Beweis des ebenen Translationssatzes.

Von

L. E. J. BROUWER in Amsterdam.

In der Cartesischen Ebene verstehen wir unter einer *einfachen offenen Linie* eine ihre Grenzpunkte enthaltende Punktmenge, welche eineindeutiges und stetiges Bild der geraden Linie ist.

In einer einfachen offenen Linie werden durch einen willkürlichen ihrer Punkte zwei zusammenhängende, ihre Grenzpunkte enthaltende Teilmengen bestimmt, welche nur den genannten Punkt gemeinschaftlich haben. Eine solche Teilmenge nennen wir eine *einfache offene Halblinie*.

Unter einem zu einer eineindeutigen, stetigen, den Umlaufssinn nicht ändernden Transformation der Cartesischen Ebene in sich gehörigen *Translationsfelde* verstehen wir ein Gebiet, welches außerhalb seines Bildgebietes liegt, und von zwei einander nicht treffenden einfachen offenen Linien, deren eine das Bild der anderen ist, begrenzt wird.

Eine eineindeutige, stetige, den Umlaufssinn nicht ändernde Transformation der Cartesischen Ebene in sich soll *über die ganze Ebene eine Translation* heißen, wenn sich zu jedem Punkte der Ebene ein diesen Punkt enthaltendes Translationsfeld angeben läßt.

Es gilt nun folgender

Translationssatz. *Jede eineindeutige, stetige, den Umlaufssinn nicht ändernde Transformation der Cartesischen Ebene in sich, welche keinen Punkt invariant läßt, ist über die ganze Ebene eine Translation.*)*

Von diesem Satze führe ich im folgenden den vollständigen Beweis.

*) Vgl. Math. Ann. 69, wo der Satz S. 179 formuliert und S. 199 angewandt wird. Ich mache hier darauf aufmerksam, daß die Identifizierung jedes Punktes mit seinem Bildpunkte nicht immer aus der Ebene eine neue Fläche zu erzeugen braucht, wie dies bei der zitierten gruppentheoretischen Anwendung der Fall ist.

§ 1.

Theorie der Bahnkurven.

Wir denken also die Cartesische Ebene einer eindeutigen, stetigen, den Umlaufssinn nicht ändernden Transformation, welche keinen Punkt invariant läßt, unterzogen.

Alsdann nennen wir einen einfachen Kurvenbogen AA' , dessen Endpunkt A' Bildpunkt des Anfangspunktes A ist, und der außer dem Punkte A' mit seinem Bilde keinen Punkt gemeinschaftlich hat, einen *Translationsbogen*.

Indem wir einen Translationsbogen immer wieder der gegebenen Transformation sowie ihrer inversen unterziehen, erzeugen wir eine stetige Kurve, welche wir eine *Bahnkurve* nennen wollen.

Einen Teilbogen einer Bahnkurve, von dessen Endpunkten eines das Bild des anderen ist, nennen wir ein *Bahnsegment*.

Einen Teilbogen einer Bahnkurve, der ein Bahnsegment als Teil enthält, nennen wir einen *Bahnbogen*.

Ein einfacher Kurvenbogen, der sein Bild nicht trifft, soll ein *freier Bogen* heißen.

Unter dem *Transformationsvektor* eines Punktes der Ebene verstehen wir den Vektor, der diesen Punkt mit seinem Bildpunkte verbindet.

Satz 1. Eine Bahnkurve kann keinen Doppelpunkt besitzen.

Beweis. Falls ein Doppelpunkt existiert, so enthält gewiß auch der in A anfangende Teil der Bahnkurve einen Doppelpunkt. Sei also P' der Punkt, in dem dieser Teil fürs erste Mal sich selbst trifft.

Fig. 1.

Auf der in dieser Weise gebildeten einfachen geschlossenen Kurve c müssen dann wenigstens zwei Punkte der durch beliebige Wiederholung der Transformation aus A erzeugten Punktreihe $A, A', A'', \dots$ liegen. Der erste auf c liegende Punkt dieser Reihe sei $A^{(h+1)}$, der letzte $A^{(p)}$.

Sei P'' das Bild von P' , P das inverse Bild von P' . Wenn wir die Bahnkurve noch über P' hinaus bis P'' verlängern, so kann dieses (in Fig. 1 gestrichelte) Bahnsegment $P'P''$ von der geschlossenen Kurve c nur den Bogen $P'A^{(h+1)}$ treffen. Der Kurvenbogen $P''A^{(p)}P'$, der sowohl mit dem Bahnsegmente $P'A^{(h+1)}P''$, wie mit dem Bahnsegmente $P'A^{(p+1)}P''$ eine einfache geschlossene Kurve bildet, hat für diese beiden geschlossenen Kurven dieselbe Innenseite, kann mithin durch die Bahnsegmente $P'A^{(h+1)}P''$ und $P'A^{(p+1)}P''$ zusammen nicht vom Unendlichen getrennt werden.

Wir führen nun von einem nirgends verschwindenden Vektor, dessen Anfangspunkt das Bahnsegment $PA^{(p)}P'$ durchläuft, den Endpunkt als stetige Funktion des Anfangspunktes von P' nach P'' , ein erstes Mal auf dem Bahnsegmente $P'A^{(h+1)}P''$, ein zweites Mal auf dem Bahnsegmente $P'A^{(p+1)}P''$. Der dabei vom Vektor beschriebene Drehungswinkel ist, weil die Bogen $P'A^{(h+1)}P''$ und $P'A^{(p+1)}P''$ zusammen den Bogen $PA^{(p)}P'$ (oder, falls die Punktepaare $A^{(h+1)}$, P'' und P , $A^{(p)}$ einander auf c trennen, eine Seite des Bogens $PA^{(p)}P'$) nicht vom Unendlichen trennen, beide Male derselbe.

Der totale Drehungswinkel, den der Transformationsvektor bei einem vollen Umlauf von c beschreibt, wird somit auch erhalten, wenn wir von einem nirgends verschwindenden Vektor zunächst den Anfangspunkt den zu c gehörigen Bogen $P'A^{(h+1)}P$ und den Endpunkt als stetige Funktion des Anfangspunktes den Bogen $P''A^{(p)}P'$, und sodann den Anfangspunkt den Bogen $PA^{(p)}P'$ und den Endpunkt als stetige Funktion des Anfangspunktes den Bogen $P'A^{(h+1)}P''$ beschreiben lassen.

Der hierbei in den Punkten von c auftretende Vektor gehört aber als Transformationsvektor zu einer Rotation der geschlossenen Linie c in sich, sodaß sein totaler Drehungswinkel 2π beträgt.

Dies aber würde nach sich ziehen, daß die Transformation der Ebene innerhalb c einen Fixpunkt besäße, was ein Widerspruch ist.

Satz 2. Eine Bahnkurve kann bei beliebig weiter Fortsetzung vorwärts und rückwärts nicht in beliebige Nähe eines ihrer Punkte zurückkehren.

Beweis. Wir nehmen an, daß die Bahnkurve bei beliebig weiter Fortsetzung vorwärts in beliebige Nähe ihres Punktes P zurückkehrt. Dann existiert eine einfache geschlossene Kurve c , welche sich aus einem Bahnbogen PQ und einem freien Bogen PQ , der auch das P vorangehende Bahnsegment P_iP nicht trifft, zusammensetzt. Wir bezeichnen den Bahnbogen PQ mit β , den (in Fig. 2 gestrichelten) freien Bogen PQ mit α , die Bilder von c , P , Q , β , α der Reihe nach mit c' , P' , Q' , β' , α' , die inversen Bilder von P resp. Q mit P_i resp. Q_i .

