Ueber den Einfluss der Parallaxe, der Aberration und der Eigenbewegung auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Fixsterne.

Von Dr. L. de Ball.

Die in den Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Parallaxe eines Fixsterns aus heliometrischen Distanz- und Positionswinkelmessungen vorkommenden Coefficienten der Parallaxe, sowie die durch die Aberration verursachte Aenderung der Distanz zweier Fixsterne lassen sich, ausser durch die bekannten Bessel'schen Formeln, noch mit Hülfe anderer ermitteln, welche nicht nur die Möglichkeit einer theilweise unabhängigen Rechnung bieten, sondern auch mit etwas weniger Mühe zum Ziele führen. Im Folgenden erlaube ich mir diese Gleichungen abzuleiten, und füge der Vollständigkeit halber noch diejenigen hinzu, welche den Einfluss der Aberration auf den Positionswinkel und den Einfluss der Eigenbewegung auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne angeben.

1. Parallaxe. Ist s der heliocentrische, s' der geocentrische Ort eines Sterns an der Sphäre, π seine Parallaxe,

$$\begin{aligned} \Delta' - \Delta &= -ss' \cos \sigma ss' = R\pi \sin st \cos (Est - II) \\ \Delta (p' - p) &= ss' \sin \sigma ss' = R\pi \sin st \sin (Est - II). \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Länge und Breite von s mit λ und β , so giebt das sphärische Dreieck Est :

$$\sin st \cos Est = \sin \beta \cos (\odot - \lambda) \quad \sin st \sin Est = -\sin (\odot - \lambda).$$

Folglich wird:

$$\begin{aligned} \Delta' - \Delta &= R\pi [\cos II \sin \beta \cos (\odot - \lambda) - \sin II \sin (\odot - \lambda)] \\ \Delta (p' - p) &= -R\pi [\sin II \sin \beta \cos (\odot - \lambda) + \cos II \sin (\odot - \lambda)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Bezeichnet man den Winkel EsP mit α , so ist:

$$II = \alpha + p. \quad (2)$$

Die Berechnung des Winkels α und von $\sin \beta$ ist schon für die Vorbereitung zu den Beobachtungen nothwendig; sie lässt sich also auch dann nicht umgehen, wenn man statt der Formel (1) die bisher allgemein angewandten benutzt. Es giebt nämlich, wie aus (1) und (2) erhellt, $90^\circ - \alpha$ bez. $270^\circ - \alpha$ den Positionswinkel am Hauptsterne an, in dessen Nähe die Vergleichsterne zu wählen sind, wenn man bei Distanzmessungen möglichst grosse Coefficienten der Parallaxe erhalten will, und $180^\circ - \alpha$ bez. $360^\circ - \alpha$ den entsprechen-

$$\begin{aligned} \sin \mathcal{V}s \sin y &= \sin \lambda \\ \sin \mathcal{V}s \cos y &= -\cos \lambda \sin \beta \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der Parallaxe eines Fixsterns aus Distanz- bez. Positionswinkelmessungen wendet man bekanntlich zwei Vergleichsterne an, welche womöglich gleichweit vom Hauptstern entfernt und im Positionswinkel, gerechnet von dem Declinationskreise des Hauptsterns, um 180° von

und ist t der Punkt, wo der verlängerte Radiusvector R der Erde die Himmelskugel trifft, so gilt die Gleichung:

$$ss' = R\pi \sin st.$$

Es sei E der Pol der Ekliptik, P der Nordpol, V der Frühlings-Tag- und Nachtgleichpunkt, σ der Ort eines Sterns mit verschwindend kleiner Parallaxe. Ferner werde der Winkel $Es\sigma$ mit II , der Winkel $Ps\sigma$ mit p , der Winkel $P's'\sigma$ mit p' , der Bogen σs mit Δ , der Bogen $\sigma s'$ mit Δ' bezeichnet. Ist $\sigma n = \sigma s'$, so kann $s'n = (p' - p) \Delta$ gesetzt werden, und man erhält aus dem kleinen Dreieck $ss'n$:

den, für Positionswinkelmessungen in Frage kommenden Positionswinkel. $\sin \beta$ ist bekanntlich das Verhältniss der kleinen Axe der parallaktischen Ellipse zur grossen und bildet also ein Maass dafür, wie weit man die Vergleichsterne von dem vortheilhaftesten Positionskreise noch entfernt wählen kann, ohne für die Coefficienten der Parallaxe zu kleine Werthe zu erhalten. Zur Berechnung von λ , β und α , welche ja in verschiedener Weise geführt werden kann, bediene ich mich folgender Formeln, worin y den Winkel $\mathcal{V}sE$ bedeutet:

$$\begin{aligned} f \sin F &= \sin \delta & \sin \beta &= f \sin (F - \epsilon) \\ f \cos F &= \cos \delta \sin \alpha & \cos \beta \sin \lambda &= f \cos (F - \epsilon) \\ & & \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sin \mathcal{V}s \sin (y + \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin \mathcal{V}s \cos (y + \alpha) &= -\cos \alpha \sin \delta \end{aligned} \quad (4)$$

einander verschieden sind. Die Werthe von Δ , Δ' , p , p' und II , welche für die Verbindung des Hauptsterns mit den beiden Vergleichsternen gelten, mögen durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden. Es ist dann $II_1 = \alpha + p_1$, $II_2 = \alpha + p_2$. Setzt man jetzt:

$$\left. \begin{aligned} d \sin D &= 2 \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \\ d \cos D &= 2 \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \sin \beta \\ s \sin S &= 2 \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \\ s \cos S &= 2 \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \sin \beta \end{aligned} \right\} (5)$$

so wird der Einfluss der Parallaxe auf die Differenz der Distanzen gleich:

$$(\Delta_2' - \Delta_2) - (\Delta_1' - \Delta_1) = R \pi d \cos (\odot - \lambda - D) \quad (6)$$

und auf die Summe der Distanzen gleich:

$$(\Delta_2' - \Delta_2) + (\Delta_1' - \Delta_1) = R \pi s \cos (\odot - \lambda + S) \quad (7)$$

Setzt man weiter:

$$\left. \begin{aligned} d' \sin D' &= -2 \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \\ d' \cos D' &= 2 \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \sin \beta \\ s' \sin S' &= 2 \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \\ s' \cos S' &= -2 \cos \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \sin \frac{1}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \sin \beta \end{aligned} \right\} (8)$$

so wird der Einfluss der Parallaxe auf die Differenz der Positionswinkel gleich:

$$(\rho_2' - \rho_2) \Delta_2 - (\rho_1' - \rho_1) \Delta_1 = R \pi d' \cos (\odot - \lambda - D') \quad (9)$$

und auf die Summe der Positionswinkel gleich:

$$(\rho_2' - \rho_2) \Delta_2 + (\rho_1' - \rho_1) \Delta_1 = R \pi s' \cos (\odot - \lambda + S') \quad (10)$$

2. Aberration. Es seien s und σ die wahren Oerter zweier Sterne, A der Antiapex; ferner werde der Bogen As mit h_1 , der Bogen $A\sigma$ mit h_2 und die Aberrationsconstante mit k bezeichnet. Verlängert man As um das Stück $ss' = k \sin h_1$ über s hinaus, und $A\sigma$ um das Stück

$$\sigma\sigma' = k \sin h_2$$

über σ hinaus, so sind s' und σ' die mit Aberration behafteten Oerter der beiden Sterne. In dem sphärischen Dreieck $As\sigma$ werde der Winkel bei s mit $180^\circ - u_1$, der Winkel bei σ mit u_2 und die Distanz $s\sigma$ mit Δ bezeichnet; eine analoge Bedeutung sollen $180^\circ - u_1'$, u_2' und Δ' für das Dreieck $As'\sigma'$ haben. Der Neigungswinkel von $s'\sigma'$ gegen $s\sigma$ ist verschwindend klein und kann gleich 0 gesetzt werden. Projicirt man nun $s'\sigma'$ auf $s\sigma$, so ergibt sich:

$$\Delta' - \Delta = k (\sin h_2 \cos u_2 - \sin h_1 \cos u_1) .$$

Ein durch A senkrecht zu dem durch s und σ gehenden grössten Kreise gezogener Bogen schneide diesen Kreis in V , dann ist:

$$\begin{aligned} \sin h_2 \cos u_2 &= \cos AV \sin \sigma V \\ \sin h_1 \cos u_1 &= \cos AV \sin s V, \end{aligned}$$

folglich:

$$\Delta' - \Delta = k \cos AV (\sin \sigma V - \sin s V) .$$

Bedeutet m den Mittelpunkt des Bogens $s\sigma$, und setzt man $2 \sin \frac{1}{2} \Delta = \Delta$, so geht die vorige Formel über in:

$$\Delta' - \Delta = k \Delta \cos AV \cos mV = k \Delta \cos Am .$$

Die Länge von A ist $90^\circ + \odot$. Bezeichnet man die Länge und Breite von m mit λ_m und β_m , so ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck, welches gebildet wird von A, m und dem Pol der Ekliptik:

$$\cos Am = -\cos \beta_m \sin (\odot - \lambda_m) .$$

Folglich wird:

$$\Delta' - \Delta = -k \Delta \cos \beta_m \sin (\odot - \lambda_m) . \quad (11)$$

Bedeutet wieder λ und β die durch die frühere Rechnung bereits bekannte Länge und Breite des auf Parallaxe zu untersuchenden Sterns s , λ'' und β'' die Länge und Breite des Vergleichsterns, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} \beta_m &= \beta + \frac{1}{2} (\beta'' - \beta) \\ \lambda_m &= \lambda + \frac{1}{2} (\lambda'' - \lambda) . \end{aligned} \quad (12)$$

Es ist aber, wenn Π wieder die unter (1) angegebene Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} \beta'' - \beta &= \Delta \cos \Pi \\ (\lambda'' - \lambda) \cos \beta'' &= \Delta \sin \Pi . \end{aligned} \quad (13)$$

Π ist nach (1) bekannt und Δ aus der für die Vorbereitung der Beobachtungen nöthigen Berechnung der Distanz.

Verlängert man den Bogen Am über m hinaus, bis dass er $s'\sigma'$ in m' schneidet, so kann m' als der durch die Aberration geänderte Ort von m und als der Mittelpunkt von $s'\sigma'$ betrachtet werden. Es sei P der Pol, ferner werde der Winkel AmP mit $180^\circ - x$, der Winkel $Am'P$ mit $180^\circ - x'$, der Winkel $Pm\sigma$ mit ρ_m , der Winkel $Pm'\sigma'$ mit ρ_m' bezeichnet. Da der Neigungswinkel von $s'\sigma'$ gegen $s\sigma$ zu vernachlässigen ist, so erhält man $\rho' - \rho = x' - x$. Wird nun Pm mit $90^\circ - \delta_m$, Pm' mit $90^\circ - \delta_m - \Delta\delta$ und der Winkel mPm' mit $\Delta\alpha$ bezeichnet, so ergibt sich:

$$\tan \frac{1}{2} (x' - x) = \frac{\sin (\delta_m + \frac{1}{2} \Delta\delta)}{\cos \frac{1}{2} \Delta\delta} \tan \frac{1}{2} \Delta\alpha ,$$

statt dessen man mit hinreichender Genauigkeit schreiben kann:

$$x' - x = \Delta\alpha \sin \delta_m .$$

Da $mm' = k \sin Am$ ist, so wird:

$$\Delta\alpha = k \sin Am \sin x \sec \delta_m ,$$

somit folgt:

$$p_m' - p_m = x' - x = k \tan \delta_m \sin x \sin Am.$$

Bezeichnet man mit A und D die Rectascension und Declination des Antiapex, mit α_m die Rectascension von m , so ist:

$$\sin x \sin Am = \cos D \sin (\alpha_m - A),$$

folglich erhält man:

$$p_m' - p_m = k \tan \delta_m \cos D \sin (\alpha_m - A), \quad (14)$$

wo A und $\cos D$ berechnet werden aus:

$$\begin{aligned} \cos D \sin A &= \cos \varepsilon \cos \odot \\ \cos D \cos A &= -\sin \odot. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Eigenbewegung. Es seien s, s', s'' die Oerter des auf Parallaxe zu untersuchenden Sterns zu den Zeiten t, t' und $t' + dt$, wobei das Jahr als Einheit der Zeit gedacht ist; σ sei der Ort des Vergleichsterns, dessen Eigenbewegung zunächst gleich Null angenommen wird. Mit Hülfe der für die Epoche und das Aequinoctium zur Zeit t gültigen jährlichen Eigenbewegung in Rectascension und Declination (Astr. Nachr. Nr. 3622) des Hauptsterns ergeben sich die Werthe der Eigenbewegung im grössten Kreise ϱ und der Positionswinkel dieses Kreises $Pss'' = \gamma$.

