III. Das electrodynamische Gesetz ein Punktgesetz; von W. G. Hankel.

(Aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Ges. der Wiss., vom 23. April 1888; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Es ist bis jetzt das electrodynamische Gesetz als in seinem Wesen gänzlich verschieden von den Gesetzen der Schwere und der ruhenden Electricität aufgefasst worden. Man hat bei der Bestimmung der Einwirkung eines Stromelements auf ein anderes von Anfang an beide Elemente in die Rechnung aufgenommen. Im Folgenden werde ich nun zeigen, dass das electrodynamische Gesetz in gleicher Weise wie das Gesetz der Schwere und der ruhenden Electricität als ein sogenanntes Punktgesetz dargestellt werden kann.

Ein materieller Körper ändert den Zustand des ihn umgebenden physikalischen Raumes oder räumlichen Mittels in der Weise, dass ein zweiter an einen bestimmten Ort gebrachter Körper eine Anziehung zum ersteren, in deren Betrag dann der zweite Körper mit seiner Masse als Factor eingeht, erfährt. Bezeichnet m die Masse des ersten Körpers und r den Abstand des betrachteten Punktes, so wird die Aenderung des Zustandes in diesem Punkte durch m/r^2 ausgedrückt. In gleicher Weise kann man bei der Wirkung des Elementes ds' eines geschlossenen Stromes auf ein anderes Stromelement ds zunächst die Aenderung in dem Zustande des um ds' liegenden Raumes berechnen, und dann erst das Element ds an den betreffenden Ort legen. Ist ds' die Länge des Elementes, i' die Intensität des in ihm fließenden Stromes, r der Abstand des betrachteten Punktes von ds' , und θ' der Winkel, welchen r mit dem Element ds' bildet, so tritt in jenem Punkte eine mit $i' ds' \sin \theta' / r^2$ proportionale Aenderung ein. Wird nun das Element ds , dessen Intensität i ist, und welches mit der durch r und ds' gelegten Ebene einen Winkel ψ bilden möge, in den betreffenden Punkt gebracht, so tritt es mit dem Betrage von $i ds \cos \psi$ als Factor zu dem vorstehenden Ausdrucke hinzu. Es bleibt dann nur noch die Richtung zu bestimmen, nach welcher

der Antrieb zur Bewegung des Elementes ds erfolgt. Ich werde im Speciellen die physikalischen Vorgänge bei dieser Einwirkung nachweisen und aus denselben die Richtung der auftretenden Kraft herleiten.

Um eine klare Einsicht in die electrodynamischen Vorgänge zu erleichtern, halte ich es für zweckmässig, von der gewöhnlichen Form des Ampère'schen Gesetzes auszugehen.

§ 1. Geleitet von dem Bestreben, dem für die Wirkung in die Ferne aufgestellten Grundsatz, dass Wirkung und Gegenwirkung stets einander gleich und nur entgegengesetzt gerichtet sein sollen, zu genügen, gelangt Ampère¹⁾ in Betreff der Wirkung zweier Stromelemente ds und ds' mit den Stromintensitäten i und i' zu dem bekannten Gesetze:

$$-\frac{ii' ds ds'}{r^2} (\cos \varepsilon - \frac{1}{2} \cos \Theta \cos \Theta'),$$

worin r den Abstand der beiden Elemente, ε den Winkel zwischen den Richtungen von ds und ds' , Θ den Winkel zwischen r und ds und schliesslich Θ' den Winkel zwischen r und ds' bedeutet. Die Wirkung erfolgt in der Richtung der Verbindungslinie r , d. h. von ds' nach ds .

Als Ampère nach diesem Gesetze die Componenten der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element berechnete²⁾ erschienen in den Integralen zwei Glieder, von denen bei Ausdehnung der Integration über den geschlossenen Stromlauf das eine wegfiel und also nur das andere übrig blieb.

§ 2. Im weiteren Verlaufe seiner Abhandlung kommt Ampère nochmals auf dieses Integral zurück³⁾ und berechnet aus dem nicht wegfallenden Theile die Wirkung zweier Elemente. Er findet für dieselbe den Werth

$$-\frac{ii' ds ds' \sin \Theta' \cos \psi}{2r^2},$$

1) Ampère, *Théorie des phénomènes électrodynamiques*. Paris 1826.

2) Ampère, l. c. p. 41 f.

3) Ampère, l. c. p. 135.

wo ψ den Winkel bedeutet, welchen das Element ds mit der durch r und das Element ds' gelegten Ebene bildet.

Auf kürzerem Wege erhält man dieses Gesetz, wenn man von dem durch Ampère¹⁾ aufgestellten Ausdruck

$$\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} ds ds'$$

ausgeht.

Es wird die Herleitung wesentlich erleichtern, wenn ich zuvor die im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen, soweit sie nicht schon zuvor erläutert sind, und eine Reihe von auftretenden Ausdrücken zusammenstelle.

Es seien x, y, z die Coordinaten des Elementes ds ,

x', y', z' die Coordinaten des Elementes ds' ,

also: $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$,

a, b, c die Winkel, welche r mit den drei Coordinatenaxen,

α, β, γ die Winkel, die das Element ds mit denselben Axen und

α', β', γ' die Winkel, welche das Element ds' mit ihnen bildet.