Fig. 2.

Der totale Drehungswinkel des Transformationsvektors für das Bahnsegment Q_iQ kann erzeugt werden, indem wir von einem nirgends verschwindenden Vektor zunächst den Anfangspunkt das Bahnsegment Q_iQ und den Endpunkt als stetige Funktion des Anfangspunktes den Bogen $QQ'P'$ beschreiben lassen, und sodann den Anfangspunkt in Q festhalten, und den Endpunkt auf α' von P' nach Q' zurückführen. In dieser Bahn

des Endpunktes dürfen wir aber den Bogen $QQ'P'$ durch QPP' ersetzen; die eine Seite des Bahnsegmentes Q_iQ wird nämlich, auch falls die Punktepaare P, P' und Q_i, Q einander auf c trennen sollten, durch $QQ'P' + QPP'$ nicht vom Unendlichen getrennt.

Der totale Drehungswinkel des Transformationsvektors für den freien Bogen α kann erzeugt werden, indem wir von einem Vektor zunächst den Anfangspunkt in Q festhalten und den Endpunkt auf α' von Q' nach P' führen, und sodann den Endpunkt in P' festhalten und den Anfangspunkt auf α von Q nach P führen.

Der totale Drehungswinkel des Transformationsvektors für einen vollen Umlauf von c kann somit erzeugt werden, indem wir von einem nirgends verschwindenden Vektor den Anfangspunkt und den Endpunkt je einen vollen Umlauf von c vollbringen lassen. Dieser totale Drehungswinkel beträgt somit 2π .

Dies aber würde wieder nach sich ziehen, daß die Transformation der Ebene innerhalb c einen Fixpunkt besäße, was ein Widerspruch ist.

Aus Satz 2 dürfen wir nicht folgern, daß eine Bahnkurve eine einfache offene Linie ist. Vielmehr können bei beliebig weiter Fortsetzung vorwärts sehr gut nicht zur Bahnkurve gehörige Grenzpunkte auftreten. Die von diesen Grenzpunkten gebildete Punktmenge nennen wir das *finale Ende* F der Bahnkurve. In analoger Weise wird bei beliebig weiter Fortsetzung rückwärts ein *initiales Ende* I der Bahnkurve bestimmt. Satz 2 besagt aber, daß die Bahnkurve keines ihrer beiden Enden treffen kann.

Wir wollen gleich ein Beispiel einer Bahnkurve, welche ein finales Ende besitzt, herstellen. Wir betrachten dazu die durch folgende Formeln ausgedrückte Transformation:

$$\begin{aligned} \text{für } x > \frac{1}{e}: & \quad x' = \frac{x}{e}, & y' = 3y + 1, \\ \text{für } \frac{1}{e} > x > 0: & \quad x' = \frac{x}{e}, & y' = y \left\{ 1 - \frac{2}{\lg(x)} \right\} + 1, \\ \text{für } x < 0: & \quad x' = x, & y' = y + 1. \end{aligned}$$

Sei A der Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{e}$ und 0, B der Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{e}$ und -2 , C der Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{e^2}$ und 1. Aus den Strecken AB und BC können wir einen Translationsbogen zusammensetzen. Dieser Translationsbogen bestimmt eine Bahnkurve, welche die gerade Linie $x = 0$ zum finalen Ende besitzt.

Satz 3. *Kein Ende einer Bahnkurve kann ganz im Endlichen enthalten sein.*

Beweis. Ein im endlichen enthaltenes Ende wäre nämlich eine zusammenhängende, perfekte Punktmenge, welche ein die Bahnkurve enthaltendes Gebiet G_e bestimmen würde. Die Komplementärmenge dieses

Gebietes G_i wäre ein für die Transformation invariantes *zirkulares Kontinuum*^{*)}, das wenigstens einen invarianten Punkt enthalten würde.^{**)}

Ein Ende einer Bahnkurve erstreckt sich somit bis zum Unendlichen.

Wir werden nun für die weiteren Entwicklungen dieses Paragraphen die Ebene stereographisch auf eine Kugel projizieren, wobei das Unendliche in einen einzigen Punkt U übergeht; ein Ende einer Bahnkurve wird dann zu einer *zusammenhängenden perfekten* Punktmenge.

Hilfssatz 1. *Ein freier Bogen, welcher mit einem zwischen denselben Endpunkten verlaufenden Bahnbogen eine einfache geschlossene Kurve bildet, wird sowohl von dem vorangehenden, wie von dem folgenden Bahnsegment der Bahnkurve getroffen.*

Beweis. Wenn nämlich der freie Bogen z. B. von dem vorangehenden Bahnsegment der Bahnkurve nicht getroffen würde, so würde wieder der Fall der Fig. 2 eintreten, d. h. wir hätten eine einfache geschlossene Kurve c , welche sich aus einem Bahnbogen PQ , und einem freien Bogen PQ , der auch das P unmittelbar vorangehende Bahnsegment P_iP nicht trafe, zusammensetzte. Hieraus gelangen wir genau wie im Beweise des Satzes 2 zu einem Widerspruch.

Wir zerlegen jetzt die Bahnkurve in ein wenigstens vier getrennte Segmente enthaltendes *Mittelstück*, ein *initiales Stück* und ein *finales Stück*, welche wir der Reihe nach mit m , i und f bezeichnen.

Sei G_f das von F bestimmte, die Bahnkurve enthaltende Gebiet. Unter der *Kontur* von F verstehen wir sodann den zyklischen Ordnungstypus seiner für G_f erreichbaren Punkte. Wir sagen, daß das finale Stück der Bahnkurve den Punkt P der Kontur von F *unbegrenzt approximiert*, wenn es jeden nach P führenden Weg in beliebiger Nähe von P trifft.

Hilfssatz 2. *Das finale Ende enthält, falls es sich nicht auf den Punkt U reduziert, wenigstens zwei erreichbare Punkte, welche vom finalen Stücke der Bahnkurve unbegrenzt approximiert werden.*

Beweis. Im entgegengesetzten Falle könnten wir nämlich einen freien Bogen β'' zeichnen, der einen Punkt H'' von f mit einem erreichbaren Punkte K'' von F verbände, der außerhalb seiner Endpunkte weder mit m , noch mit f , noch mit F einen gemeinschaftlichen Punkt besäße, und von dem auch das Bild und das inverse Bild einander nicht trafen.^{***)}

Fig. 3.

^{*)} Amsterd. Ber., holl. Ausg. 19, S. 737; engl. Ausg. 13, S. 767.

^{**)} ibid., holl. Ausg. 19, S. 741; engl. Ausg. 13, S. 771.

^{***)} Letztere Bedingung ist übrigens für jeden freien Bogen von selbst erfüllt.

Die inversen Bilder von H'' , K'' , β'' bezeichnen wir der Reihe nach mit H' , K' , β' , die inversen Bilder von H' , K' , β' der Reihe nach mit H , K , β , und wir beschreiben um K' einen Kreis c' , der von seinem Bilde, von β , β'' , und vom Bahnbogen HH'' nicht getroffen wird. Weil nun aber K' zu F gehört, müßte der auf H'' folgende Teil von f in c' eindringen, wobei eine einfache geschlossene Kurve von der durch Hilfssatz 1 ausgeschlossenen Art herauskäme.

