**12. Die physikalische Interpretation
von Ausdrücken aus der Theorie unendlich kleiner
Schwingungen; von J. Zenneck.**

§ 1.¹⁾

Die allgemeinste Schwingung eines Systems von n Freiheitsgraden lässt sich bekanntlich stets zerlegen in n Elementarschwingungen der Form:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= f_1(t) \\ \psi_2 &= f_2(t) \dots \text{etc.},\end{aligned}$$

worin $\psi_1, \psi_2 \dots$ voneinander unabhängige „Systemkoordinaten“ (Lagrange'sche Coordinaten) bedeuten und die $f(t)$ sich im allgemeinen als n fach periodische Functionen der Zeit ergeben.

Diese Zerlegung besitzt jedoch *im allgemeinen* keine physikalische Bedeutung. Denn einmal ist weder die kinetische (T) noch die potentielle Energie (V) der Gesamtschwingung gleich der Summe der entsprechenden Energien der Einzelschwingungen.²⁾ Es ist vielmehr

$$(1) \quad \begin{cases} 2T = a_{11} \psi_1'^2 + a_{22} \psi_2'^2 + \dots + 2a_{12} \psi_1' \psi_2' + 2a_{13} \psi_1' \psi_3' \dots \\ 2V = c_{11} \psi_1^2 + c_{22} \psi_2^2 + \dots + 2c_{12} \psi_1 \psi_2 + 2c_{13} \psi_1 \psi_3 \dots, \end{cases}$$

wo $\psi' = d\psi/dt$ und die a und c Constante des Systems sind; beide enthalten also ausserdem noch Glieder, die eine Art „wechselseitiger Energie“ jener Elementarschwingungen vorstellen. Und dann sind diese Elementarschwingungen für sich allein überhaupt keine möglichen Schwingungen des freien Systems. Schwingungen der Form

$$\psi_1 = f_1(t); \quad \psi_2 = \psi_3 = \dots = \psi_n = 0$$

1) Vgl. zum ganzen Paragraphen: Ch. Lagrange, *mécan. anal.* 2^{de} part. sect. VI; J. J. Thomson u. P. G. Tait, *Treatise on nat. phil.* new. edit. § 313. 1879; Lord Rayleigh, *Theory of sound* Vol. 1. cap. IV, dessen Voraussetzungen und Bezeichnungen im Folgenden gelten sollen.

2) Vgl. J. J. Thomson u. P. G. Tait l. c. § 338.

können, auch wenn sie zwangsweise erregt werden, nicht bestehen, sobald das System sich selbst überlassen wird.¹⁾

Bei *bestimmter* Wahl der Systemkoordinaten, wenn diese die Hauptkoordinaten („normal coordinates“) des Systems sind, ändern sich die Verhältnisse vollkommen. Die Functionen $f(t)$ werden einfach harmonische Functionen der Zeit und zwar für unendlich kleine Schwingungen von der Form $A \cdot \cos(n t - \varepsilon)$, und die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} \psi_i = A_i \cos(n_i t - \varepsilon_i) \\ \psi_1 = \psi_2 \dots = \psi_{i-1} = \psi_{i+1} \dots = \dots \psi_n = 0 \end{cases}$$

stellen stabile Schwingungsformen des freien Systems, die Partial-schwingungen, dar.

Entscheidend dafür, ob dieser Fall vorliegt oder nicht, sind die Grössen a_{ik} und c_{ik} ($i \geq k$): Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer einfachen Schwingung der Form (2) ist:

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots a_{i-1} = a_{i+1} = \dots = a_n = 0 \\ c_1 = c_2 = \dots c_{i-1} = c_{i+1} = \dots = c_n = 0. \end{cases}$$

§ 2.

Begnügt man sich nicht einfach mit der Thatsache, dass die Gleichungen (2) nur dann die Bewegungsgleichungen des Systems befriedigen, wenn die Bedingungen (3) erfüllt sind; sucht man sich vielmehr über die physikalischen Beziehungen, welche dem zu Grunde liegen, klar zu werden, so ist bei der entscheidenden analytischen Bedeutung der Grössen a_{ik} und c_{ik}

1) z. B.: Die allgemeinste Schwingung eines starren um einen festen Punkt beweglichen Systems lässt sich stets zerlegen in Schwingungen um drei beliebige, zu einander senkrechte Axen. Aber nur wenn diese Axen die Hauptträgheitsaxen sind, können diese Elementarschwingungen für sich bestehen.

