepresst; das Verhältniss der Compression δl zur ganzen Dicke der Zwischenschicht l und der diese Compression pro Flächeneinheit erzeugenden Druckkraft p , nämlich $\delta l/p l$ kann als der reciproke mittlere Elasticitätscoefficient e der Zwischenschicht bei diesem Stosse bezeichnet werden. Ich werde so rechnen, als wenn die Zwischenschicht in allen Perioden des Stosses denselben Elasticitätscoefficienten e besässe. Dann ist aber zu bemerken, dass dieser Elasticitätscoefficient keine durch die Natur der Stäbe allein gegebene Constante, sondern noch von der Stärke des Stosses abhängig ist, und zwar mit dieser wächst und abnimmt.

Lege ich, wie gesagt, die Z -Axe in die Mittellinie der stossenden Stäbe von ihrer Berührungsstelle aus, bezeichne mit $w_1, w_2, E_1, E_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, m_1, m_2, q_1, q_2, l_1, l_2$ für den ersten und zweiten Stab Verrückungen, Elasticitätscoefficienten, Dichtigkeiten, Massen, Querschnitte und Längen, setze endlich abgekürzt:

$$\frac{E_1}{\varepsilon_1} = a_1^2, \quad \frac{E_2}{\varepsilon_2} = a_2^2, \quad E_1 q_1 = b_1, \quad E_2 q_2 = b_2,$$

und $eq/l = c$, worin l, q, e für die Zwischenschicht Dicke, Querschnitt und mittleren Elasticitätscoefficienten bezeichnen, so ist das Problem in folgenden Gleichungen ausgesprochen.

Es muss sein:

- $$\begin{aligned}
 & \text{für } -l_1 < z < 0, \quad \text{für } 0 < z < l_2, \\
 (1) \quad & \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}, \\
 (2) \quad & \text{für } z = -l_1, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \text{für } z = l_2, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \\
 & \text{für } z = 0^1). \\
 (3) \quad & b_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} = b_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} = c(w_2 - w_1), \\
 & \text{endlich für } t = 0 \\
 (4) \quad & w_1 = 0, \quad w_2 = 0.^2) \\
 (5) \quad & \frac{\partial w_1}{\partial t} = V_1^0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} = V_2^0.
 \end{aligned}$$

Das Problem zu lösen, setze ich:

$$w_1 = \sum A_1 \sin a_1 t p_1 \cos p_1 (l_1 + z) + B_1 t,$$

$$w_2 = \sum A_2 \sin a_2 t p_2 \cos p_2 (l_2 - z) + B_2 t,$$

wodurch sogleich die Bedingungen (1), (2) und (4) erfüllt sind.

Aus (3) folgt $a_1 p_1 = a_2 p_2$:

$$b_1 p_1 A_1 \sin p_1 l_1 + b_2 p_2 A_2 \sin p_2 l_2 = 0 \text{ und:}$$

$$c \left(\frac{1}{b_1 p_1} \operatorname{ctg} p_1 l_1 + \frac{1}{b_2 p_2} \operatorname{ctg} p_2 l_2 \right) = 1,$$

$$\text{endlich } B_1 = B_2 = B.$$

Setze ich $a_1 p_1 = a_2 p_2 = \nu$:

$$b_1 p_2 A_1 \sin p_1 l_1 = -b_2 p_2 A_2 \sin p_2 l_2 = A,$$

so kommt:

$$w_1 = \sum \frac{a_1 A_h \sin \nu_h t \cos \frac{\nu_h}{a_1} (l_1 + z)}{b_1 \nu_h \sin \frac{\nu_h l_1}{a_1}},$$

$$w_2 = - \sum \frac{a_2 A_h \sin \nu_h t \cos \frac{\nu_h}{a_2} (l_2 - z)}{b_2 \nu_h \sin \frac{\nu_h l_2}{a_2}},$$

1) Neben den Dimensionen der Stäbe ist die Dicke der Zwischenschicht zu vernachlässigen.

