

Die Brownsche Bewegung bei Berücksichtigung einer Persistenz der Bewegungsrichtung. Mit Anwendungen auf die Bewegung lebender Infusorien.

Von Reinhold Fürth.

Mit zwei Abbildungen.

Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.

(Eingegangen am 26. Juni 1920.)

1. Unterliegt ein Körper der Einwirkung von rasch aufeinanderfolgenden, in ihrer Richtung und Intensität ganz zufällig variierenden Impulsen, so wird eine Bewegung ausgeführt, die den Charakter der Brownschen Bewegung aufweist. Diese ist hier als Musterbeispiel genommen, weil sie von allen zu ihrer Klasse gehörigen als die am besten definierte und auch physikalisch reizvollste am genauesten untersucht ist. Das hervorstechendste Merkmal aller unter die obige Definition fallenden Bewegungen ist dasjenige, das durch die Formel über das mittlere Verschiebungsquadrat bei Brownscher Bewegung ausgedrückt wird, wobei aber auf den Wert der Konstanten in dem letzteren Spezialfall in diesem Zusammenhang kein Wert gelegt werden soll.

Diese Formel, die in den grundlegenden Arbeiten von Smoluchowski¹⁾ und Einstein²⁾ enthalten ist, lautet bekanntlich:

$$\bar{x}^2 = at, \quad (1)$$

d. h. im Mittel über viele Teilchen gleicher Größe ist das mittlere Verschiebungsquadrat \bar{x}^2 der Zeit zur Zurücklegung der Verschiebung x in einer bestimmten Koordinatenrichtung direkt proportional. Die Formel kann nach Bedarf auch auf die Bewegung im Raume ausgedehnt werden, da ja laut Definition die Bewegung in den drei Koordinatenrichtungen im Raume voneinander unabhängig sind. Man kann sich nun die Frage vorlegen, von welchen Voraussetzungen über die Natur der wirkenden Impulse diese Formel abhängig ist und ob im speziellen die Annahme einer gewissen Persistenz der Bewegungsrichtung, die dem rein zufälligen Walten der bewegenden Impulse ein regelndes Moment entgegengesetzt, nicht eine Modifikation an ihr hervorruft.

¹⁾ M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **21**, 756, 1906.

²⁾ A. Einstein, Ann. d. Phys. **19**, 289, 1906.

Diese Frage ist bereits von Smoluchowski¹⁾ aufgeworfen worden, und er hat zeigen können, daß Formel (1) in der Tat unabhängig ist von der speziellen Art des Verteilungsgesetzes der Impulsintensitäten; hingegen ist das letztere Problem von ihm nur in Aussicht gestellt, aber nicht gelöst worden. Im folgenden wird unter spezialisierenden Annahmen ein solcher Lösungsversuch mitgeteilt, der dann einerseits zur Illustration der Gesetzmäßigkeiten, andererseits, da es sich hier um ein biologisch nicht uninteressantes Gebiet handelt, auf die Bewegung lebender Infusorien angewendet wird.

2. Wir beschränken uns zunächst ausschließlich auf die „lineare Brownsche Bewegung“, indem wir als Variable allein die Verschiebung in einer beliebigen Koordinatenrichtung x berücksichtigen. Wir wollen uns ferner vorstellen, daß die Bewegung aus lauter gleich langen Stücken von der Länge ξ zusammengesetzt sei, die alle mit konstanter Geschwindigkeit zurückgelegt werden, während an der Grenze zwischen zwei solchen Stücken eine Umkehr erfolgen wird oder nicht, je nachdem, wie die zufälligen, die Bewegung bewirkenden Impulse gerade orientiert sind. Die Anzahl der pro Sekunde zurückgelegten Wegelemente sei ν .