Ebenso kann man die allgemeinste Schwingung einer nicht ganz homogenen, kreisförmigen Membran, Platte oder Glocke bis zu einem gewissen Grade in beliebiger Weise auffassen als die Summe von Schwingungen mit zwei, drei etc. Knotendurchmessern. Eine Schwingung mit etwa zwei Knotendurchmessern *allein* hervorzurufen, gelingt aber nur bei ganz bestimmter Lage der Knotendurchmesser. (Vgl. Lord Rayleigh, l. c. §§ 208, 209, 221; Phil. Mag. (5) 29. p. 2. 1890; J. Zenneck, Wied. Ann. 66. p. 170 f. 1898.)

($i \geq k$) von vornherein anzunehmen, dass die erste Aufgabe in dieser Richtung die *physikalische Interpretation der Grössen a_{ik} und c_{ik}* sein muss. Diese ist der Zweck des Folgenden.

§ 3.

Damit durch die Verwendung von Systemcoordinaten keine Weitläufigkeiten entstehen, mögen vor allem folgende Abmachungen getroffen werden.

a) Erfolgt eine Verrückung (oder auch Deformation) des Systems so, dass nur *eine* Systemcoordinate, etwa ψ_i , sich ändert und zwar um $d\psi_i$, so soll von einer „Verrückung des Systems in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i um $d\psi_i$ “ gesprochen werden. In demselben Sinne soll „Geschwindigkeit oder Schwingung¹⁾ des Systems in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i “ zu verstehen sein.

b) Wenn auf ein Systemteilchen Kräfte wirken mit den rechtwinkligen Componenten X, Y, Z , und $\delta x, \delta y, \delta z$ die Componenten des Weges sind, welchen das Teilchen zurücklegt, so lässt sich die vom ganzen System geleistete Arbeit $\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ auf die Form bringen:

$$\Psi_1 \cdot \delta \psi_1 + \Psi_2 \delta \psi_2 + \dots$$

Bedeutend ebenso PQR die rechtwinkligen Componenten eines auf ein Systemteilchen ausgeübten Impulses, so kann auch der Ausdruck $\sum(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)$ umgeformt werden in $\xi_1 \delta \psi_1 + \xi_2 \delta \psi_2 + \dots$. Es sollen deshalb die Grössen Ψ_1, Ψ_2 etc. bez. ξ_1, ξ_2 etc. „die Componenten der Kraft bez. des Impulses in der Richtung der Systemcoordinaten ψ_1, ψ_2 etc.“ heissen.²⁾

c) Irgend ein Teilchen des Systems möge bei einer Verrückung des Systems in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i um den unendlich kleinen Betrag $d\psi_i$ das Wegelement $ds_i = \sigma_i \cdot d\psi_i$ zurücklegen. In der Richtung dieses Weg-

1) Eine solche ist durch die Gleichung (2) dargestellt.

2) Vgl. J. J. Thomson u. P. G. Tait, l. c. § 313; Lord Rayleigh, l. c. cap. IV.

elementes wirke auf das Teilchen die Kraft- oder Impuls-
komponente K_s . Dann soll

$$K_s \cdot \sigma_i$$

„das Moment der Kraft oder des Impulses K_s bezüglich der
Systemcoordinate ψ_i “ genannt werden.

§ 4.

Ueber die erste Frage, die *physikalische Bedeutung der
Ausdrücke a_{ik} und c_{ik}* , orientirt man sich am besten, wenn
man von den eben definirten Grössen Ψ und ξ Gebrauch
macht. Es ist¹⁾

$$\xi_1 = \frac{\partial T}{\partial \psi_1'} = a_{11} \psi_1' + a_{12} \psi_2' + \dots$$

$$\xi_2 = \frac{\partial T}{\partial \psi_2'} = a_{21} \psi_1' + a_{22} \psi_2' + \dots \text{etc.}$$

und

$$\Psi_1 = \frac{\partial V}{\partial \psi_1} = c_{11} \psi_1 + c_{12} \psi_2 + \dots$$

$$\Psi_2 = \frac{\partial V}{\partial \psi_2} = c_{21} \psi_1 + c_{22} \psi_2 + \dots \text{etc.}$$

Ertheilt man dem System in der Gleichgewichtslage durch
einen Stoss eine Geschwindigkeit in der Richtung *einer* System-
coordinate etwa ψ_i , vom Betrage ψ_i' , so wird

$$\xi_1 = a_{1i} \psi_i'; \quad \xi_2 = a_{2i} \psi_i'; \quad \dots \quad \xi_k = a_{ki} \psi_i'.$$