2) Die Annahme einer anfänglichen Dilatation hat wohl kaum Interesse.

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und } \frac{\partial w_1}{\partial t} = v_1 = \sum a_1 A_h \frac{\cos \nu_h t \cos \frac{\nu_h}{a_1} (l_1 + z)}{b_1 \sin \frac{\nu_h l_1}{a_1}} + B, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = v_2 = - \sum a_2 A_h \frac{\cos \nu_h t \cdot \cos \frac{\nu_h}{a_2} (l_2 + z)}{b_2 \sin \frac{\nu_h l_2}{a_2}} + B. \end{array} \right.$$

Dabei sind die ν_h die Wurzeln der transcendenten Gleichung (6):

$$(7) \quad \frac{a_1}{b_1} \operatorname{ctg} \frac{\nu l_1}{a_1} + \frac{a_2}{b_2} \operatorname{ctg} \frac{\nu l_2}{a_2} = \frac{\nu}{c}.$$

Um die Constanten A der einzigen noch übrigen Bedingung (5) gemäss zu bestimmen, hat man folgendermassen zu verfahren.

Man setze kurz:

$$v_1 = \sum_h A_h \cdot \tau_h \cdot \zeta'_h + B, \quad v_2 = \sum_h A_h \cdot \tau_h \cdot \zeta_h + B,$$

worin:

$$\tau_h = \cos \nu_h t, \quad \zeta'_h = \frac{a_1 \cos \frac{\nu_h}{a_1} (l_1 + z)}{b_1 \sin \frac{\nu_h l_1}{a_1}}, \quad \zeta''_h = - \frac{a_2 \cos \frac{\nu_h}{a_2} (l_2 - z)}{b_2 \sin \frac{\nu_h l_2}{a_2}} \text{ ist.}$$

$$\text{Dann ist: } A_h = \frac{\frac{b_1}{a_1^2} \int_{-l_1}^0 (V_1^0 - B) \zeta'_h dz + \frac{b_2}{a_2^2} \int_0^{l_2} (V_2^0 - B) \zeta''_h dz}{\frac{b_1}{a_1^2} \int_{-l_1}^0 \zeta_h^{\prime 2} dz + \frac{b_2}{a_2^2} \int_0^{l_2} \zeta_h^{\prime\prime 2} dz}.$$

Denn es lässt sich zeigen, dass:

$$\frac{b_1}{a_1^2} \int_{-l_1}^0 \zeta_h \zeta'_k dz + \frac{b_2}{a_2^2} \int_0^{l_2} \zeta_h \zeta''_k dz = 0 \text{ ist für } h \neq k.$$

Dies folgt aus den Eigenschaften von ζ , dass nämlich überall:

$$(1') \quad -\nu_h^2 \zeta_h = a_1^2 \frac{\partial^2 \zeta_h}{\partial z^2}, \quad -\nu_h^2 \zeta''_h = a_2^2 \frac{\partial^2 \zeta''_h}{\partial z^2},$$

$$\text{für: } (2') \quad z = -l_1, \quad \frac{\partial \zeta_h}{\partial z} = 0, \quad \text{für } z = +l_2, \quad \frac{\partial \zeta''_h}{\partial z} = 0,$$

und für:

$$z = 0,$$

$$(3') \quad b_1 \frac{\partial \zeta'_h}{\partial z} = b_2 \frac{\partial \zeta'_h}{\partial z} = c(\zeta'' - \zeta'_h) \text{ ist.}$$

Bildet man nämlich aus (1'):