Aus Hilfssatz 2 folgern wir, daß die von f unbegrenzt approximierten erreichbaren Punkte von F ein gewisses Segment σ der Kontur von F einnehmen. Wir betrachten das von σ auf der Kontur von F bestimmte Komplementärsegment σ_c .

Hilfssatz 3. *Das Komplementärsegment σ_c reduziert sich auf höchstens einen einzigen erreichbaren Punkt.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die Schnitte, von denen das eventuelle Segment σ_c begrenzt wird, beide von einem mit U zusammenfallenden erreichbaren Punkte bestimmt werden müssen. In entgegengesetzten Falle könnten wir nämlich in endlicher Entfernung von U einen beliebig kleinen einfachen Kurvenbogen zeichnen, der einen Punkt von σ mit einem Punkte von σ_c verbände, und außerhalb seiner Endpunkte F nicht träfe.*) Dann aber könnten wir einen freien Bogen β'' von der im Beweise von Hilfssatz 2 auftretenden Art konstruieren, und dieser würde wie dort auf einen Widerspruch führen.

Wären nun diese beiden Schnitte nicht identisch, so hätten die Ableitungen von σ und σ_c den Punkt U als ihren einzigen gemeinschaftlichen Punkt, während f in beliebige Nähe eines nicht mit U identischen Punktes der Ableitung von σ_c gelangen müßte, sodaß wir wieder einen freien Bogen β'' von der durch den Beweis des Hilfssatzes 2 ausgeschlossenen Art konstruieren könnten.

Die Bahnenden I und F bilden zusammen eine zusammenhängende perfekte Punktmenge $I + F$. In einem der von ihr bestimmten Gebiete, das wir mit G bezeichnen, verläuft die Bahnkurve. Die Kontur von $I + F$ enthält ein Segment σ_i , das von i , und ein Segment σ_f , das von f unbegrenzt approximiert wird. Aus Hilfssatz 3 folgern wir, daß diese beiden Segmente auf der Kontur von $I + F$ kein Komplementärsegment übrig lassen.

Hilfssatz 4. *Die Segmente σ_i und σ_f besitzen kein gemeinschaftliches Teilsegment.*

Beweis. Wenn ein gemeinschaftliches Teilsegment existierte, könnten wir nach einem zu diesem Segmente gehörigen Punkte K einen Weg legen. Dieser Weg würde einen freien Bogen enthalten, der einen Punkt von i

*) Amsterd. Ber., holl. Ausg. 20, S. 26; engl. Ausg. 14, S. 302.

mit einem Punkte von f verbände, und übrigens die Bahnkurve nicht träge, was wider Hilfssatz 1 verstoßen würde.

Hilfssatz 5. *Die Schnitte, durch welche σ_i und σ_f getrennt werden, werden beide von einem mit U zusammenfallenden erreichbaren Punkte bestimmt.*

Beweis. Im entgegengesetzten Falle könnten wir nämlich in endlicher Entfernung von U einen beliebigen kleinen, m nicht treffenden, freien Bogen zeichnen, der einen Punkt von σ_i mit einem Punkte von σ_f verbände, und außerhalb seiner Endpunkte F nicht träge. Und dieser Kurvenbogen würde wieder einen freien Bogen enthalten, der einen Punkt von i mit einem Punkte von f verbände, und übrigens die Bahnkurve nicht träge.

Aus Hilfssatz 5 folgern wir gleich, daß die Ableitung I_a von σ_i und die Ableitung F_a von σ_f nur den Punkt U gemeinschaftlich haben.

Satz 4. *Die Bahnenden I und F haben nur den Punkt U gemeinschaftlich.*

Beweis. Wenn nämlich i in beliebige Nähe eines nicht mit U identischen Punktes von F_a gelangte, so gäbe es in endlicher Entfernung von U einen beliebigen kleinen nach F_a führenden Weg, der sowohl von i wie von f getroffen würde, und auf dem man einen i und f verbindenden und außerhalb seiner Endpunkte die Bahnkurve nicht treffenden freien Bogen bestimmen könnte, was durch Hilfssatz 1 ausgeschlossen ist.

Mithin ist I mit I_a und F mit F_a identisch, womit der Satz bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Es gibt eine einfache geschlossene Kurve, welche U enthält und die Bahnkurve in einem einzigen Punkte kreuzt, sonst aber weder die Bahnkurve noch ihre Enden trifft.*

Beweis. Wir bezeichnen $I - U$ mit I_r , $F - U$ mit F_r , und gehen aus von einer einfachen geschlossenen Kurve κ , welche I und F nur in U

Fig. 4.

trifft, und die Kugel zerlegt in ein Gebiet β , welches I_r , oder, falls I_r nicht existiert, i enthält, und ein Gebiet η , welches F_r , oder, falls F_r nicht existiert, f enthält.

Sei β_m dasjenige von α und f bestimmte Teilgebiet von β , welches I_r resp. i enthält; seine Grenze α_m trifft $I + F$ nur in U . In beliebiger Nähe von α_m läßt sich somit eine (in Fig. 4 gestrichelte) U enthaltende und übrigens in β_m verlaufende einfache geschlossene Kurve α' zeichnen, welche die Kugel zerlegt in die Gebiete β' und η' , von denen das erste I_r resp. i , das zweite sowohl F_r wie f enthält.

Sei η'_m dasjenige von α' und i bestimmte Teilgebiet von η' , welches F_r und f enthält; seine Grenze α'_m trifft $I + F$ nur in U . In beliebiger Nähe von α'_m läßt sich somit eine (in Fig. 4 punktierte) U enthaltende und übrigens in η'_m verlaufende einfache geschlossene Kurve α'' zeichnen, welche die Kugel zerlegt in die Gebiete β'' und η'' , von denen das erste sowohl I_r wie i , das zweite sowohl F_r wie f enthält.

Seien H_1 und H_2 zwei solche Schnittpunkte von α'' und m , daß der U enthaltende Teilbogen $H_1 H_2$ von α'' keinen weiteren Punkt von m enthält. Ersetzen wir jetzt in α'' den U nicht enthaltenden Teilbogen $H_1 H_2$ durch den zu m gehörigen Bogen $H_1 H_2$, so erhalten wir eine einfache geschlossene Kurve α''' , welche U enthält und die Bahnkurve in einem gemeinsamen Bogen $H_1 H_2$ kreuzt, übrigens aber weder die Bahnkurve noch ihre Enden trifft. Nach einer beliebig kleinen Modifizierung genügt mithin α''' den Anforderungen des zu beweisenden Satzes.

Satz 5. *U ist sowohl als Punkt von I wie als Punkt von F aus einem willkürlichen Punkte der Bahnkurve ohne weitere Durchsetzung der Bahnkurve erreichbar; übrigens enthält weder I noch F einen Punkt, der aus einem Punkte der Bahnkurve ohne weitere Durchsetzung der Bahnkurve erreichbar ist.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Hilfssätze 3 und 6.