Es ist dann $s's'' = \varrho dt$. Werden nun die Bogen $s\sigma, s'\sigma, s''\sigma$ mit $\Delta, \Delta', \Delta' + d\Delta$, der Winkel $ss'\sigma$ mit $180^\circ - v'$ und der Winkel $ss''\sigma$ mit $180^\circ - v' - dv$ bezeichnet, so giebt das Dreieck $\sigma s' s''$:

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\varrho \cos v',$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = \varrho \sin v' \frac{dv}{dt}.$$

dv kann dem Winkel $s'\sigma s''$, der mit z bezeichnet werden möge, gleich gesetzt werden, und da

$$z = \frac{s's'' \sin v'}{\Delta'} = \frac{\varrho \sin v' dt}{\Delta'}$$

ist, wird

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{\varrho^2 \sin^2 v'}{\Delta'}.$$

Bedeutet wieder p den Positionswinkel Pss , so ist zur Zeit t :

$$v' = \gamma - p, \quad \Delta' = \Delta.$$

Folglich wird:

$$\Delta' - \Delta = -\varrho (t' - t) \cos (p - \gamma) + \frac{\varrho^2 (t' - t)^2}{2\Delta} \sin^2 (p - \gamma). \quad (16)$$

Bezeichnet man den Positionswinkel Pss' mit p' , Pss'' mit $p' + dp$, so kann man setzen:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\varrho \sin v'}{\Delta'}.$$

Differenziert man, und setzt für $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d\Delta}{dt}$ die früheren Werthe ein, so wird:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{\varrho^2 \sin 2v'}{\Delta'^2}.$$

Es ergibt sich demnach, wenn für v' und Δ' ihre Werthe zur Zeit t substituirt werden:

$$p' - p = \frac{\varrho (t' - t)}{\Delta} \sin (p - \gamma) + \frac{\varrho^2 (t' - t)^2}{2\Delta^2} \sin 2(p - \gamma). \quad (17)$$

Hat der Vergleichstern eine kleine Eigenbewegung von r Secunden in einem grössten Kreise, dessen Positionswinkel mit g bezeichnet werden möge, so ist auf der rechten Seite von (16) noch $+r(t' - t) \cos (p - g)$ und auf der rechten

Seite von (17) noch $-\frac{r}{\Delta}(t' - t) \sin (p - g)$ hinzuzufügen, um die vollständige Reduction wegen Eigenbewegung zu erhalten.

Wien-Ottakring, 1901 December.

L. de Ball.

Ueber den Einfluss der Refraction auf die Distanz zweier Sterne.

Von Dr. L. de Ball.

Es seien s und σ die wahren, s' und σ' die scheinbaren Oerter zweier Sterne; Δ bedeute ihre wahre, Δ' ihre scheinbare Distanz. Bezeichnet man mit ζ_1 und ζ_2 die wahren Zenithdistanzen Zs und $Z\sigma$, und mit r_1 und r_2 die Bogen ss' und $\sigma\sigma'$, so ist:

$$r_1 = \alpha_1' \tan \zeta_1, \quad r_2 = \alpha_2' \tan \zeta_2,$$

wo α_1' und α_2' aus der zweiten Bessel'schen Refractionstafel mit dem Argument: wahre Zenithdistanz entnommen werden können.

In dem Dreieck $Zs\sigma$ mögen die Winkel bei s und σ mit γ_1 und $180^\circ - \gamma_2$ bezeichnet werden, dementsprechend soll in dem Dreieck $Zs'\sigma'$ der Winkel bei s' mit γ_1' und der Winkel bei σ' mit $180^\circ - \gamma_2'$ bezeichnet werden. Schreibt man noch γ_m statt $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ und γ_m' statt $\frac{1}{2}(\gamma_1' + \gamma_2')$, so kann man $\gamma_m - \gamma_m'$ als Neigungswinkel von Δ' gegen Δ betrachten. Werden nun durch s' und σ' senkrecht zu Δ Bogen gezogen, so erhält man mit Vernachlässigung von Gliedern, welche für die grössten, mit dem Heliometer mess-