Ferner wird:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \Theta, \quad \frac{dr}{ds'} = -\cos \Theta',$$

$$\frac{dr}{dx} = \cos a, \quad \frac{dr}{dy} = \cos b, \quad \frac{dr}{dz} = \cos c,$$

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} = - \left(\frac{dx dx'}{ds ds'} + \frac{dy dy'}{ds ds'} + \frac{dz dz'}{ds ds'} \right) = -\cos \varepsilon,$$

$$r \frac{d^2 r}{dx ds'} + \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dr}{ds'} = -\frac{dx'}{ds'} = -\cos \alpha', \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \Theta,$$

$$\frac{d\sqrt{r}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos a, \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} &= \frac{1}{2r\sqrt{r}} \left(r \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= \frac{1}{2r\sqrt{r}} \left\{ -\cos \varepsilon + \frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \right\}, \end{aligned}$$

1) Ampère, l. c. p. 130.

und
$$\frac{d^2 \sqrt{r}}{dx ds'} = \frac{1}{2r\sqrt{r}} \left(r \frac{d^2 r}{dx ds'} - \frac{1}{2} \frac{dr}{dx} \frac{dr}{ds'} \right)$$

$$= \frac{1}{2r\sqrt{r}} \{ -\cos \alpha' + \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \Theta' \}.$$

Da die durch das Gesetz $(2ii'/\sqrt{r}) \cdot (d^2 \sqrt{r}/ds ds') ds ds'$ ausgedrückte Kraft in der Richtung von r liegt, so erhält man die Componenten nach den Coordinatenachsen durch Multiplication mit $\cos \alpha$, $\cos b$ und $\cos c$. Es wird also

$$X = \frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} ds ds' \cos \alpha$$

oder
$$X = 4i ds i' ds' \frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'}.$$

Man hat aber identisch

$$\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} = \frac{d}{ds'} \left(\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{ds} \right) - \frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{dx ds'}.$$

Addirt man auf beiden Seiten nochmals den Ausdruck:

$$\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'}, \text{ so wird:}$$

$$2 \frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} = \frac{d}{ds'} \left(\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{ds} \right) + \frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} - \frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{dx ds'}.$$

Hiernach erhält man

$$X = 2ii' ds ds' \left[\frac{d}{ds'} \left(\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{ds} \right) + \frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} - \frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{dx ds'} \right].$$

Wird über den geschlossenen Kreis, zu welchem das Element ds' gehört, integrirt, so fällt der erste Ausdruck weg, und es bleibt dann nur

$$X = 2ii' ds ds' \left(\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} - \frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{dx ds'} \right),$$

oder nach Einsetzung der oben angegebenen Werthe:

$$X = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \alpha (-\cos \varepsilon + \frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta') - \\ - \cos \Theta (-\cos \alpha' + \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \Theta') \},$$

$$X = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ -\cos \varepsilon \cos \alpha + \cos \Theta \cos \alpha' \}^1).$$

1) Die Componente X geht, wie oben gezeigt, direct über in

$$X = 4i ds i' ds' \frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} \quad \text{oder:}$$

und dementsprechend:

$$Y = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{-\cos \varepsilon \cos b + \cos \Theta \cos \beta'\},$$

$$Z = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{-\cos \varepsilon \cos c + \cos \Theta \cos \gamma'\}.$$

Vereinigen wir die ersten und die zweiten Glieder gesondert zu einer Resultirenden, so erhalten wir zwei Kräfte,

$$X = 4i ds i' ds' \left[\frac{d}{ds'} \left(\frac{d\sqrt{r}}{dx} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{ds} \right) - \frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\sqrt{r}}{dx ds} \right].$$

Bei der Integration über den geschlossenen Umlauf, zu welchem das Element ds' gehört, fällt das erste Glied des letzten Ausdruckes weg, und es bleibt übrig:

$$X' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \cos \alpha + \cos \Theta \cos \alpha' \right), \quad \text{nebst}$$

$$Y' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \cos b + \cos \Theta \cos \beta' \right) \quad \text{und}$$

$$Z' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \cos c + \cos \Theta \cos \gamma' \right),$$

wenn zur Unterscheidung die Componenten mit Accenten versehen werden.

Aus den obigen Gleichungen für X, Y, Z und X', Y', Z' ergeben sich sofort die Potentiale zweier geschlossener Ströme. Da nämlich $d(1/r)/dx = -1/r^2 \cdot \cos \alpha$ und $d(1/r)/ds = -1/r^2 \cdot \cos \Theta$, so lassen sich die Gleichungen für die Componenten auch schreiben:

$$X = \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{r} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \alpha' \right),$$

$$Y = \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{r} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \beta' \right),$$

$$Z = \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{r} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \gamma' \right),$$

und ebenso:
$$X' = ii' ds ds' \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} \cos \Theta \cos \Theta' - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \alpha' \right),$$

$$Y' = ii' ds ds' \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} \cos \Theta \cos \Theta' - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \beta' \right),$$

$$Z' = ii' ds ds' \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \cos \Theta \cos \Theta' - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \gamma' \right).$$

von denen die eine proportional $\cos \varepsilon$ in der entgegengesetzten Richtung von r , und die zweite proportional $\cos \Theta$ in der Richtung des Elementes ds' wirkt.¹⁾

Es ist nun

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' & \text{und} \\ \cos \Theta &= \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma. \end{aligned}$$

Die diesen beiden Ausdrücken proportionalen Kräfte sind

Bei der Integration über den geschlossenen Kreis, zu welchem das Element ds gehört, fallen die Glieder $d(1/r)/ds \cdot \cos \alpha'$, $d(1/r)/ds \cdot \cos \beta'$, $d(1/r)/ds \cdot \cos \gamma'$ weg, und es ergibt sich dann, wenn die Vorzeichen entgegengesetzt genommen werden, für den ersten Fall das Potential

$$P = -\frac{1}{2} ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds',$$

und für den zweiten Fall:

$$P' = -\frac{3}{2} ii' \iint \frac{\cos \Theta \cos \Theta'}{r} ds ds'.$$

1) Mein verehrter College, Hr. Prof. C. Neumann, sagt in der Vorrede p. VIII zu seinem Werke über die electrischen Kräfte I. Thl., 1873: „Diese Voraussetzungen führen, weil in ihnen die von Ampère selber gemachten Voraussetzungen mit enthalten sind, nothwendig zum Ampère'schen Gesetz; andererseits aber führen sie auch zu einer bestimmten Form des noch fehlenden Gesetzes, nämlich zu folgendem Ergebniss:

Die resultirende Form des electromotorischen Elementargesetzes. — Die electromotorische Kraft $E dt$, welche ein Stromelement $i' ds'$ in irgend einem Punkte m eines gegebenen Conductors während der Zeit dt hervorbringt, ist zerlegbar in zwei Kräfte:

$$- A^2 ds' \frac{d(ri' \cos \Theta')}{r^2} \quad \text{und} \quad + A^2 ds' i' \frac{dr}{r^2},$$

erstere in der Richtung $r(ds' \rightarrow m)$, letztere gerechnet in der Richtung i' .“

Die Differentiation in diesen Ausdrücken bezieht sich auf die Zeit, von welcher die Lage der Elemente abhängt. Nimmt man i' constant und die Lage von ds' fest, sodass allein das in m befindliche Element ds mit t veränderlich ist, so erhält man für die vorstehenden Ausdrücke die Werthe:

$$- \frac{A^2 ds i' ds' \cos \varepsilon}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{A^2 ds i' ds' \cos \Theta}{r^2}.$$

Setzt man die Constante $A^2 = \frac{1}{2} i$, so sind dies dieselben Ausdrücke, wie sie oben für die *ponderomotorische* Wirkung angegeben wurden, und die durch sie dargestellten Kräfte haben auch dieselbe Richtung wie oben.

zu einer Gesamtsresultirenden zu vereinigen. Beide liegen in der Ebene (r, ds') und bilden miteinander den Winkel $(180^\circ - \Theta')$. Ihre Resultirende liegt daher ebenfalls in der Ebene (r, ds') .

§ 3. Wenn wir die Resultirende aus den drei Componenten X, Y, Z berechnen wollen, so geschieht dies am einfachsten auf folgendem Wege. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man den Anfang der Coordinaten in das Element ds' und die Ebene XY so legen, dass das Element ds' in dieselbe fällt und die Axe X durch die Mitte des Elementes ds geht.

Dann wird $a = 0$, $b = c = 90^\circ$; $\beta' = 90^\circ - \alpha'$. $\gamma' = 90^\circ$. Man erhält also

$$X = -\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \alpha' \cos \beta$$

oder, da r mit der X -Axe zusammenfällt und also $\alpha' = \Theta'$:

$$X = -\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \beta, \quad Y = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \alpha, \quad Z = 0.$$

Hieraus folgt für den Werth der Resultirenden, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \\ &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \sin \gamma. \end{aligned}$$

Es ist aber γ der Winkel zwischen ds und der Z -Axe; bezeichnet ψ den Winkel, welchen ds mit der Ebene XY oder (r, ds') macht, sodass $\psi = 90^\circ - \gamma$, so wird

$$R = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \psi.$$

Da $(X/R) \cos \alpha + (Y/R) \cos \beta = 0$, so steht die Resultirende senkrecht auf dem Element ds , und da sie in der Ebene (r, ds') liegt, auch senkrecht auf der Projection des Elementes ds auf diese Ebene.

§ 4. Auch für eine beliebige Lage der Elemente ds' und ds lässt sich das vorstehende Gesetz in ähnlicher Weise herleiten.

Es ist in diesem Falle

$$\begin{aligned}\cos \varepsilon &= \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma', \\ \cos \Theta &= \cos a \cos a + \cos b \cos b + \cos c \cos c, \\ \cos \Theta' &= \cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma'.\end{aligned}$$

Setzt man nun in die Gleichungen

$$\begin{aligned}X &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{-\cos a \cos \varepsilon + \cos \Theta \cos \alpha'\}, \\ Y &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{-\cos b \cos \varepsilon + \cos \Theta \cos \beta'\}, \\ Z &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{-\cos c \cos \varepsilon + \cos \Theta \cos \gamma'\}\end{aligned}$$

die vorstehenden Werthe ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}X &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{\cos \beta (-\cos a \cos \beta' + \cos b \cos \alpha') + \\ &\quad + \cos \gamma (-\cos a \cos \gamma' + \cos c \cos \alpha')\}, \\ Y &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{\cos \gamma (-\cos b \cos \gamma' + \cos c \cos \beta') + \\ &\quad + \cos \alpha (-\cos b \cos \alpha' + \cos a \cos \beta')\}, \\ Z &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{\cos \alpha (-\cos c \cos \alpha' + \cos a \cos \gamma') + \\ &\quad + \cos \beta (-\cos c \cos \beta' + \cos b \cos \gamma')\}.\end{aligned}$$

Schreibt man hier¹⁾

$$\begin{aligned}\cos c \cos \beta' - \cos b \cos \gamma' &= F \cos \lambda, \\ \cos a \cos \gamma' - \cos c \cos \alpha' &= F \cos \mu, \\ \cos b \cos \alpha' - \cos a \cos \beta' &= F \cos \nu,\end{aligned}$$

so sind λ, μ, ν die Winkel, welche eine auf der Ebene (r, ds') errichtete Normale mit den drei Axen macht. Werden nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ und ebenso mit $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ multiplicirt und addirt, so werden beide Summen $= 0$. Quadrirt man die drei Gleichungen und addirt sie, so findet man den Werth $F^2 = \sin^2 \Theta'$.