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_h^2 - \nu_k^2}{a_1^2} b_1 \int_{-l_1}^0 \zeta'_h \zeta'_k dz &= b_1 \int_{-l_1}^0 \left(\zeta'_k \frac{\partial^2 \zeta'_h}{\partial z^2} - \zeta'_h \frac{\partial^2 \zeta'_k}{\partial z^2} \right) dz, \\ -\frac{\nu_h^2 - \nu_k^2}{a_2^2} b_2 \int_0^{l_2} \zeta''_h \zeta''_k dz &= b_2 \int_0^{l_2} \left(\zeta''_k \frac{\partial^2 \zeta''_h}{\partial z^2} - \zeta''_h \frac{\partial^2 \zeta''_k}{\partial z^2} \right) dz, \end{aligned}$$

führt die rechte Seite durch theilweise Integration und Benutzung von (2') aus und addirt beide Formeln, so kommt nach (3') rechts Null; also ist:

$$(\nu_k^2 - \nu_h^2) \left[\frac{b_1}{a_1^2} \int_{-l_1}^0 \zeta'_h \zeta'_k dz + \frac{b_2}{a_2^2} \int_0^{l_2} \zeta''_h \zeta''_k dz \right] = 0,$$

und demnach für $k \geq h$ der zweite Factor = Null, q. e. d.

Ausgerechnet ergibt sich demgemäss:

$$(8) \quad A_h = \frac{4(V_1^0 - V_2^0)}{a_1 \left(\frac{2l_1 \nu_h}{a_1} + \sin \frac{2l_1 \nu_h}{a_1} \right) + a_2 \left(\frac{2l_2 \nu_h}{a_2} + \sin \frac{2l_2 \nu_h}{a_2} \right)} \left(\frac{b_1 \sin^2 \frac{l_1 \nu_h}{a_1}}{b_1 \sin^2 \frac{l_1 \nu_h}{a_1}} + \frac{b_2 \sin^2 \frac{l_2 \nu_h}{a_2}}{b_2 \sin^2 \frac{l_2 \nu_h}{a_2}} \right)$$

Die einzig noch übrige Constante B zu bestimmen, bilde man den Werth der Schwerpunktsgeschwindigkeit für das ganze System. Dann findet sich:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = B(m_1 + m_2) + \sum_h A_h \cos \nu_h t \left(q_1 \varepsilon_1 \int_{-l_1}^0 \zeta'_h dz + q_2 \varepsilon_2 \int_0^{l_2} \zeta''_h dz \right).$$

Aber diese Summe findet sich nach den Formeln (1'), (2') und (3') gleich Null, also:

$$(9) \quad B = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V_1^0 + m_2 V_2^0}{m_1 + m_2}.$$

Die Formeln (6)–(9) enthalten die Lösung des gestellten Problems.

Den Inhalt des Resultates zu überblicken, müsste eigentlich die in den Gleichungen (3) und (7) vorkommende Constante c , die dem Elasticitätscoefficienten der Zwischenschicht

proportional ist, bekannt sein. Da dies aber nicht der Fall ist, muss man sich mit einigen speciellen Folgerungen begnügen.

Ist $c = \infty$, so wirkt die Zwischenschicht ebenso, als wäre sie gar nicht vorhanden, sondern als träfen die Stäbe unmittelbar aufeinander; denn es wird hier für $z = 0$, $b_1 \partial w_1 / \partial z = b_2 \partial w_2 / \partial z$ und $w_1 = w_2$. Man erhält auf diese Weise die Neumann-Saint Venant'schen Formeln.¹⁾

Aber mit dieser Annahme sind die Resultate der Messung im Widerspruch, c muss also endlich sein, und die oben entwickelte Vorstellung lässt vermuthen, dass es bei kleinen Stossgeschwindigkeiten sehr klein werden kann.

In diesem Falle lässt sich die Lage der Wurzeln der transcendenten Gleichung (7) leicht beurtheilen. Construiert man nämlich die Curven:

$$y = \frac{a_1}{b_1} \operatorname{ctg} x \frac{l_1}{a_1} + \frac{a_2}{b_2} \operatorname{ctg} x \frac{l_2}{a_2} \quad \text{und} \quad y = \frac{x}{c},$$

so sind die x Coordinaten ihrer Schnittpunkte die gesuchten Wurzeln ν_h .