Als Ergänzung zu Hilfssatz 1 können wir jetzt formulieren:

Satz 6. *Es gibt keine einfache geschlossene Kurve, welche sich aus einem freien Bogen und einem Bahnbogen mit denselben Endpunkten zusammensetzt.*

Beweis. Wir nehmen an, daß eine solche geschlossene Kurve c existiert, bezeichnen den freien Bogen und den Bahnbogen, aus denen c sich zusammensetzt, der Reihe nach mit α und β , den β vorangehenden Teil der Bahnkurve mit b , den auf β folgenden Teil der Bahnkurve mit e , die Komplementärmenge des Gebietes G_i mit I_z , die Komplementärmenge des Gebietes G_r mit F_z , die auf α von $b + I_z$ bestimmte abgeschlossene Punktmenge mit π_b , die auf α von $e + F_z$ bestimmte abgeschlossene Punktmenge mit π_e . Die auf α von $\pi_b + \pi_e$ bestimmte Intervallmenge enthält sicher ein Intervall i , von dessen Endpunkten der eine P zu π_b , der andere Q zu π_e gehört. Wenn nun P zu I_z gehörte, wäre er ein aus G ohne Durchsetzung der Bahnkurve erreichbarer Punkt von I , was unmög-

lich ist. Mithin gehört P zu b , ebenso Q zu e , und das Intervall i müßte zusammen mit dem Bogen PQ der Bahnkurve eine einfache geschlossene Kurve von der durch Hilfssatz 1 ausgeschlossenen Art bestimmen.

Satz 7. *Durch jeden Punkt der Ebene läßt sich eine Bahnkurve legen.*

Beweis. Sei P ein in der Ebene willkürlich angenommener Punkt, P' sein Bild, k ein P und P' verbindender einfacher Kurvenbogen, k' das Bild von k . Wir lassen einen beweglichen Punkt S von P aus den Kurvenbogen k beschreiben, bis seine Bahn und diejenige seines Bildpunktes S' einander treffen in einem Punkte Q' . Dort mündet dann entweder die Bahn von S auf eine Seite der Bahn von S' , oder die Bahn von S' auf eine Seite der Bahn von S . Wir dürfen den ersten Fall voraussetzen; der zweite kann nämlich in den ersten übergeführt werden, indem wir die Transformation durch ihre inverse ersetzen, wobei die Rollen von P und P' verwechselt werden, unsere Aufgabe aber dieselbe bleibt.

Fig. 5

Wir bezeichnen mit Q'' das Bild von Q' , mit Q das inverse Bild von Q' , mit a den Kurvenbogen PQ' , mit a' das Bild von a .

Wir wählen auf a einen Punkt R' so nahe an Q' , daß er sich mit P' verbinden läßt durch einen einfachen Kurvenbogen s' , der außerhalb P' und R' weder sein inverses Bild s , noch a , noch a' trifft, während auch s außerhalb P weder a noch a' trifft. Alsdann ist aber $RPQR'$ ein Translationsbogen, der eine P enthaltende Bahnkurve erzeugt, womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Satz 8. *Wenn wir einen in der Ebene willkürlich angenommenen Punkt immer wieder der gegebenen Transformation sowie ihrer inversen unterziehen, so erzeugen wir eine Punktmenge, welche keinen Grenzpunkt im Endlichen besitzt.*

Beweis. Wenn nämlich diese Punktmenge, welche wir mit t bezeichnen, eine Fundamentalreihe $P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, \dots$, welche gegen einen im Endlichen liegenden Grenzpunkt $P^{(\omega)}$ konvergierte, enthielte, so könnten wir nach der im Beweise von Satz 7 befolgten Methode durch $P^{(\omega)}$ und einen in genügender Nähe von $P^{(\omega)}$ liegenden Punkt $P^{(n_s)}$ einen Translationsbogen legen; die von diesem Translationsbogen erzeugte Bahnkurve würde sodann die ganze Punktmenge t enthalten, müßte somit bei genügend weiter Fortsetzung vorwärts und rückwärts in beliebige Nähe von $P^{(\omega)}$ gelangen, was wider Satz 2 verstoßen würde.

§ 2.

Herstellung des Translationsfeldes.

Unser Ziel ist jetzt, zu einem in der Ebene willkürlich angenommenen Punkte P_0 ein diesen Punkt enthaltendes Translationsfeld zu konstruieren.

Wir ziehen durch P_0 eine willkürliche Bahnkurve b_0 und schlagen um P_0 als Mittelpunkt einen Kreis C_1 .

Die Enden von b_0 bestimmen in der Ebene ein b_0 enthaltendes Gebiet, welches von b_0 in zwei Teilgebiete zerlegt wird. Diese Teilgebiete können wir als *das rechte* und *das linke Gebiet von b_0* bezeichnen.

Einen zwischen zwei Punkten von b_0 im rechten bez. linken Gebiete von b_0 verlaufenden, im übrigen b_0 nicht treffenden und ohne Kreuzung von b_0 oder C_1 aus dem Unendlichen erreichbaren Teilbogen von C_1 nennen wir *einen rechten bez. linken Schließungsbogen von C_1 in bezug auf b_0* , kurz einen $Sb_r(C_1, b_0)$ bez. $Sb_l(C_1, b_0)$. Dieser Schließungsbogen soll *erster Art* heißen, wenn er sein Bild nicht trifft, *zweiter Art* im entgegengesetzten Falle.

Zu jedem Schließungsbogen gehört ein zwischen demselben Anfangspunkte und demselben Endpunkte verlaufender Teilbogen von b_0 , den wir *einen rechten bez. linken Ausbiegungsbogen von b_0 in bezug auf C_1* , kurz einen $Ab_r(b_0, C_1)$ bez. $Ab_l(b_0, C_1)$ nennen. (In Fig. 6 sind die $Ab_r(b_0, C_1)$ gestrichelt gezeichnet.) Ein Ausbiegungsbogen soll *erster* oder *zweiter Art* heißen, je nachdem der entsprechende Schließungsbogen erster oder zweiter Art ist.

Sei A_0E_0 der kleinste die $Sb_r(C_1, b_0)$ enthaltende Teilbogen von C_1 . Wir nehmen an, daß es $Sb_r(C_1, b_0)$ zweiter Art gibt; ihre Gesamtlänge sei l_0 .

Fig. 6.

Fig. 7.

Wir bezeichnen (Fig. 7) einen willkürlichen dieser $Sb_r(C_1, b_0)$ zweiter Art mit τ , seinen Anfangspunkt mit R , seinen Endpunkt mit Q , sein Bild

mit τ und lassen einen beweglichen Punkt S von Q aus den Bogen τ beschreiben, bis seine Bahn und diejenige seines Bildpunktes S' einander treffen in einem Punkte T . Dort mündet dann entweder die Bahn von S auf die rechte Seite der Bahn von S' oder die Bahn von S' auf die linke Seite der Bahn von S . Wenn wir uns auf die erste dieser beiden Möglichkeiten beschränken (die zweite läßt sich ganz analog behandeln), so ist der (in Fig. 7 gestrichelte) Teilbogen TT' von τ' ein Translationsbogen, der eine b_0 nicht treffende und rechts von b_0 verlaufende Bahnkurve ${}_1b_0$ erzeugt, während es einen in C_1 liegenden freien Bogen RU gibt, der b_0 und ${}_1b_0$ verbindet.