Obwohl also das System eine Geschwindigkeit nur in der
Richtung *einer* Systemcoordinate ψ_i erhielt, verursacht doch
gerade diese Geschwindigkeit Impulse auch in der Richtung
der anderen Systemkoordinaten. Die Folge davon ist, dass
nicht nur in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i , sondern
auch in der Richtung der anderen Systemkoordinaten Schwin-
gungen zu stande kommen. Ist $\psi_i' = 1$, so wird $\xi_1 = a_{1i}$,
 $\xi_2 = a_{2i}$, ..., $\xi_k = a_{ki}$. Es bedeutet also $a_{ik} = a_{ki}$ den Impuls,
den das System in der Richtung der Systemcoordinate ψ_k (bez. ψ_i)
erhält, wenn ihm in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i
(bez. ψ_k) die Geschwindigkeit 1 erteilt wird.

1) Vgl. J. J. Thomson u. P. G. Tait, l. c. § 348; Lord Rayleigh,
l. c. §§ 71 und 76.

Wird das System ausschliesslich in der Richtung *einer* Systemcoordinate, etwa ψ_i , aus der Gleichgewichtslage entfernt um den Betrag ψ_i , so wird:

$$\Psi_1 = c_{1i} \psi_i; \quad \Psi_2 = c_{2i} \psi_i; \quad \dots \quad \Psi_k = c_{ki} \psi_i.$$

Es werden also dadurch, dass man das System in der Richtung *einer* Systemcoordinate aus der Gleichgewichtslage verrückt, Kräfte auch in der Richtung der anderen Systemcoordinaten geweckt. Diese müssen, wenn man das System in die Gleichgewichtslage zurückschnellen lässt, Anlass zu Schwingungen auch in der Richtung der anderen Systemcoordinaten geben. Die Grösse der Kraft, welche auf das System in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i (bez. ψ_k) wirkt, wenn dasselbe in der Richtung der Systemcoordinate ψ_k (bez. ψ_i) um die Einheit dieser Coordinate aus der Gleichgewichtslage entfernt wird, ist $c_{ik} = c_{ki}$.

Bei dieser Bedeutung der Grössen a_{ik} und c_{ik} ($i \geq k$) heisst also die Bedingung Gleichung (3) § 1 physikalisch nichts anderes als: nur dann ist eine einfache Schwingung in der Richtung nur *einer* Systemcoordinate möglich, wenn diese Schwingung nicht Kräfte oder Impulse in der Richtung der anderen Systemcoordinaten liefert.¹⁾ Sind solche vorhanden, so muss durch dieselben eine sofortige Störung der Schwingung eintreten; die Schwingung kann nicht stabil sein.

§ 5.

Die zweite Frage, wie man sich die *physikalische Entstehung dieser störenden Impulse und Kräfte zu denken hat*, soll vorerst bezüglich der Impulse, der Grössen a_{ik} , beantwortet werden.

Das System besitze in einem bestimmten Augenblick in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i die „Geschwindigkeit“ ψ'_i , in der Richtung der Systemcoordinate ψ_k die „Geschwindigkeit“ ψ'_k . Der ersten „Geschwindigkeitskomponente“ entspreche für ein Massenteilchen dm die lineare Geschwindig-

1) Dieser Satz ist also physikalisch selbstverständlich. Er ist es so sehr, dass man sich versucht fühlen kann, diesen Satz zum Ausgangspunkt zu machen und daraus — und nicht aus den Differentialgleichungen für die Bewegung des Systems — die analytischen Bedingungen Gleichung (3) § 1 abzuleiten.

keit v_i , der zweiten die lineare Geschwindigkeit v_k . Dann gilt für die lebendige Kraft T des ganzen Systems

$$2T = \int v_i^2 dm + \int v_k^2 dm + 2 \int v_i v_k \cos(v_i, v_k) dm,$$

also (vgl. Gleichung (1) § 1)

$$a_{ik} \psi_i' \psi_k' = \int v_i v_k \cdot \cos(v_i, v_k) \cdot dm.$$

Bedeutet ds_i bez. ds_k den Vector des unendlich kleinen Weges, den das Teilchen dm beschreibt bei einer Verrückung des Systems in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i bez. ψ_k um $d\psi_i$ bez. $d\psi_k$, so ist

$$ds_i = \sigma_i \cdot d\psi_i, \quad ds_k = \sigma_k \cdot d\psi_k,$$

wo σ_i, σ_k für das betreffende Teilchen Constante sind. Daraus folgt

$$v_i = \sigma_i \cdot \psi_i', \quad v_k = \sigma_k \cdot \psi_k'$$

und

$$(4) \quad a_{ik} = \int \sigma_i \sigma_k \cdot \cos(\sigma_i, \sigma_k) dm. ^1)$$