Man erkennt, dass eine erste Wurzel ν_0 unweit Null liegen muss, — um so näher, je kleiner c ist, — ausserdem zwei Systeme bei $a_1(h\pi + \delta'_h)/l_1$ und $a_2(h\pi + \delta''_h)/l_2$, wo $h = 1, 2, 3 \dots$ sein kann, und zwar sind die Werthe δ'_h und δ''_h bereits sehr klein, wenn ν_0 noch ziemlich beträchtlich ist.

Mit abnehmendem c werden die höheren Glieder der Reihen (6) sehr schnell den Einfluss verlieren, da sie proportional mit $\sin \delta'_h$ und $\sin \delta''_h$ sind, zugleich wird das erste Glied wegen der Kleinheit von ν_0 sich einem Grenzwert nähern.

Vernachlässigt man Glieder von der Ordnung δ'_h und δ''_h , sowie $(\nu_0 l_1 / a_1)^2$ und $(\nu_0 l_2 / a_2)^2$ neben 1, so erhält man nach leichten Reductionen:

1) Vgl. Saint-Venant, l. c. p. 288. Es mag noch einmal erwähnt werden, dass unter besonderen Umständen (Beobachtung im Vacuo, vollständiger Politur und ebener Gestalt der Endflächen) diese Formeln vielleicht angenähert, aber nie streng gültig werden können, da die ihnen zu Grunde liegenden Voraussetzungen im allgemeinen eine Trennung der Stäbe nach dem Stosse gar nicht zulassen.

$$v_1 = \frac{m_1 V_1^0 + m_2 V_2^0}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 (V_1^0 - V_2^0)}{m_1 + m_2} \cos \nu_0 t$$

$$v_2 = \frac{m_1 V_1^0 + m_2 V_2^0}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (V_1^0 - V_2^0)}{m_1 + m_2} \cos \nu_0 t$$

und für die Berührungsstelle zugleich:

$$\frac{\delta \bar{w}}{\delta z} = -A_0 \sin \nu_0 t.$$

Dabei ist in erster Näherung für sehr kleines c :

$$\nu_0 = \sqrt{c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}.$$

Die vorletzte Formel zeigt, dass während $0 < t < \pi/\nu_0$ bleibt, in der Berührungsstelle eine Compression vorhanden ist, für $t = \pi/\nu_0$ aber eine Dilatation sich zu bilden beginnt. Zu diesem Zeitpunkt müssen also nach den oben entwickelten Ansichten die Stäbe ausser Wechselwirkung treten, und $T = \pi/\nu_0$ ist als die „Dauer des Stosses“ anzusehen.

Die Stäbe bewegen sich in diesem extremen Falle fortwährend als Ganzes, d. h. ohne innere Dilatationen; ihre Schwerpunkts-*geschwindigkeit* wird also für den Moment der Trennung einfach durch Einsetzen des Werthes $t = \pi/\nu_0$ in die letzten Formeln erhalten, und es ergibt sich:

$$(10) \quad V_1 = \frac{2m_2 V_2^0 + (m_1 - m_2) V_1^0}{m_1 + m_2}, \quad V_2 = \frac{2m_1 V_1^0 + (m_2 - m_1) V_2^0}{m_1 + m_2}.$$

In diesem extremen Falle, wo sich die Stäbe nur als Massen, deren Elasticität nicht in Betracht kommt, bewegen und die elastische Wirkung nur von der Zwischenschicht ausgeht, erscheinen also die alten Stoss-*gleichungen*, die man durch alleinige Benutzung des Principes der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Schwerpunkts-*geschwindigkeit* ableiten kann, — und dies ist begreiflich, da mit dem Verschwinden der inneren Oscillationen der Stäbe der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft wieder in Geltung tritt.¹⁾

Innerhalb der beiden Extreme, dass die Zwischenschicht gar nicht wirkt ($c = \infty$), und dass sie allein das Stoss-