Wenn wir die Gesamtlänge der $Sb_r(C_1, {}_1b_0)$ zweiter Art mit ${}_1l_0$ und das Minimum der Länge des Transformationsvektors in den Punkten innerhalb C_1 mit m_1 bezeichnen, so ist $l_0 - {}_1l_0 > m_1$.

Ist ${}_1l_0 > 0$, so konstruieren wir in derselben Weise eine ${}_1b_0$ nicht treffende und rechts von ${}_1b_0$ verlaufende Bahnkurve ${}_2b_0$, zu welcher es wieder einen zu C_1 gehörigen freien Bogen gibt, der ${}_1b_0$ und ${}_2b_0$ verbindet.

In dieser Weise gelangen wir nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einer Bahnkurve ${}_kb_0$, zu welcher es keine $Sb_r(C_1, {}_kb_0)$ zweiter Art mehr gibt.

Wir bezeichnen im weiteren ${}_kb_0$ mit b_{01} und wählen einen freien Teilbogen $P_{01}Q_{01}$ von $A_{01}E_{01}$, der mit $A_{01}E_{01}$ keinen Endpunkt gemeinschaftlich hat und der jeden rechten Schließungsbogen, von dem er einen Teilbogen enthält, ganz enthält.

Die in $P_{01}Q_{01}$ enthaltenen $Sb_r(C_1, b_{01})$ lassen sich dann in solcher Weise in eine *endliche* Zahl von Gruppen $s_1, s_2, \dots$ ordnen, daß zu jeder Gruppe s_p eine in einem einzigen Bahnsegmente von b_{01} enthaltene Gruppe von Ausbiegungsbogen a_p gehört.

Ersetzen wir dann in b_{01} eine gewisse Gruppe a_p durch die entsprechende Gruppe s_p , so erzeugen wir eine Bahnkurve ${}_pb_{01}$, welche teilweise rechts von b_{01} verläuft und teilweise mit b_{01} zusammenfällt, während jeder nicht in b_{01} liegende Punkt von ${}_pb_{01}$ sich mit b_{01} durch einen freien Bogen, der keinen weiteren Schnittpunkt mit ${}_pb_{01}$ besitzt, verbinden läßt.

Die rechten Gebiete der verschiedenen ${}_pb_{01}$ besitzen ein größtes gemeinschaftliches Gebiet, welches seinerseits das rechte Gebiet einer Bahnkurve b_{02} bildet, in bezug auf welche im Kreisbogen $P_{01}Q_{01}$ keine rechten Schließungsbogen mehr enthalten sind, während jeder nicht zu b_{01} gehörige Punkt von b_{02} sich durch einen freien Bogen, der keinen weiteren Schnittpunkt mit b_{02} besitzt, mit b_{01} verbinden läßt.

Wir wählen jetzt einen freien Teilbogen $P_{02}Q_{02}$ von $A_{02}E_{02}$, der mit $P_{01}Q_{01}$ keinen Teilbogen gemeinschaftlich hat und nur volle rechte

Schließungsbogen in bezug auf b_{0_2} enthält. Mittels b_{0_2} und $P_{0_2} Q_{0_2}$ konstruieren wir dann eine Bahnkurve b_{0_3} , in bezug auf welche weder im Kreisbogen $P_{0_1} Q_{0_1}$ noch im Kreisbogen $P_{0_2} Q_{0_2}$ rechte Schließungsbogen enthalten sind, während jeder nicht zu b_{0_2} gehörige Punkt von b_{0_3} sich durch einen freien Bogen, der keinen weiteren Schnittpunkt mit b_{0_3} besitzt, mit b_{0_2} verbinden läßt.

In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir bei passender Wahl der $P_{0_m} Q_{0_m}$ nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einer Bahnkurve b_{0_h} , in bezug auf welche die rechten Schließungsbogen von C_1 sich in zwei aufeinanderfolgende Gruppen zerlegen lassen, von denen die erste, die Gruppe der „initialen rechten Schließungsbogen“, mit ${}_iSb_r(C_1, b_{0_h})$ zu bezeichnen, in einem freien kleinsten Kreisbogen $A_{0_h} B_{0_h}$, und die zweite, die Gruppe der „finalen rechten Schließungsbogen“, mit ${}_fSb_r(C_1, b_{0_h})$ zu bezeichnen, in einem freien kleinsten Kreisbogen $D_{0_h} E_{0_h}$ enthalten ist. Jede dieser beiden Gruppen kann übrigens in Fortfall kommen.

Wir dürfen sogar annehmen, erstens daß zwischen den zu den ${}_iSb_r(C_1, b_{0_h})$ gehörigen ${}_iAb_r(b_{0_h}, C_1)$ und den zu den ${}_fSb_r(C_1, b_{0_h})$ gehörigen ${}_fAb_r(b_{0_h}, C_1)$ wenigstens ein volles Bahnsegment enthalten ist, und zweitens daß zu jedem der Bögen $A_{0_h} B_{0_h}$ und $D_{0_h} E_{0_h}$, der nicht in Fortfall kommt, unendlich viele gegen das entsprechende Ende von b_{0_h} konvergierende $Ab_r(b_{0_h}, C_1)$ gehören.

Um diese Behauptung zu beweisen, setzen wir zunächst voraus, daß der Kreisbogen $A_{0_h} E_{0_h}$ ein freier Bogen ist. Falls dann z. B. zu $A_{0_h} B_{0_h}$ nicht unendlich viele gegen das initiale Bahnende konvergierende $Ab_r(b_{0_h}, C_1)$ gehören, können wir $A_{0_h} B_{0_h}$ die Rolle eines Bogens $P_{0_h} Q_{0_h}$ spielen lassen und in dieser Weise eine Bahnkurve $b_{0_{h+1}}$ konstruieren, für welche $A_{0_{h+1}} B_{0_{h+1}}$ in Fortfall kommt. Wir dürfen also voraussetzen, daß sowohl zu $A_{0_h} B_{0_h}$ wie zu $D_{0_h} E_{0_h}$ unendlich viele gegen das entsprechende Ende von b_{0_h} konvergierende $Ab_r(b_{0_h}, C_1)$ gehören, und bezeichnen mit $D_{0_h} K_{0_h}$ einen *kleinsten* Teilbogen von $D_{0_h} E_{0_h}$ mit der Eigenschaft, daß ihm ein in b_{0_h} enthaltener Bahnbogen $D_{0_h} K_{0_h}$ entspricht. Indem wir jeden zu diesem Bahnbogen gehörigen $Ab_r(b_{0_h}, C_1)$ durch den entsprechenden Schließungsbogen ersetzen, konstruieren wir eine Bahnkurve $b_{0_{h+1}}$, die einen nicht in das Innere von C_1 eindringenden, entweder den Punkt D_{0_h} oder den Punkt K_{0_h} enthaltenden Bahnbogen $m_{0_{h+1}}$ aufweist, mithin auf Grund von Satz 6 entweder nur initiale oder nur finale rechte Ausbiegungsbogen in bezug auf C_1 besitzt. Konvergieren diese Ausbiegungsbogen gegen das entsprechende Ende, so besitzt die Bahnkurve $b_{0_{h+1}}$ die geforderten Eigenschaften. Im entgegengesetzten Falle können wir aus ihr in der oben angegebenen Weise eine weitere Bahnkurve, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, herleiten.