Durch Einsetzung der Werthe von $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ und des Werthes $\sin \Theta' = F$ erhält man die drei Componenten:

$$X = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta'}{2 r^2} (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu),$$

1) Vgl. Ampère p. 137.

$$Y = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta'}{2 r^2} (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu),$$

$$Z = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta'}{2 r^2} (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda).$$

Werden diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ und ebenso mit $\cos \lambda$, $\cos \mu$ und $\cos \nu$ multiplicirt und addirt, so sind beide Summen = 0. Die Resultirende steht also senkrecht auf dem Element ds und auf der auf der Ebene (r, ds') errichteten Normale, folglich auch senkrecht auf der Projection von ds auf die genannte Ebene.

Ist ψ der Winkel zwischen ds und der Ebene (r, ds') , so erhält man ebenso wie in § 3 die Resultirende

$$R = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta' \cos \psi}{2 r^2}.$$

§ 5. Anstatt die drei Componenten X , Y , Z zu der Resultirenden zu vereinigen, kann man dieselbe auch durch Zusammensetzung der beiden Kräfte $\cos \varepsilon$ und $\cos \Theta$, welche miteinander den Winkel $(180^\circ - \Theta')$ bilden, erhalten. Es wird dann die Resultirende:

$$R = \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{\cos^2 \varepsilon + \cos^2 \Theta - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \cos \Theta'\}.$$

Es mögen in Fig. 1 die durch O , B , C gelegte Ebene die Ebene (r, ds') ; OD , OE und OF die Richtungen von resp. ds' , r und ds bezeichnen. Errichtet man nun auf der Ebene (r, ds') in O die Normale OA und legt durch OA und ds eine Ebene, so ist dieselbe senkrecht auf (r, ds') , und FG misst die Neigung ψ von ds gegen jene Ebene. Die Bogen DF , ED und EF messen resp. die Winkel ε , Θ' und Θ .

Fig. 1.

Der Quadrant AE steht ebenso wie AG senkrecht auf der Ebene (r, ds') ; der Bogen GE misst also den Winkel, welchen die Projection des Elementes ds auf die Ebene (r, ds') mit der Richtung von r macht.

Aus dem bei G rechtwinkligen Dreiecke FGE erhält man

$$\sin FEG : 1 = \sin \psi : \sin \Theta,$$

also
$$\cos FEG = \frac{\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi}{\sin^2 \Theta}.$$

Aus dem Dreiecke DFE folgt:

$$\cos \varepsilon = \cos \Theta \cos \Theta' - \sin \Theta \sin \Theta' \cos FEG,$$

$$\cos \varepsilon - \cos \Theta \cos \Theta' = -\sin \Theta' \sqrt{\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi},$$

$$\cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \cos \Theta' + \cos^2 \Theta \cos^2 \Theta' = \sin^2 \Theta' (\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi).$$

Es wird also

$$R = \frac{i i' ds ds'}{2 r^2} \sqrt{\{\cos^2 \Theta - \cos^2 \Theta \cos^2 \Theta' + \sin^2 \Theta' (\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi)\}} \\ = \frac{i i' ds ds'}{2 r^2} \sin \Theta' \cos \psi.$$

In Figur 2 sei EE' die Richtung von r , OD die Richtung von ds' , so stellt in dem Parallelogramm $OE'HD$, OE' die Kraft $\cos \varepsilon$ und OD die Kraft $\cos \Theta$, sowie OH die Resultirende dar. Da der Winkel $DOE = \Theta'$, so ist $DOE' = 180^\circ - \Theta'$. Aus dem Dreieck $E'OH$ erhält man

$$OH : E'H = \sin \Theta' : \sin E'OH, \quad \text{oder}$$

$$\frac{i i' ds ds'}{2 r^2} \sin \Theta' \cos \psi : \frac{i i' ds ds'}{2 r^2} \cos \Theta \\ = \sin \Theta' : \sin EOH,$$

folglich
$$\sin EOH = \frac{\cos \Theta}{\cos \psi}.$$

Der Bogen EG in Fig. 1 misst den Winkel zwischen OG [der Projection des Elementes ds auf die Ebene (r, ds')] und $OE[r]$. Für denselben ergibt sich aus dem Dreiecke GFE in Fig. 1 $\cos EOG = \cos \Theta / \cos \psi$, also derselbe Werth wie für $\sin E'OH$. Es ist daher $E'OH = 90^\circ + EOG$, oder $E'OH - EOG = 90^\circ$. Die Resultirende R liegt also, da beide Kräfte $\cos \varepsilon$ und $\cos \Theta$ in der Ebene (r, ds') wirken, ebenfalls in dieser Ebene und steht auf der Projection von ds auf diese Ebene, mithin auch auf ds selbst senkrecht.

Die Seite des Elementes ds , nach welcher die Resulti-

Fig. 2.

rende gerichtet ist, lässt sich, ohne die Componenten zu berechnen, durch folgende Regel finden:

Man denke sich in die beiden Elemente zwei menschliche Figuren so gelegt, dass bei jeder derselben der elektrische Strom am Fusse ein und am Kopfe austritt, und wende beide Figuren so, dass jede derselben mit ihrer rechten Hand nach der anderen hingewandt ist, so wirkt die Resultirende nach der linken Seite der Figur, wenn beide das Gesicht nach derselben Seite gewandt haben, dagegen nach der rechten, wenn die Gesichter beider Figuren nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

§ 6. Betrachten wir zunächst die Wirkung eines geschlossenen Stromlaufes in dem Fig. 3 gezeichneten Kreise. Die Ebene dieses Kreisstromes liege in der XY -Ebene, und der Anfang des Coordinatensystems sei in O . Es liege ferner das Element ds mit seiner Mitte in der Axe X . Dann wird

Fig. 3.