1) Nach dem oben Entwickelten würden unter den Umständen, welche die vorgenommenen Vernachlässigungen gestatten, elastische und absolut starre Körper sich ganz gleich verhalten — nicht aber ebenso unelastische, weiche Körper, wie es vielleicht scheinen könnte.

phänomen hervorbringt ($c = 0$) liegen alle denkbaren Fälle. Welchen Werth c bei jedem einzelnen Experiment hat, kann nur die Beobachtung selbst entscheiden, — aber die oben auseinandergesetzte Hypothese macht wahrscheinlich, dass bei den kleinsten Stossgeschwindigkeiten c den kleinsten Werth besitzt und mit jenen zunimmt. Dementsprechend müssten die Beobachtungen bei den kleinsten Stossgeschwindigkeiten am genauesten durch die Formeln (10) dargestellt werden und die bei grösseren angestellten Messungen nach den Neumann-Saint Venant'schen Formeln hinneigen. In wie weit dies stattfindet, zeigt die Zusammenstellung der beobachteten Werthe mit den aus Formel (10) berechneten auf Tab. III und ihre Vergleichung mit Tab. II.

Tabelle III.

Stäbe mit gleichem Querschnitt.

beobachtet		berechnet		beobachtet		berechnet	
V_1	V_2	V_1	V_2	V_2	V_1	V_2	V_1
$\frac{m_1}{m_2} = 1$ 1)				$\frac{m_2}{m_1} = 1$ 2)			
0	20,0	0	20,0	0	19,8	0	20,0
0	39,7	0	40,0	0	39,8	0	40,0
0	80,1	0	80,0	0	80,1	0	80,0
0	119,7	0	120,0	0	120,1	0	120,0
0	159,5	0	160,0	0	160,0	0	160,0
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$ 3)				$\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{2}$ 4)			
+ 3,9	23,5	+ 4	24	— 3,6	16,2	— 4	16
+ 7,9	47,0	+ 8	48	— 7,6	31,7	— 8	32
+ 16,8	93,5	+ 16	96	— 13,9	62,9	— 16	64
+ 35,3	187,4	+ 32,1	192,5	— 25,5	124,0	— 32	128
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}$ 5)				$\frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{3}$ 6)			
— 2,8	16,7	— 2,9	17,1	+ 2,8	22,6	+ 2,9	22,9
— 5,4	33,7	— 5,7	34,3	+ 6,2	45,2	+ 5,7	45,7
— 10,4	67,4	— 11,4	68,6	+ 12,2	90,5	+ 11,4	91,4
— 15,1	100,6	— 17,1	102,9	+ 18,8	134,9	+ 17,1	137,1
— 19,5	134,1	— 22,9	137,1				
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$ 7)				$\frac{m_2}{m_1} = 2$ 8)			
— 6,4	13,2	— 6,7	13,3	+ 6,7	26,4	+ 6,7	26,7
— 12,2	26,2	— 13,3	26,7	+ 13,6	52,6	+ 13,3	53,3
— 21,6	51,4	— 26,7	53,3	+ 28,7	101,5	+ 26,7	106,7
— 38,9	99,0	— 53,3	106,7	+ 61,1	197,9	+ 53,3	213,3

Stäbe mit verschiedenem Querschnitt.

beobachtet		berechnet		beobachtet		berechnet	
V_1	V_2	V_1	V_2	V_2	V_1	V_2	V_1
$\frac{m_1}{m_2} = 1,96$ 9)				$\frac{m_2}{m_1} = 0,51$ 10)			
+ 6,3	26,1	+ 6,5	26,5	- 6,6	13,3	- 6,5	13,5
+12,8	53,2	+13,0	53,0	-13,8	26,6	-13,0	27,0
+25,4	106,7	+26,0	106,0	-27,0	53,8	-26,0	54,0
+38,0	160,1	+39,1	159,1	-51,8	108,5	-52,1	108,0
$\frac{m_1}{m_2} = 0,38$ 11)				$\frac{m_2}{m_1} = 2,63$ 12)			
+ 8,8	28,4	+ 9,0	29,0	- 8,8	10,7	- 9,0	11,1
+18,0	56,7	+17,9	57,9	-16,9	21,6	-17,9	22,0
+36,8	112,6	+35,9	115,8	-33,3	42,7	-35,9	44,0
+56,1	167,0	+52,8	173,7	-63,6	85,3	-71,8	88,1