Wir setzen jetzt voraus, daß der Kreisbogen $A_{0k}E_{0k}$ nicht ein freier Bogen ist. Falls dann z. B. zu $A_{0k}B_{0k}$ nicht unendlich viele gegen das initiale Bahnende konvergierende $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ gehören, können wir wieder $A_{0k}B_{0k}$ die Rolle eines Bogens $P_{0k}Q_{0k}$ spielen lassen, und in dieser Weise eine Bahnkurve $b_{0,k+1}$ konstruieren, für welche entweder $A_{0,k+1}B_{0,k+1}$ in Fortfall kommt, oder sowohl $A_{0,k+1}B_{0,k+1}$ wie $D_{0,k+1}E_{0,k+1}$ in $D_{0k}E_{0k}$ enthalten sind, mithin $A_{0,k+1}E_{0,k+1}$ ein freier Bogen ist, welchen Fall wir schon erledigt haben. Wir dürfen also voraussetzen, daß sowohl zu $A_{0k}B_{0k}$ wie zu $D_{0k}E_{0k}$ unendlich viele gegen das entsprechende Ende von b_{0k} konvergierende $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ gehören, definieren in derselben Weise wie oben den Bogen $D_{0k}K_{0k}$ und die Bahnkurve $b_{0,k+1}$ mit dem Bahnbogen $m_{0,k+1}$ und bezeichnen mit $f_{0,k+1}$ bez. $i_{0,k+1}$ den auf $m_{0,k+1}$ folgenden bez. den $m_{0,k+1}$ vorangehenden Teil von $b_{0,k+1}$. Wenn es nun rechte Ausbiegungsbogen von $f_{0,k+1}$ in bezug auf $A_{0k}B_{0k}$ gäbe, so müßten auch rechte Ausbiegungsbogen von $i_{0,k+1}$ in bezug auf $A_{0k}B_{0k}$ existieren, und wir hätten eine einfache geschlossene Kurve, welche sich aus einem (in $A_{0k}B_{0k}$ liegenden) freien Bogen und einem (in $b_{0,k+1}$ liegenden) Bahnbogen zusammensetzte, was wider Satz 6 verstoßen würde. Ebenso wenig können rechte Ausbiegungsbogen von $i_{0,k+1}$ in bezug auf $K_{0k}E_{0k}$ existieren. Besitzt nun sowohl $i_{0,k+1}$ wie $f_{0,k+1}$ gegen das entsprechende Ende konvergierende $Ab_r(b_{0,k+1}, C_1)$, so besitzt die Bahnkurve $b_{0,k+1}$ die geforderten Eigenschaften. Im entgegengesetzten Falle können wir aus ihr in der oben angegebenen Weise eine weitere Bahnkurve, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, herleiten.

Wir dürfen mithin annehmen, daß zu jedem der Bogen $A_{0k}B_{0k}$ und $D_{0k}E_{0k}$, der nicht in Fortfall kommt, unendlich viele gegen das entsprechende Ende von b_{0k} konvergierende $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ gehören, und daß zwischen den $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ und den $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ wenigstens ein volles Bahnsegment enthalten ist. Hieraus folgern wir mit Rücksicht auf Satz 6, daß die $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ bez. die $Ab_r(b_{0k}, C_1)$ den Bogen $D_{0k}E_{0k}$ bez. $A_{0k}B_{0k}$ nicht treffen können, m. a. W., daß der Bogen $A_{0k}B_{0k}$ und der auf B_{0k} folgende Teil von b_{0k} bez. der Bogen $D_{0k}E_{0k}$ und der D_{0k} vorangehende Teil von b_{0k} einander nicht treffen können.

Wir bezeichnen mit $D'_{0k}E'_{0k}$ das Bild des Bogens $D_{0k}E_{0k}$, und mit $\mathcal{N}_{0k}$ das Gebiet, welches gebildet wird von denjenigen Punkten des rechten Gebietes von b_{0k} , die ohne Kreuzung von b_{0k} oder $D_{0k}E_{0k}$ aus dem Unendlichen erreicht werden können. Zur Grenze von $\mathcal{N}_{0k}$ gehört ein gewisser Teil $\mathcal{N}_{0k}$ des finalen Endes von b_{0k} . Diese Punktmenge $\mathcal{N}_{0k}$ bestimmt zusammen mit $D_{0k}E_{0k}$ und dem D_{0k} vorangehenden Teile von b_{0k} ein Gebiet $\mathcal{G}_{0k}$, welches $\mathcal{N}_{0k}$ als Teil enthält.

Wir bezeichnen weiter mit $A'_{0k}B'_{0k}$ das inverse Bild des Bogens

$A_{0h}B_{0h}$, und mit $\mathcal{P}_{0h}$ das Gebiet, welches gebildet wird von denjenigen Punkten des rechten Gebietes von b_{0h} , die ohne Kreuzung von b_{0h} oder $A_{0h}B_{0h}$ aus dem Unendlichen erreicht werden können. Zur Grenze von $\mathcal{P}_{0h}$ gehört ein gewisser Teil τ_{0h} des initialen Endes von b_{0h} . Diese Punktmenge τ_{0h} bestimmt zusammen mit $A_{0h}B_{0h}$ und dem auf B_{0h} folgenden Teile von b_{0h} ein Gebiet $\mathcal{G}_{0h}$, welches $\mathcal{P}_{0h}$ als Teil enthält.

Wir setzen nun einen Augenblick voraus, daß $D'_{0h}E'_{0h}$ innerhalb des Gebietes $\mathcal{G}_{0h}$ liegt, bezeichnen das Bild von $D'_{0h}E'_{0h}$ mit $D''_{0h}E''_{0h}$, das Bild von $D''_{0h}E''_{0h}$ mit $D'''_{0h}E'''_{0h}$, usw., das Bild von $\mathcal{P}_{0h}$ mit $\mathcal{P}'_{0h}$, das Bild von $\mathcal{P}'_{0h}$ mit $\mathcal{P}''_{0h}$, usw., die Menge der allen $\mathcal{P}^{(n)}_{0h}$ gemeinsamen Punkte mit $\mathcal{P}^{(w)}_{0h}$, den

Fig. 8.

kleinsten Teilbogen von $D_{0h}E_{0h}$, welcher alle zu $\mathcal{P}'_{0h}$ gehörigen $\mathcal{S}b_r(C_1, b_{0h})$ enthält, mit $D_{0h}H_{0h}$, das Bild von $D_{0h}H_{0h}$ mit $D'_{0h}H'_{0h}$, das Bild von $D'_{0h}H'_{0h}$ mit $D''_{0h}H''_{0h}$, usw. Alsdann ist das Gebiet derjenigen zum rechten Gebiete von b_{0h} gehörigen Punkte, welche sich innerhalb dieses Gebietes von dem D_{0h} vorangehenden Bahnsegmente aus ohne Kreuzung von $D_{0h}H_{0h}$, $D'_{0h}H'_{0h}$, $D''_{0h}H''_{0h}$, usw. erreichen lassen, identisch mit $\mathcal{P}^{(w)}_{0h}$. Wenn wir also $D_{0h}H_{0h}$ die Rolle eines Bogens $P_{0h}Q_{0h}$ spielen lassen, wird eine Bahnkurve $b_{0,h+1}$ erzeugt, deren rechtes Gebiet in $\mathcal{P}^{(w)}_{0h}$ enthalten ist, sodaß keine

$Ab_r(b_{0,h+1}, D_{0h}E_{0h})$ existieren. Ebenso wenig kann aber nach Satz 6 der auf H_{0h} folgende Teil von $b_{0,h+1}$ rechte Ausbiegungsbogen in bezug auf $A_{0h}B_{0h}$ besitzen, sodaß $D_{0,h+1}E_{0,h+1}$ in Fortfall kommt.