$c = 90^\circ$ und $\gamma' = 90^\circ$. In der Fig. 3 gezeichneten Anordnung sind die Winkel α und α' negativ. Man erhält dann:

$$X = -\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin(\alpha' - \alpha) \cos \beta = +\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \beta,$$

$$Y = +\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin(\alpha' - \alpha) \cos \alpha = -\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \alpha,$$

$$Z = 0.$$

Da bei der Integration nach ds' die Grössen $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ constant sind, so handelt es sich nur um das Integral $Q = \frac{1}{2} i' f'(ds'/r^2) \sin \Theta'$.

Ist der Halbmesser des Kreises ρ und φ der Winkel, welchen der nach ds' gezogene Halbmesser mit der Axe X

macht, so wird, wenn der Abstand OA des Elementes ds vom Mittelpunkte des Kreises $= c$ gesetzt wird:

$$r^2 = c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho \cos \varphi, \quad \text{und} \quad \sin \Theta' = \frac{c \cos \varphi - \varrho}{r},$$

folglich

$$Q = \frac{1}{2} i' \int \frac{(c \cos \varphi - \varrho) \varrho d\varphi}{(c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Für die beiden Elemente ds' , welche in den von A an den Kreis gezogenen Tangenten liegen, wird der Zähler des vorstehenden Bruches $= 0$; in dem zwischen diesen beiden Elementen dem A zunächst liegenden Theile des Kreises ist derselbe positiv, in dem anderen Theile dagegen negativ.

Setzt man $\cos \varphi = \mu$, so wird

$$Q = -\frac{1}{2} i' \varrho \int \frac{(c\mu - \varrho) d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2} \{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\mu\}^{3/2}}.$$

In dieser Form treten in dem Integral noch zwei Unstetigkeiten für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ auf, da für diese Stellen der Werth des Bruches unendlich wird. Es ist die Integration also von $\mu = +1$ bis $\mu = -1$, und dann wieder von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ auszuführen; dabei ist aber für die Integration auf der zweiten Hälfte des Kreises die Wurzel $\sqrt{1 - \mu^2}$, da dieselbe einen Sinus darstellt, welcher beim Uebergange aus dem zweiten in den dritten Quadranten sein Zeichen wechselt, negativ zu nehmen.

Hiernach wird dann

$$X = +ids \cos \beta \cdot Q, \quad Y = -ids \cos \alpha \cdot Q, \quad Z = 0,$$

und die Resultirende

$$R = ids \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \cdot Q = ids \cos \psi \cdot Q.$$

Da in dem vorliegenden Falle die Wirkung aller Elemente ds' in derselben Ebene, senkrecht auf ds , theils nach der einen, theils nach der anderen Seite hin erfolgt, so hätte man auch sofort die Resultirende aus der Wirkung aller Elemente ds' berechnen können. Dieselbe wird

$$R = ids \cos \psi \int \frac{i' ds' \sin \Theta'}{2r^2} = ids \cos \psi \cdot Q,$$

also der zuvor berechnete Werth. Ihre Richtung bestimmt sich nach der früher aufgestellten Regel, wenn man beachtet,

dass die zunächst an ds liegenden Elemente wegen ihrer grösseren Nähe die stärkere Wirkung ausüben.

§ 7. Es ist ein eigenthümlicher Vorgang, dass, während anfangs die Beziehungen der Elemente ds' zu dem Element ds namentlich durch das Eintreten des $\cos \varepsilon$ eng verflochten scheinen, sich im Fortgange der Rechnung diese enge Beziehung wieder löst, und die Elemente ds' und das Element ds mit ihren Eigenschaften einfach als Factoren nebeneinander treten.

Man braucht bei der Berechnung der Wirkung des Kreisstromes auf das Element ds zunächst gar nicht auf das letztere Rücksicht zu nehmen, sondern nur den Ort desselben in Betracht zu ziehen. Man berechnet den Werth des Integrals Q ; dieser gibt für alle Punkte in der Ebene, welche sich im Abstände c (Fig. 3) vom Mittelpunkte des Kreises befinden, die daselbst durch den Strom hervorgebrachte Veränderung an. Legen wir dann das Element ds an den betreffenden Ort, so entwickelt sich aus dem Einflusse jener Veränderung auf den in ihm vorhandenen Strom ein Antrieb zur Bewegung, welcher in der Ebene des Kreises und senkrecht gegen das Element ds auftritt. Die Grösse desselben erhält man, wenn man das Integral Q mit $ids \cos \varphi$ multiplicirt. Nach der früher angegebenen Regel bestimmt sich die Seite, nach welcher die Resultirende hingewandt ist.

§ 8. Es fragt sich nun, welches die physikalischen Veränderungen sind, welche der Kreisstrom in seiner Umgebung hervorbringt, und wie aus dieser Veränderung und den in dem Elemente vorhandenen Strome die zuletzt erwähnte Kraft entspringt.

In den Berichten der math.-phys. Classe der Sächs. Ges. vom Jahre 1865, p. 7 und 1866, p. 219¹⁾ habe ich eine Theorie der electrischen Erscheinungen aufgestellt, in welcher dieselben auf Schwingungen zurückgeführt werden, und gezeigt, wie die verschiedenen Vorgänge der Electrostatik, der Electrodynamik und der Induction sich auf diesem Wege

1) Vgl. auch W. G. Hankel, Pogg. Ann. 126. p. 440, 1865 u. 131. p. 607, 1867.

erklären lassen. Nach dieser Theorie bestehen die electrischen Ströme in kreisförmigen Schwingungen des Aethers, unter Betheiligung der materiellen Molecüle des Drahtes. Die kreisförmigen Schwingungen stehen senkrecht auf der Axe des Drahtes, und der Umschwung erfolgt je nach der Richtung des Stromes in dem einen oder dem anderen Sinne.