Man hat sich demnach die Entstehung der Grössen a_{ik} folgendermaassen zu denken:

1) Für die Analogie, die zwischen der Theorie dieser Schwingungen und derjenigen mancher elektromagnetischer Erscheinungen besteht (vgl. Lord Rayleigh, l. c. § 111 b und cap. X B), bieten diese Verhältnisse eine besonders gute Illustration.

Die Gleichung für die kinetische Energie T [Gleichung (1)]

$$2T = \dots a_{ii} \psi_i'^2 + a_{kk} \psi_k'^2 + 2 a_{ik} \psi_i' \psi_k' \dots$$

entspricht der Gleichung für die Energie W zweier Stromkreise i und k mit den Intensitäten i_i und i_k :

$$2W = p_{ii} i_i^2 + p_{kk} i_k^2 + 2 p_{ik} i_i i_k,$$

die Coefficienten a_{ik} ($i \geq k$) entsprechen den wechselseitigen Inductioncoefficienten p_{ik} . Die in § 4 besprochene physikalische Bedeutung von a_{ik} findet ihr Analogon in der Definition von p_{ik} als derjenigen Kraftlinienzahl, welche der Strom i (bez. k) durch den Stromkreis k (bez. i) hindurchschiekt, wenn der Strom i_i (bez. i_k) = 1 ist.

Die Gleichung (4) endlich steht zu der Gleichung für T in derselben Beziehung, wie die Neumann'sche Formel

$$p_{ik} = \iint \frac{ds_i ds_k}{r} \cos(ds_i, ds_k)$$

(ds_i, ds_k = Stromelement, r ihr Abstand) zu der Gleichung für W .

Erhält das System in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i eine „Geschwindigkeit“ ψ_i' und zwar vom Betrage $\psi_i' = 1$, so hat irgend ein Massenteilchen dm des Systems bei dieser Bewegung eine Geschwindigkeit σ_i (vgl. Fig. 1), eine Bewegungsgrösse $\sigma_i dm$. Diese besitzt im allgemeinen eine Componente auch in derjenigen Richtung σ_k , in welcher dasselbe Teilchen bei einer Ver-rückung des Systems in der Richtung einer anderen Systemcoordinate ψ_k verschoben worden wäre. Die Grösse dieser Componente ist

Fig. 1.

$$= \sigma_i \cos(\sigma_i, \sigma_k) dm,$$

ihr „Moment bezüglich der Systemcoordinate ψ_k “ (vgl. § 3 c)

$$= \sigma_i \cdot \sigma_k \cos(\sigma_i, \sigma_k) dm.$$

Alle diese Momente der einzelnen Teilchen setzen sich zusammen zu der Grösse a_{ik} , dem Gesamtimpuls, den in diesem Falle das System in der Richtung der Systemcoordinate ψ_k erhält.¹⁾

1) Beispiel: ein starres, um einen festen Punkt drehbares System. Systemcoordinate sind die Drehungswinkel um drei zu einander senkrechte Axen $X Y Z$ (vgl. Fig. 2). $x y z$ seien die rechtwinkligen Coordinaten eines Massenteilchens dm , r_x, r_y, r_z dessen Entfernung von den drei Axen. Dann wird

Fig. 2.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = r_x \\ \sigma_2 = r_y \\ \sigma_3 = r_z \end{array} \right\} \text{ aber nur der} \\ \text{Grösse nach;}$$

$$\cos(\sigma_1, \sigma_2) = -\frac{xy}{r_x r_y},$$

$$\cos(\sigma_2, \sigma_3) = -\frac{yz}{r_y r_z},$$

$$\cos(\sigma_3, \sigma_1) = -\frac{zx}{r_z r_x},$$

also:

$$a_{12} = - \int xy dm, \quad a_{23} = - \int yz dm, \quad a_{31} = - \int zx dm.$$

Man gelangt also zu den *Deviationsmomenten*, die einen speciellen Fall der Grössen a_{ik} ($i \leq k$) darstellen.

§ 6.