Wir dürfen mithin annehmen, daß zu jedem der Bogen $A_{0h}B_{0h}$ und $D_{0h}E_{0h}$, der nicht in Fortfall kommt, unendlich viele gegen das entsprechende Ende von b_{0h} konvergierende $Ab_r(b_{0h}, C_1)$ gehören, daß der Bogen $A'_{0h}B'_{0h}$ bez. $D'_{0h}E'_{0h}$, falls er existiert, außerhalb $\mathcal{G}_{0h}$ bez. $\mathcal{G}_{0h}$ liegt, und daß zwischen den $Ab_r(b_{0h}, C_1)$ und den $\mathcal{A}b_r(b_{0h}, C_1)$, falls beide existieren, wenigstens ein volles Bahnsegment von b_{0h} enthalten ist.

Wir bezeichnen im weiteren b_{0h} mit b_1 , und schlagen um P_0 als Mittelpunkt einen Kreis C_2 , der C_1 und einen gewissen Bahnbogen von b_1 in seinem Inneren enthält. In derselben Weise, wie aus b_0 und C_1 die Bahnkurve b_1 hergeleitet ist, gelangen wir von b_1 und C_2 aus zu einer Bahnkurve b_2 mit der Eigenschaft, daß zu jedem der die $\mathcal{S}b_r(C_2, b_2)$ enthaltenden freien Bogen A_2B_2 und D_2E_2 , der nicht in Fortfall kommt, unendlich viele gegen das entsprechende Ende von b_{0h} konvergierende $Ab_r(b_2, C_2)$

gehören, daß der Bogen $A_2'B_2$ bez. $D_2'E_2'$, falls er existiert, außerhalb g_2 bez. f_2 liegt, und daß zwischen den $Ab_r(b_2, C_2)$ und den $fSb_r(b_2, C_2)$, falls beide existieren, wenigstens ein volles Bahnsegment von b_2 enthalten ist. Die Kurven b_1 und b_2 können einander nicht treffen.

Wir werden nun zeigen, daß die $Ab_r(b_2, C_2)$ zwar die $fSb_r(C_1, b_1)$, nicht aber die $fSb_r(C_1, b_1)$ treffen können.

Im entgegengesetzten Falle würden nämlich die Bilder beliebiger Ordnung eines Schnittpunktes von b_2 mit einem $fSb_r(C_1, b_1)$ außerhalb des Gebietes f_1 liegen, mithin würden auch die $Ab_r(b_2, C_2)$ die $fSb_r(C_1, b_1)$ treffen. Alsdann würde aber, weil die $Ab_r(b_2, C_2)$ und die $fAb_r(b_2, C_2)$ auf b_2 durch wenigstens ein volles Bahnsegment getrennt werden, eine einfache geschlossene Kurve existieren, welche sich aus einem (in D_1E_1 liegenden) freien Bogen und einem (in b_2 liegenden) Bahnbogen zusammensetzte, was wider Satz 6 verstoßen würde.

Wir schlagen weiter um P_0 als Mittelpunkt einen Kreis C_3 , der C_2 und einen gewissen Bahnbogen von b_2 in seinem Inneren enthält, gelangen in derselben Weise, wie aus b_0 und C_1 die Bahnkurve b_1 hergeleitet ist, von b_2 und C_3 aus zu einer Bahnkurve b_3 und fahren in dieser Weise fort. Den Radius des Kreises C_n lassen wir dabei mit n unbegrenzt wachsen. Für $q < p$ kann dann ein $Ab_r(b_p, C_p)$ zwar einen $fSb_r(C_q, b_q)$, nicht aber einen $fSb_r(C_q, b_q)$ treffen.

Im weiteren unterscheiden wir drei Fälle, von denen wir den kompliziertesten zunächst behandeln.

Erster Fall. *Es gibt einen Kreis um P_0 , in den für jedes n die $fAb_r(b_n, C_n)$ eindringen; es gibt aber keinen Kreis um P_0 , in den für jedes n die $Ab_r(b_n, C_n)$ eindringen.* Dann existiert eine gewisse positive ganze Zahl m , von welcher an zu jeder positiven ganzen Zahl n eine solche positive ganze Zahl α_n bestimmt werden kann, daß $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ und $\alpha_n < n$, daß α_n mit n unbegrenzt wächst, daß sowohl die $fAb_r(b_n, C_n)$ wie die $fAb_r(b_{n+1}, C_{n+1})$ in C_{α_n} eindringen, und daß weder die $Ab_r(b_n, C_n)$, noch die $Ab_r(b_{n+1}, C_{n+1})$ in C_{α_n} eindringen.

Sei V_n der erste Schnittpunkt der $fAb_r(b_n, C_n)$ mit C_{α_n} , und W_{n+1} der erste Schnittpunkt der $fAb_r(b_{n+1}, C_{n+1})$ mit C_{α_n} . Wir betrachten das Gebiet f_n , das gebildet wird von denjenigen zwischen b_n und b_{n+1} liegenden Punkten, welche aus dem Punkte V_n unmittelbar vorangehenden Bahnsegmente von b_n ohne Kreuzung von C_{α_n} erreichbar sind, und den zur Grenze von f_n gehörigen, V_n und W_{n+1} verbindenden einfachen Kurvenbogen τ_n . Solche Teilbogen von τ_n , welche dem Kreise C_{α_n} angehören, nennen wir *Teilbogen erster Art*, solche, welche der Bahnkurve b_n angehören, *Teilbogen zweiter Art*, solche, welche der Bahnkurve b_{n+1} angehören, *Teilbogen dritter Art*. Bilder von Teilbogen erster Art

haben weder mit dem Gebiete F_n , noch mit seiner Grenze einen Punkt gemeinschaftlich. Wenn wir den Kurvenbogen τ_n in der Richtung von V_n

Fig. 9.

nach W_{n+1} beschreiben, so gehen die Teilbogen zweiter Art denjenigen dritter Art voran, besitzen die Teilbogen zweiter Art dieselbe Reihenfolge wie in der Bahnkurve b_n , die Teilbogen dritter Art dagegen die entgegengesetzte Reihenfolge wie in der Bahnkurve b_{n+1} .

Wir bestimmen in τ_n eine endliche Menge $e_1, e_2, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_{q+p}$ von in der angegebenen Reihenfolge aufeinanderfolgenden Teilbogen erster Art, welche in τ_n voneinander und von den Endpunkten getrennt werden durch die Zwischenbogen $z_1, z_2, \dots, z_q, z_{q+1}, \dots, z_{q+p+1}$, in solcher Weise, daß die Bogen $z_1, z_2, \dots, z_q$ keinen Teilbogen dritter Art, und die Bogen $z_{q+1}, \dots, z_{q+p+1}$ keinen Teilbogen zweiter Art enthalten, daß für $h \leq q$ das Bild von z_h mit keinem der Bogen $z_1, \dots, z_h$ einen gemeinschaftlichen Punkt besitzt, und daß für $h \geq q+1$ das Bild von z_h mit keinem der Bogen $z_h, z_{h+1}, \dots, z_{q+p+1}$ einen gemeinschaftlichen Punkt besitzt.