Die Zahlen dieser Tabelle ergeben, dass bei den kleinsten benutzten Stossgeschwindigkeiten von circa 40 mm pro Secunde (entsprechend 20 mm Ausschlag) die Annahme, dass c verschwindend klein ist, und demgemäss die Stäbe nur als bewegte Massen wirken, sehr nahe erfüllt ist; denn hier stimmen die beobachteten Werthe mit den nach Formel (10) berechneten soweit, als nach der Schwierigkeit der Beobachtungen zu erwarten ist. Dass die Abweichungen meist in dem Sinne stattfinden, dass der beobachtete Werth kleiner erscheint als der berechnete, ist nur natürlich, da alle Fehlerquellen in diesem Sinne wirken.

Bei grösseren Stossgeschwindigkeiten treten beträchtlichere Abweichungen von der Formel (10) auf, aber stets in dem vorausbezeichneten Sinne nach der Neumann-Saint Venant'schen Formel hin. Letztere gibt nämlich für V_1 in Tafel (3), (6), (8), (11) Grösseres, in (4), (5), (7), (12) Kleineres als Formel (10), — dem entsprechend ist bei grösseren Stossgeschwindigkeiten das beobachtete V_1 in Tafel (3), (6), (8) und (11) auch grösser, in Tafel (4), (5), (7) und (12) kleiner als das berechnete; V_2 aber ist in allen Tafeln kleiner als nach Formel (10) berechnet, weil hierfür die Abweichungen beider Formeln auch stets im selben Sinne stattfinden. Die beobachteten Werthe der Tafeln (1) und (2) stimmen mit den berechneten für grosse und kleine

Stossgeschwindigkeiten fast gleich gut; in der That gibt für gleiche Stablängen jedes c dasselbe Gesetz für die Endgeschwindigkeiten.

Noch muss ich besonders auf die Beobachtungen (9) bis (12) hinweisen, die, wie gesagt, durch die Publication des Hrn. Boltzmann veranlasst worden sind. Die in jener Arbeit mitgetheilten Resultate widersprechen nur insofern meiner Theorie, als sie zu zeigen scheinen, dass auch bei kleinen Stossgeschwindigkeiten das Phänomen nicht nur von der Masse, sondern auch von der Gestalt der benutzten Stäbe abhängt. Hr. Boltzmann erhielt nämlich beim Stoss zweier nahezu identischer Stäbe (Länge 100 und 104 mm, Dicke 17 mm) bei einer Anfangselongation von 30 mm im Mittel 25,8 mm Ausschlag, beim Stoss zweier verschieden gestalteter (Längen 104 und 230 mm, Dicken 17 und 11 mm) und nahe gleich schwerer (Gewichte 23,8 und 23,9 g) im Mittel 24,2 mm. Auf Grund der oben angeführten Umstände vermag ich diesen Zahlen nicht entscheidende Bedeutung beizulegen, obgleich ich mir die nicht unbeträchtliche Grösse der Abweichung nicht zu erklären weiss.