Für die Frage nach der *physikalischen Entstehung der „Kräfte“* c_{ik} sei vorerst vorausgesetzt, dass die Kraft, welche auf irgend ein Massenelement $\rho d\tau$ wirkt, eine Kräftefunction besitze, die eindeutige und stetige Function ausschliesslich der Coordinaten des betreffenden Elementes sein soll. Das Coordinatensystem sei ein rechtwinkliges, sein Nullpunkt falle zusammen mit der Ruhelage des Teilchens.

Für die Ruhelage des Teilchens habe die von aussen auf dasselbe ausgeübte Kraft die Componenten $X_0 \cdot \rho d\tau$, $Y_0 \cdot \rho d\tau$, $Z_0 \cdot \rho d\tau$. Die Componenten X_0 , Y_0 , Z_0 sollen in X , Y , Z übergehen, wenn das Teilchen sich an dem der Ruhelage unendlich nahen Punkte mit den Coordinaten $x y z$ befindet. Dann bestehen angenähert die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} X = X_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0 z = X_0 + F_x, \\ Y = Y_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_0 z = Y_0 + F_y, \\ Z = Z_0 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 z = Z_0 + F_z. \end{cases}$$

Nun handelt es sich im Folgenden nur um die Arbeit, welche das System leistet, wenn es aus irgend einer Stellung in die Gleichgewichtslage zurückgeführt wird. Zu dieser Arbeit leisten aber die Kräfte mit den Componenten X_0 , Y_0 , Z_0 keinen Beitrag. In Betracht kommt also nur die Kraft $F \cdot \rho d\tau$, deren Componenten $(F_x, F_y, F_z) \rho d\tau$ durch die Gleichungen (5) definiert sind.

Für die Arbeit dV , welche ein Massenelement $\rho d\tau$ leistet, wenn es aus einer Stellung mit den unendlich kleinen Coordinaten x, y, z zurückgeht in die Gleichgewichtslage und dabei den unendlich kleinen Weg s beschreibt, gilt

$$(6) \quad dV = \frac{1}{2} \cdot F s \cos(F, s) \cdot \rho d\tau.$$

Das Teilchen $\rho d\tau$ möge die Stellung x, y, z dadurch erreicht haben, dass man dem System gleichzeitig eine Verschiebung in der Richtung der Systemcoordinate ψ_i um den unendlich kleinen Betrag ψ_i und in der Richtung der Systemcoordinate ψ_k um den unendlich kleinen Betrag ψ_k erteile.

Bei der ersteren Verschiebung mache das Teilchen den unendlich kleinen Weg s_i , bei der letzteren s_k . Die zurücktreibende Kraft F sei am Endpunkte des ersten Weges F_i , des zweiten F_k . Dann ist der Beitrag dV , den das Potential V [Gleichung (1)] dem betrachteten Massenelement verdankt,

$$dV = \frac{1}{2} [F_i + F_k] \cdot [s_i + s_k] \cdot \cos([F_i + F_k], [s_i + s_k]) \cdot \rho d\tau,$$

wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern Vectorsummen bedeuten. Führt man diese Gleichung aus, so folgt

$$dV = \frac{1}{2} [F_i \cdot s_i \cos(F_i, s_i) + F_k \cdot s_k \cos(F_k, s_k) + F_i \cdot s_k \cos(F_i, s_k) + F_k \cdot s_i \cos(F_k, s_i)] \cdot \rho d\tau.$$

Da nach den Gleichungen (5), in welchen wegen der Annahme einer Kräftefunction $\partial X / \partial y = \partial Y / \partial x$ etc. ist,

$$F_i \cdot s_k \cos(F_i, s_k) = F_k \cdot s_i \cos(F_k, s_i),$$

so erhält man für das Potential v des Systems:

$$2V = \int F_i s_i \cos(F_i, s_i) \cdot \rho d\tau + \int F_k s_k \cos(F_k, s_k) \cdot \rho d\tau + 2 \int F_i s_k \cos(F_i, s_k) \cdot \rho d\tau.$$

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit demjenigen von § 1 giebt:

$$\begin{aligned} c_{ik} \cdot \psi_i \cdot \psi_k &= \int F_i \cdot \psi_k \cos(F_i, \psi_k) \cdot \rho d\tau \\ &= \int F_k \cdot \psi_i \cos(F_k, s_i) \cdot \rho d\tau. \end{aligned}$$