Sodann verbinden wir innerhalb F_n den Punkt V_n und den Bogen e_1 durch einen einfachen Kurvenbogen q_1 , den Punkt W_{n+1} und den Bogen e_{q+p} durch einen einfachen Kurvenbogen q_{q+p+1} , die Bogen e_1 und e_2 durch einen einfachen Kurvenbogen q_2 , die Bogen e_{q+p} und e_{q+p-1} durch einen einfachen Kurvenbogen $q_{q+p}, \dots$, die Bogen e_{q-1} und e_q durch einen einfachen Kurvenbogen q_q , und die Bogen e_{q+1} und e_q durch einen einfachen Kurvenbogen q_{q+1} in solcher Weise, daß die verschiedenen q_h einander nicht treffen und daß von dem V_n unmittelbar vorangehenden Bahnsegmente von b_n aus die Bilder der q_h nicht innerhalb F_n ohne Kreuzung der q_h erreichbar sind. (In Fig. 9 sind die drei daselbst auftretenden Bogen q_h gestrichelt gezeichnet.)

Die ϱ_k bilden zusammen mit den sie der Reihe nach verbindenden Teilbogen der e_k einen sein Bild nicht treffenden, V_n und W_{n+1} verbindenden einfachen Kurvenbogen k_n , der zwischen b_n und b_{n+1} verläuft, und nicht in das Innere von C_{α_n} eindringt.

Nun dringt aber auch der W_{n+1} und V_{n+1} verbindende Teilbogen l_{n+1} von b_{n+1} (der sich übrigens auch auf einen einzigen Punkt reduzieren kann) nicht in das Innere von C_{α_n} ein. Wir können mithin einen sein Bild nicht treffenden, V_n und V_{n+1} verbindenden einfachen Kurvenbogen κ_n konstruieren, der zwischen b_n und b_{n+1} in beliebiger Nähe von k_n und l_{n+1} verläuft und nicht in das Innere von C_{α_n} eindringt.

Wenn wir n der Reihe nach alle ganzen positiven Werte $\geq m$ annehmen lassen, so bildet die Gesamtheit der entsprechenden κ_n eine einfache offene Halblinie λ_r , welche ihr Bild nicht trifft, in V_m ihren Anfangspunkt hat und ganz im rechten Gebiete von b_m verläuft.

Zwischen b_0 und b_m liegt nach dem obigen Konstruktionsverfahren eine endliche Reihe von einander nicht kreuzenden Bahnkurven mit der Eigenschaft, daß ein auf einer dieser Bahnkurven b_i willkürlich angenommener Punkt, der nicht zugleich der folgenden Bahnkurve b_i angehört, sich mit b_i durch einen sein Bild nicht treffenden und ganz zwischen b_i und b_i verlaufenden einfachen Kurvenbogen verbinden läßt.

Mithin können wir, wenn wir mit M_0 den Anfangspunkt eines P_0 enthaltenden Bahnsegmentes von b_0 bezeichnen, einen sein Bild nicht treffenden einfachen Kurvenbogen k_{0m} konstruieren, der M_0 mit einem Punkte S_m von b_m verbindet und gänzlich zwischen b_0 und b_m verläuft. Mittels k_{0m} und des zwischen S_m und V_m enthaltenen Teilbogens l_m von b_m können wir dann weiter, weil die Kurven b_0 und b_m einander nicht treffen, einen sein Bild nicht treffenden, M_0 und V_m verbindenden einfachen Kurvenbogen κ_{0m} herstellen, der in beliebiger Nähe von k_{0m} und l_m und gänzlich zwischen b_0 und b_m verläuft. Dieser Kurvenbogen κ_{0m} bildet zusammen mit λ_r eine einfache offene Halblinie η_r , welche ihr Bild nicht trifft, in M_0 ihren Anfangspunkt hat und ganz im rechten Gebiete von b_0 verläuft.

Zweiter Fall. *Es gibt einen Kreis um P_0 , in den für jedes n sowohl die $\mathcal{A}b_r(b_n, C_n)$ wie die $\mathcal{A}b_r(b_n, C_n)$ eindringen.* Dann existiert eine gewisse positive ganze Zahl m , von welcher an zu jeder positiven ganzen Zahl n eine solche positive ganze Zahl α_n bestimmt werden kann, daß $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ und $\alpha_n < n$, daß α_n mit n unbegrenzt wächst, und daß sowohl die $\mathcal{A}b_r(b_n, C_n)$ und die $\mathcal{A}b_r(b_{n+1}, C_{n+1})$, wie die $\mathcal{A}b_r(b_n, C_n)$ und die $\mathcal{A}b_r(b_{n+1}, C_{n+1})$ in C_{α_n} eindringen. Die $\mathcal{A}b_r(b_{n+1}, C_{\alpha_n})$ können dann aber die $\mathcal{S}b_r(C_{\alpha_n}, b_n)$ nicht treffen, und die $\mathcal{A}b_r(b_{n+1}, C_{\alpha_n})$ können die $\mathcal{S}b_r(C_{\alpha_n}, b_n)$ nicht treffen.

Mithin können die Punkte V_n und W_{n+1} genau wie im ersten Falle definiert und die Kurven λ_r , κ_{0m} und η_r genau wie im ersten Falle konstruiert werden.

Dritter Fall. *Es gibt keinen Kreis um P_0 , in den für jedes n die Bahnkurve b_n eindringt*, d. h. für unbegrenzt wachsendes n konvergiert sowohl die Bahnkurve b_n , wie ihr rechtes Gebiet gleichmäßig gegen das Unendliche.

Nach dem obigen Konstruktionsverfahren liegt dann rechts von b_0 ein Ordnungstypus ω von einander nicht kreuzenden, gleichmäßig gegen das Unendliche konvergierenden Bahnkurven, mit der Eigenschaft, daß ein auf einer dieser Bahnkurven b_i willkürlich angenommener Punkt, der nicht zugleich der folgenden Bahnkurve b_i angehört, sich mit b_i durch einen sein Bild nicht treffenden und ganz zwischen b_i und b_i verlaufenden einfachen Kurvenbogen verbinden läßt.

Mithin können wir, wenn wir wieder mit M_0 den Anfangspunkt eines P_0 enthaltenden Bahnsegmentes von b_0 bezeichnen, eine ihr Bild nicht treffende einfache offene Halblinie η_r konstruieren, welche in M_0 ihren Anfangspunkt hat und ganz im rechten Gebiete von b_0 verläuft.

Diese Halblinie η_r existiert mithin für jeden der drei Fälle, welche wir unterschieden haben.

In derselben Weise können wir eine ihr Bild nicht treffende einfache offene Halblinie η_l herstellen, welche in M_0 ihren Anfangspunkt hat und ganz im linken Gebiete von b_0 verläuft.

Die Halblinien η_r und η_l bilden dann zusammen eine einfache offene Linie η , welche zusammen mit ihrem Bilde η' ein Translationsfeld begrenzt. Dieses Translationsfeld enthält das im M_0 anfangende Bahnsegment von b_0 , also den Punkt P_0 , womit der Translationssatz bewiesen ist.