Von den Elementen ds' pflanzen sich dann die Schwingungen kugelförmig in den umgebenden Aether fort. Die Tangentialgeschwindigkeit auf den verschiedenen Punkten der Kugeloberfläche hängt ausser von der Stärke des Stromes und der Länge des Radius auch noch von seiner Lage gegen die Axe des Umschwunges ab, sodass dieselbe vom Aequator bis zu den Polen (Enden der Axe) hin mit dem Cosinus der Breite oder dem Sinus der Poldistanz abnimmt.

Bezeichnet i' die als Maass für die Stromstärke dienende Tangentialgeschwindigkeit im Aequator im Abstände 1, so ist die Tangentialgeschwindigkeit im Punkte D (Fig. 4)

$$\frac{i' \sin A B D}{r^2} = \frac{i' \sin \Theta'}{r^2}.$$

Fig. 4.

Wird nun in den Punkt D das Element ds mit der Stromstärke i gelegt, und zwar zunächst so, dass es in die durch ds' und $B D = r$ gelegte Ebene fällt, so haben

auf der einen Seite von ds die von ihm und von ds' ausgehenden Schwingungen dieselbe, auf der anderen aber entgegengesetzte Richtung. Die Geschwindigkeit der das Element ds umgebenden Aethertheilchen wird daher auf der ersten Seite vergrössert, auf der anderen vermindert. Dadurch entsteht, wie ich in der oben angeführten Abhandlung gezeigt habe, eine Kraft, welche in der Ebene (r, ds') liegt, senkrecht auf dem Element ds steht, und nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher durch das Zusammentreffen entgegengesetzter Bewegungen die Geschwindigkeit der Aethertheilchen vermindert ist. Die Grösse dieser Kraft ist

$$= \frac{i ds i' ds'}{r^2} \sin \Theta'.$$

Fällt das Element ds nicht in die Ebene (r, ds') , sondern bildet mit ihr den Winkel ψ , so haben wir die um ds als Axe erfolgenden Schwingungen in zwei zu zerlegen; die Axe des einen bildet die Projection von ds auf die Ebene (r, ds') , die Axe des anderen die auf dieser Ebene errichtete Normale. Die Stärke der um die Projection erfolgenden Schwingungen ist dann $ids \cos \psi$, und durch die Einwirkung des Stromes i' entsteht eine Kraft $ids \cos \psi (i' ds' \sin \Theta') / r^2$, welche in der Ebene (r, ds') liegt, senkrecht auf der Richtung der Projection oder auf dem Element ds steht, und nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher die von ds' und von der Projection ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzte Richtungen haben.

Gegen die um die Normale auf der Ebene (r, ds') erfolgenden Schwingungen verhalten sich die von ds' ausgehenden Schwingungen ringsum gleich, bringen also keine Ungleichheiten in den das Element ds umgebenden Aetherschwingungen hervor, und geben daher auch zum Auftreten einer dieses Element treibenden Kraft keine Veranlassung.

Die von einem Element ds' mit der Stromstärke i' auf ein anderes Element ds mit der Stromstärke i ausgeübte Kraft ist also

$$\frac{ids \cos \psi \cdot i' ds' \sin \Theta'}{r^2}.$$

Da die Kraft stets auf dem Elemente senkrecht steht, so hat die von ds' auf ds ausgeübte Wirkung im Allgemeinen eine andere Richtung, als die von ds auf ds' ausgeübte. Für diese beiden Wirkungen gilt also nicht der Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Dieses Princip selbst aber wird durch die Vorgänge zwischen den electrischen Elementen nicht verletzt. Die Wirkungen der Elemente aufeinander sind keine directen, sondern erst durch die Schwingungen vermittelt; in Betreff der Wirkungen der Aethertheilchen aufeinander behält jenes Princip seine Geltung.

§ 9. Wenden wir uns jetzt wieder zu der oben in § 6 berechneten Einwirkung eines ebenen Kreisstromes auf ein mit seiner Mitte in der Stromebene liegendes Element ds

zurück, so zeigt die Betrachtung der Entwicklung, dass das Integral Q die Resultirende aus den Geschwindigkeiten darstellt, welche von allen Elementen ds' an den Ort von ds übertragen werden. Diese Geschwindigkeiten sind senkrecht gegen die Ebene des Stromes gerichtet; die auf BDE (Fig. 3) gelegenen Theile des Kreises bringen nach dem Orte des Elementes ds die Geschwindigkeiten in der einen, die von dem anderen Theile BFE ausgehenden in entgegengesetzter Richtung. Das Integral Q stellt also die Resultirende aus allen diesen Geschwindigkeiten dar, welche nach der von BDE ausgehenden Drehungsrichtung senkrecht auf der Stromebene steht.

§ 10. Betrachten wir jetzt den allgemeinen in § 4 behandelten Fall der Wirkung eines beliebig gelegenen Elementes ds' auf ein Element ds , so wird sich auch hier zeigen, dass sich die Beziehungen der beiden Elemente so weit lösen, dass sie mit ihren Eigenschaften nur als Factoren zusammen-treten.

Die Gleichungen für die drei Componenten waren:

$$\begin{aligned} X &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \beta (-\cos a \cos \beta' + \cos b \cos \alpha') + \\ &\quad + \cos \gamma (-\cos a \cos \gamma' + \cos c \cos \alpha') \}, \\ Y &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \gamma (-\cos b \cos \gamma' + \cos c \cos \beta') + \\ &\quad + \cos \alpha (-\cos b \cos \alpha' + \cos a \cos \beta') \}, \\ Z &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \alpha (-\cos c \cos \alpha' + \cos a \cos \gamma') + \\ &\quad + \cos \beta (-\cos c \cos \beta' + \cos b \cos \gamma') \}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} Q \cos \lambda &= + \frac{i' ds'}{2r^2} (\cos c \cos \beta' - \cos b \cos \gamma'), \\ Q \cos \mu &= + \frac{i' ds'}{2r^2} (\cos a \cos \gamma' - \cos c \cos \alpha'), \\ Q \cos \nu &= + \frac{i' ds'}{2r^2} (\cos b \cos \alpha' - \cos a \cos \beta'). \end{aligned}$$