Aus den schon früher gebrauchten Gleichungen

$$s_i = \sigma_i \psi_i, \quad s_k = \sigma_k \psi_k$$

folgt nun vermöge Gleichung (5)

$$F_i = f_i \cdot \psi_i, \quad F_k = f_k \cdot \psi_k,$$

wo f_i, f_k ebenso wie σ_i, σ_k für ein bestimmtes Element des Systems als Constante zu betrachten sind. So wird endlich:

$$c_{ik} = \int f_i \cdot \sigma_k \cos(f_i, \sigma_k) \cdot \rho d\tau = \int f_k \cdot \sigma_i \cos(f_k, \sigma_i) \cdot \rho d\tau.$$

Auf Grund dieses Ausdruckes hat man sich folgende Vorstellung über die physikalische Entstehung der störenden „Kraft“ c_{ik} zu bilden:

Wird das System in der Richtung einer Systemcoordinate ψ_i aus der Gleichgewichtslage verschoben um den Betrag $\psi_i = 1$, so wirkt auf ein Massenelement $\rho d\tau$, welches bei dieser Verschiebung den unendlich kleinen Weg σ_i gemacht hat, eine zurücktreibende Kraft $f_i \cdot \rho d\tau$. Diese Kraft besitzt eine Componente auch in derjenigen Richtung σ_k , in welcher dasselbe Element bei einer Verrückung des Systems in der Richtung einer anderen Systemcoordinate ψ_k verschoben worden wäre. Die Grösse dieser Componente ist

$$f_i \cos(f_i, \sigma_k) \cdot \rho d\tau,$$

das „Moment dieser Componente bezüglich der Systemcoordinate ψ_k “

$$f_i \sigma_k \cos(f_i, \sigma_k) \cdot \rho d\tau.$$

Die „Momente“ aller Massenteilchen des Systems summiren sich und liefern eben die Grösse c_{ik} .

§ 7.

Bei elastischen Systemen treffen die Voraussetzungen von § 6 nicht mehr zu. Jedoch genügt eine einfache Umformung des Potentials, um dieselben Verhältnisse wie dort herzustellen.

Das elastische Potential W hat die Form

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} 2W = \int & \left[X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + X_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + Y_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Z_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] d\tau, \end{aligned} \right.$$

wo X_x etc. in der üblichen Weise die Componenten der Druckkräfte und u, v, w die Componenten der unendlich kleinen Strecke s bezeichnen, um welche das Volumenelement $d\tau$ bei der betreffenden Deformation aus der Gleichgewichtslage sich entfernt hat.

Es bezeichne G den Vector der auf die Volumeneinheit wirkenden inneren Kräfte, P den Vector der auf die Ober-

fläche des Systems — und zwar pro Flächeneinheit — von aussen ausgeübten Druckkräfte. Dann gelten die Gleichungen

$$-G_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z},$$

$$-G_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z},$$

$$-G_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z};$$

$$-P_x = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z),$$

$$-P_y = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z),$$

$$-P_z = Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z),$$

worin n die nach innen gerichtete Normale des Oberflächenelementes do , auf welches sich P bezieht, bedeutet.

Die partielle Integration von W , Gleichung (7), liefert dann

$$\begin{aligned} 2W &= \int (G_x \cdot u + G_y \cdot v + G_z \cdot w) d\tau + \int (P_x \cdot u + P_y \cdot v + P_z \cdot w) do \\ &= \int G \cdot s \cdot \cos(G, s) d\tau + \int P \cdot s \cdot \cos(P, s) do. \end{aligned}$$

Als Beitrag eines Volumenelementes $d\tau$ kann also aufgefasst werden der Ausdruck

$$(8) \quad \frac{1}{2} G \cdot s \cdot \cos(G, s) d\tau,$$

oder, falls auch noch äussere Kräfte (Vector F , § 6) vorhanden sind,

$$(8a) \quad \frac{1}{2} [\rho F + G] \cdot s \cdot \cos([\rho F + G], s) \cdot d\tau,$$

worin unter $[\rho F + G]$ die Vectorsumme von ρF und G zu verstehen ist.

Als Beitrag eines Oberflächenelementes do hat man zu betrachten die Grösse

$$(9) \quad \frac{1}{2} P \cdot s \cdot \cos(P, s) do.$$

Die Ausdrücke (8) und (9) haben genau die Form wie der entsprechende Ausdruck (6), § 6. Bei ihrer physikalischen Interpretation braucht man also nur genau nach dem in § 6 gegebenen Schema zu verfahren.

Strassburg i. E., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 24. April 1901.)