Um aber den Zweifel, ob meine Formeln, auch auf den Fall ungleicher Querschnitte angewandt, die Beobachtungen darstellen, zu beseitigen, habe ich zum Schluss noch die Reihen (9) bis (12) beobachtet; die beobachteten Zahlen in (11) und (12), welche auf Tab. II vollständig den berechneten Werthen widersprechen, sind hier auf Tab. III mit der Theorie so weit in Einklang, als zu erwarten ist, wenn man berücksichtigt, dass bei dem dünneren Stab V die seitlichen Schwankungen fast noch auffallender waren, als bei den dickeren. Tafel (9) und (10) sind mit (1) und (2) analog, insofern nämlich auch bei verschiedenen Querschnitten für Stäbe gleicher Länge bei allen Annahmen über die Grösse c sich dieselben Werthe V_1 und V_2 ergeben. Demgemäss stimmen die beobachteten und berechneten Werthe auch bei grösseren Stossgeschwindigkeiten überein; dass dies nicht so vollkommen statt hat wie in den Tafeln (1) und (2), habe ich oben (p. 49) erklärt.

III. Im Folgenden theile ich noch einige Beobachtungen mit, die zur Ergänzung der vorstehenden nach und nach angestellt worden sind.

Nach Beendigung jener Versuche wurde mir die Arbeit des Hrn. Hertz¹⁾ „über die Berührung fester elastischer Körper“ bekannt, in welcher der Einfluss der Krümmung der zusammenstossenden Flächen auf die Erscheinung des Stosses in dem speciellen Falle unendlich kleiner Stossgeschwindigkeit theoretisch untersucht und dasselbe Gesetz abgeleitet ist, das ich für diesen Fall gegeben und geprüft habe. Dies veranlasste mich, einige Beobachtungen über den Stoss von Stäben mit möglichst ebenen Endflächen anzustellen.

Bei den früheren Versuchen waren die benutzten Stäbe an den Enden durch Flächen abgerundet, deren Krümmungsradien in der Axe nahe gleich der Länge des betreffenden Stabes waren; dies war nach der Art der Herstellung wahrscheinlich und ist durch mikrometrische Messung von Coordinaten angenähert bestätigt worden. Nach dem neuen Schleifen war die Krümmung so gering, dass die mikroskopische Messung keinen Werth der Krümmungsradien mehr zu bestimmen gestattete; sie mögen wohl mehrere Meter betragen haben.

In diesem neuen Zustande beobachtete ich zunächst den Stoss von I gegen II, um die auf p. 49 erwähnte Correction zu bestimmen, und fand folgendes System Werthe:

V_1^0	20	40	80	120
V_1	1,7	2,4	2,8	3,0
V_2	18,1	38,0	76,8	117,0

Die aus der zweiten Columnne sich ergebenden Correctionen sind nun bei den folgenden Beobachtungen angebracht worden. Es stiess Stab IV gegen III; ich stelle die corrigirten Resultate der neuen Beobachtungen zusammen mit den früher bei grösserer Krümmung der Endflächen erhaltenen, sowie mit den Resultaten meiner Formeln p. 57 unter den speciellen Annahmen, dass c sehr klein ($c = 0$) und c sehr gross sei ($c = \infty$). Die letztere Annahme führt, wie oben erwähnt, auf die Neumann-Saint Venant'schen Gesetze.

1) Hertz, Crelle's Journ. 92. p. 156. 1882.

$c = 0$		E n d f l ä c h e n				$c = \infty$	
		gekrümmt		fast eben			
V_1	V_2	V_1	V_2	V_1	V_2	V_1	V_2
6,7	26,7	6,7	26,4	7,0	24,5	10	20
13,3	53,3	13,6	52,6	15,2	47,6	20	40
26,7	106,7	28,7	101,5	32,2	92,1	40	80
42,1	162,1	45,0	148,0 ¹⁾	49,6	137,3	60	120

Die Beobachtung gibt, der Erwartung entsprechend, eine merkliche Abweichung der neuen Resultate von den alten in dem Sinne von kleineren zu grösseren Werthen von c , d. h. nach dem Neumann-Saint Venant'schen Gesetz hin. Doch ist ihr Betrag nicht so gross, dass man ohne weiteres daraus schliessen möchte, die Krümmung bewirke allein die Abweichung von jenem Gesetz.