Die Werthe sind nur abhängig von ds' und der Lage des Ortes, an welchen später das Element ds hingesezt werden soll. Q bedeutet also eine Resultirende, deren Richtung

durch die Winkel λ, μ, ν bestimmt wird, und deren Grösse sich ergibt $Q = (i' ds' \sin \Theta')/r^2$. Dieser Ausdruck ist die von ds' an den betreffenden Ort übertragene Geschwindigkeit, da Q auf der Ebene (r, ds') senkrecht steht. Die obigen Ausdrücke $Q \cos \lambda, Q \cos \mu, Q \cos \nu$ bedeuten also die Componenten der Geschwindigkeit Q nach den drei Axen

Legen wir nun das Element ds , welches mit den drei Axen die Winkel α, β, γ bildet, an den betreffenden Ort, so erhalten wir die Componenten

$$X = ids Q (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu),$$

$$Y = ids Q (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu),$$

$$Z = ids Q (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda).$$

Hieraus folgt, wenn ψ den Winkel zwischen ds und der Ebene (r, ds') bedeutet, die Resultirende

$$R = ids \cos \psi \cdot Q = \frac{ids \cos \psi \cdot i' ds' \sin \Theta'}{2 r^2}.$$

Diese Resultirende liegt in der Ebene (r, ds') und steht senkrecht auf ds oder seiner Projection auf die Ebene (r, ds') . Dies ist aber genau die Resultirende, welche entsteht, wenn das Element ids an den Ort gelegt wird, wo die resultirende Geschwindigkeit Q war. Es entsteht durch das Zusammentreffen der Schwingungen eine Kraft $ids \cos \psi (i' ds' \sin \Theta')/2 r^2$, welche das Element ds in der auf Q senkrechten Ebene, in der auf ds senkrechten Richtung, nach der Seite hin treibt, wo die von ds' und ds ausgehenden Schwingungen einander entgegengesetzt sind.

§ 11. Genau ebenso lässt sich die Aufgabe behandeln, die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromes auf ein Element ds zu bestimmen. Auch hier lassen sich wieder in den Componenten X, Y, Z die auf ds und auf ds' bezüglichen Grössen trennen.

Setzen wir

$$Q_1 = \frac{1}{2} \int \frac{i' ds'}{r^2} (\cos c \cos \beta' - \cos b \cos \gamma') = Q \cos \lambda,$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \int \frac{i' ds'}{r^2} (\cos a \cos \gamma' - \cos c \cos \alpha') = Q \cos \mu,$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} \int \frac{i' ds'}{r^2} (\cos b \cos \alpha' - \cos a \cos \beta') = Q \cos \nu,$$

so ist Q die Resultirende, welche mit den drei Axen die Winkel λ, μ, ν macht. Dieselbe stellt die Resultirende der von allen Elementen ds' an den Ort von ds übertragenen Geschwindigkeiten dar, und Q_1, Q_2, Q_3 sind die drei Componenten dieser Resultirenden.

Bilden wir nun die Componenten X, Y, Z , so erhalten wir

$$X = ids Q (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu),$$

$$Y = ids Q (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu),$$

$$Z = ids Q (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda).$$

Bezeichnet ψ den Winkel, welchen das Element ds mit einer auf Q senkrechten Ebene P macht, so wird die Resultirende

$$R = ids \cos \psi \cdot Q,$$

und zwar liegt dieselbe in der Ebene P und steht senkrecht auf der Projection von ds auf P und ebenso auf ds selbst.

Dies ist aber genau wieder der Vorgang, wie ihn die Schwingungstheorie fordert. Q ist die Resultirende aus den von sämtlichen Elementen ds' an den Ort des Elementes ds übertragenen Schwingungen. Legen wir nun das Element ids an den betreffenden Ort, so haben wir dasselbe auf eine gegen Q senkrechte Ebene P zu projiciren.¹⁾ In dieser Ebene

1) Die oben mit P bezeichnete Ebene hat schon Grassmann in seiner Abhandlung „Zur Electrodynamik“ (Journal für reine und angewandte Mathematik 83, 1887) bemerkt. Er sagt daselbst p. 63:

„Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so gibt es zu jedem Punkte A eine bestimmte Ebene, die man durch A gehend annehmen und die Wirkungsebene des Stromes in Bezug auf den Punkt A nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes von A ausgehende Stromelement (b) erstens, wenn es auf dieser Ebene senkrecht steht, keine Einwirkung durch den Strom erfährt, zweitens, wenn es schräg darauf steht, dieselbe Wirkung erleidet, wie seine (senkrechte) Projection (b_1) auf diese Ebene erleiden würde, drittens, dass die Kraft, die es erfährt, in dieser Ebene liegt und auf der Projection (b_1) des Stromelementes und also auch auf diesem selbst senkrecht steht, und viertens, dass wenn g die Kraft ist, welche jenes von A ausgehende Stromelement (b) in irgend einer Lage erfährt, und sich die Projection (b_1) des Stromelementes auf die Wirkungsebene um irgend einen Winkel in dieser Ebene dreht, dann auch die Kraft g , ohne ihren Werth zu verändern, sich um denselben Winkel dreht.“

entsteht dann durch das Zusammentreffen der von dem geschlossenen Strome und dem Elemente ds ausgehenden Schwingungen eine Kraft $ids \cos \psi \cdot Q$, welche auf ds und seiner Projection auf die Ebene P senkrecht steht und nach der Seite gerichtet ist, wo die von dem geschlossenen Strome und von ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzte Richtungen besitzen.