Um dies noch auf andere Weise zu untersuchen, liess ich die zuvor blank polirten stossenden Flächen mit feinem Smirgelpapier mattiren. Nun ergaben sich folgende Werthe, die ich, wie die obigen, mit den theoretischen zusammenstelle:

$c = 0$		E n d f l ä c h e n				$c = \infty$	
		matt		blank			
V_1	V_2	V_1	V_2	V_1	V_2	V_1	V_2
6,7	26,7	6,6	25,2	7,0	24,5	10	20
13,3	53,3	14,1	49,3	15,2	47,6	20	40
26,7	106,7	31,0	96,3	32,2	92,1	40	80
42,1	162,1	47,0	142,0	49,6	137,3	60	120

Der oben entwickelten Vorstellung gemäss zeigt sich eine deutliche Abweichung der mit matten Endflächen erhaltenen Beobachtungen, wie sie einem kleineren Werthe von c entspricht.²⁾

Endlich habe ich, um den Beweis zu bringen, dass bei kleinen Stossgeschwindigkeiten (sowie die Formeln (10) sagen) die Substanz der stossenden Stäbe ohne Einfluss auf die Erscheinung ist, Hr. stud. Wiechert und Hecht veran-

1) Aus den Beobachtungen in Tabelle II interpolirt.

2) Eine vorher angestellte Reihe von Messungen, bei denen die erst blanken Stossflächen mit verdünnter Salpetersäure geätzt waren, ergab keinen merklichen Einfluss dieser Veränderung auf die Erscheinung des Stosses.

lasst, einige Beobachtungen über den Stoss eines Stahlstabes gegen einen Glasstab, und umgekehrt, anzustellen.

Als Stahlstab diente Nr. V der früher von mir benutzten. Der Glasstab war 47,5 cm lang, circa 8 mm dick und 55,47 g schwer. Seine Enden waren sorgfältig, und zwar nahezu eben geschliffen, aber matt gelassen. Danach war zu erwarten, dass die Formeln (10) hier noch für grössere Stossgeschwindigkeiten sich nahezu gültig zeigen würden, als bei den an den Enden polirten Stahlstäben. Eine Schwierigkeit bot die Bestimmung der oft erwähnten Correction wegen der Wirkung des Luftdrucks; es blieb nichts übrig, als die auf p. 49 bestimmte Reihe der Berechnung zum Grunde zu legen, da dieselbe sich bei den Beobachtungen des Stosses von V gegen I, wenngleich etwas zu gross, doch nahe gültig erwiesen hatte (vergl. p. 62). Die betreffenden Correctionen dürften indess auch hier, namentlich für den sehr leichten Glasstab, ein wenig zu gross sein; sie würden nämlich betragen:

	bei $V_1^0 =$	20	40	80	120
für den Stahlstab		0,6	1,2	2,4	3,6
„ „ Glasstab		1,2	2,4	4,8	7,2

Bringt man sie an den, unter sich meist bis auf 0,5 mm stimmenden Beobachtungen an, so erhält man folgendes Tableau:

V_1^0	beobachtet		berechnet		V_2^0	beobachtet		berechnet	
	V_1	V_2	V_1	V_2		V_2	V_1	V_2	V_1
20	6,7	26,4	7,0	27,0	20	— 7,2	13,0	— 7,0	13,0
40	13,4	53,8	14,0	54,0	40	— 14,4	26,2	— 14,0	26,0
80	27,0	107,9	28,0	108,0	80	— 28,6	52,4	— 28,0	52,0
120	40,4	161,6	42,0	162,0	120	— 42,3	78,5	— 42,0	78,0

Bei der ersten Reihe stiess der Stahl-, bei der zweiten der Glasstab. Die Uebereinstimmung ist selbst bis zu Amplituden von 120 mm eine sehr erhebliche.

Alle Beobachtungen sind also im Einklang mit den im zweiten Theil abgeleiteten Resultaten der Theorie.

Königsberg i. Pr., Januar 1883.