§ 12. Zum Schluss will ich noch den Fall behandeln, wo ein ebener kreisförmiger Strom auf ein Element, welches in seiner Axe in einem gegebenen Abstände liegt, einwirkt.

Wollte man diese Wirkung berechnen, indem man von der Formel

$$-\frac{ii' ds ds' \sin \Theta' \cos \psi}{2 r^2}$$

ausgeht, so würde, obwohl $\sin \Theta' = 1$, selbst bei der Annahme, dass ds mit der Axe X parallel liegt, doch die Rechnung sehr umständlich werden, da die von jedem einzelnen Elemente ds' auf ds ausgeübte Kraft von Element zu Element ihre Grösse und Richtung ändert, wobei sie doch immer senkrecht gegen ds bleibt.

Fig. 5.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man zuerst die Componenten X , Y , Z berechnet. Ziehen wir zuerst von allen Punkten des Kreises (Fig. 5) vom Halbmesser ρ Linien nach dem Orte C des Elementes ds , so bilden dieselben einen Kegel. Es sei e der Abstand OC , und c der Winkel, welchen eine Seite des Kegels mit der Axe macht, so ist der Winkel, welchen r bei allen Elementen ds' mit der Z -Axe bildet, $= c$. Ist der Winkel zwischen OB und X gleich φ , so ist der Winkel $\alpha' = 90^\circ + \varphi$, $\beta' = \varphi$, $\gamma' = 90^\circ$, es wird also:

$$\cos \alpha' = -\sin \varphi, \cos \beta' = \cos \varphi, \cos \gamma' = 0.$$

Weiter ergibt sich

$$\cos a = \sin c \cos \varphi, \cos b = \sin c \sin \varphi.$$

Das Integral Q_1 wird dann $+\frac{i' \varrho \cos c}{2 r^2} \int \cos \varphi d\varphi$,

$$Q_2 \quad " \quad +\frac{i' \varrho \cos c}{2 r^2} \int \sin \varphi d\varphi,$$

$$Q_3 \quad " \quad +\frac{i' \varrho \sin c}{2 r^2} \int d\varphi.$$

Die beiden ersten Integrale geben zwischen 0 und 2π genommen den Werth = 0, Q_3 wird = $+i' \pi \varrho \sin c / r^2$. Die Resultirende $Q = Q_3$ liegt in der Axe Z.

Wird nun das Element an den Ort C gelegt, und sind die von den drei Axen gebildeten Winkel α, β, γ , so werden die drei Componenten

$$X = -\frac{id s i' \pi \varrho \sin c \cos \beta}{r^2}, \quad Y = -\frac{id s i' \pi \varrho \sin c \cos \alpha}{r^2}, \quad Z = 0.$$

also

$$R = \frac{id s i' \pi \varrho \sin c \cos \psi}{r^2}.$$

Gehen wir von der Theorie der Schwingungen aus, so lässt sich das vorstehende Resultat fast aus der blossen Anschauung entnehmen.

Alle von den Elementen ds' an den Ort von ds übertragenen Geschwindigkeiten von der Grösse $i' ds' / r^2$ stehen senkrecht auf der durch C und ds' gelegten Ebene und sind einander gleich. Sie bilden mit der Axe Z einen Winkel $= 90^\circ - c$. Zerlegen wir jede Geschwindigkeit $i' ds' / r^2$ in eine nach Z gerichtete und in eine mit der Ebene XY parallele Componente, so heben sich die letzteren Componenten auf, und es bleiben nur die nach Z hin gerichteten übrig, deren Summe mit Hinzufügung des Factors $\frac{1}{2}$ gleich $i' \pi \varrho \sin c / r^2$ ist. Wird nun das Element ds an den Ort C gelegt, so entsteht eine in der auf Z senkrechten Ebene liegende und auf ds senkrecht stehende Kraft $ids \cos \psi \cdot i' \pi \varrho \sin c / r^2$, und zwar gerichtet nach der Seite von ds , auf welcher die von dem kreisförmigen Strome und die von ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzt gerichtet sind.

Die vorstehenden Erörterungen dürften es wohl rechtfertigen, wenn ich der Ansicht Ausdruck gebe, dass die von mir aufgestellte Theorie den wirklichen Vorgängen entspricht. Die Rechnung stellt in allen Beziehungen vollständig und genau die aus den Schwingungen sich ergebenden Vorgänge dar.

IV. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Verdampfung und auf die Diffusion von Dämpfen¹⁾; von A. Winkelmann.

(Hierzu Taf. I Fig. 14.)

Ueber die Diffusion der Gase in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur liegen Versuche von Loschmidt und in sehr ausführlicher Art von v. Obermayer vor. Aus den Loschmidt'schen Beobachtungen²⁾ ergeben sich für den Exponenten m der Gleichung:

$$D_{\vartheta} = D_0 (1 + \alpha \cdot \vartheta)^m,$$

in welcher D_{ϑ} den Diffusionscoefficienten bei ϑ^0 und α den Ausdehnungscoefficienten der Gase bezeichnet, folgende Werthe:

Combination	m	Temperaturdiff., aus welcher m abgeleitet wurde
Kohlensäure-Luft	1,98	38,0 ⁹
„ Wasserstoff	2,10	13,2
Sauerstoff - „	1,71	32,4

Die Versuche von v. Obermayer³⁾ umfassen das Temperaturintervall von 8 bis 61,5⁰. Die gefundenen Resultate, welche genauer als die Loschmidt'schen sind, enthält die folgende Tabelle.

1) Auszugsweise am 1. Juni 1888 in der med.-naturw. Gesellschaft in Jena mitgetheilt.

2) Loschmidt, Wien. Ber. **61**. 2. Abth. p. 367. 1870.

3) v. Obermayer, Wien. Ber. **81**. 2. Abth. p. 1102. 1880.