Denken wir uns zunächst die Einwirkung einer Persistenz außer acht gelassen, so wird in einem Grenzpunkte die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen nach rechts oder nach links geht, völlig gleich sein. Unter dieser Voraussetzung kann man nun ohne weiteres Formel (1) ableiten:

Die Verschiebung x setzt sich aus den dem Betrage nach gleichen und nur durch die Vorzeichen verschiedenen Verschiebungen ξ folgendermaßen zusammen:

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad (2)$$

$$x^2 = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^2. \quad (2')$$

Bildet man auf beiden Seiten von (2) und (2') das Mittel über viele einander ähnliche Teilchen, so wird gemäß der obigen Voraussetzung der Mittelwert der rechten Seite von (2) gleich Null, während auf der rechten Seite von (2') bloß die quadratischen Glieder übrigbleiben; die doppelten Produkte fallen weg, da sie ebensooft positiv als negativ werden. Daraus folgt also

$$\overline{x^2} = n \xi^2 = \nu \xi^2 \cdot t = at,$$

d. i. nichts anderes als Formel (1).

¹⁾ M. v. Smoluchowski, Phys. ZS. 17, 558, 1916.

Nun machen wir aber die weit allgemeinere Annahme, daß die Richtungen der aufeinanderfolgenden ξ in gewissem Sinne voneinander abhängig seien, insofern nämlich, als es wahrscheinlicher sein soll, daß auf eine Verschiebung nach rechts wieder eine solche nach rechts erfolge, als umgekehrt. Dies werde nun zahlenmäßig ausgedrückt durch die Wahrscheinlichkeit p , daß auf eine Rechtsverschiebung wieder eine Rechtsverschiebung folge. Es wird dann zwar die rechte Seite von (2) abermals gleich Null, dagegen gestaltet sich bei (2') die Rechnung folgendermaßen.

Für die Summe der quadratischen Glieder kommt wieder wie oben im Mittel der Ausdruck $n\xi^2$ heraus. Die Berechnung der doppelten Produkte nehmen wir so vor, daß wir zunächst den Mittelwert der Summe

$$\frac{S_1}{2} = \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \dots + \xi_{n-1} \xi_n,$$

dann den der Summe

$$\frac{S_2}{2} = \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4 + \dots + \xi_{n-2} \xi_n \text{ usw.}$$

ausrechnen und addieren. Dies gelingt, indem man einfach für jedes der in den obigen Summen enthaltenen Produkte die Wahrscheinlichkeit eines der beiden Vorzeichen durch die Wahrscheinlichkeit p ausdrückt.

Für die Produkte der Form $\xi_e \xi_{e+1}$ ist die Wahrscheinlichkeit des positiven Zeichens gleich p , die des negativen $1-p$, daher der Mittelwert der Produktsumme S_1 mit $n-1$ Gliedern

$$\bar{S}_1 = 2(n-1)\xi^2\{p - (1-p)\} = 2(n-1)\xi^2(2p-1). \quad (3)$$

Für die Produkte von der Form $\xi_e \xi_{e+2}$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des positiven Zeichens nach dem wohl ohne weiteres verständlichen Schema

$$\begin{array}{r} + + + \quad p^2 \\ + + - \quad p(1-p) \\ + - + \quad (1-p)^2 \\ + - - \quad p(1-p) \end{array}$$

zu $p^2 + (1-p)^2$, die des negativen analog zu $2p(1-p)$, daher der Mittelwert von S_2

$$\begin{aligned} S_2 &= 2(n-2)\xi^2\{p^2 + (1-p)^2 - 2p(1-p)\} \\ &= 2(n-2)\xi^2(2p-1)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Auf diese Weise fortfahrend in bezug auf die Summen S_3, S_4, \dots kann man das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke leicht allgemein feststellen, und findet so

$$\bar{S}_k = 2(n-k)\xi^2(2p-1)^k. \quad (5)$$

Diese Größe in (2') eingesetzt ergibt nun

$$\bar{x}^2 = \xi^2 \{n + 2(n-1)(2p-1) + 2(n-2)(2p-1)^2 + \dots + 2 \cdot 2(2p-1)^{n-2} + 2(2p-1)^{n-1}\}$$

unter Einführung der Abkürzung $\alpha = \frac{1}{2p-1}$ folgt daraus weiter

$$\bar{x}^2 = \xi^2 \{n + 2(2p-1)^{n-1}(1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots + (n-1)\alpha^{n-2})\}. \quad (6)$$

Die Summe der in den Klammern stehenden Potenzreihe ist leicht zu berechnen und ergibt

$$\frac{(n-1)\alpha^n - n \cdot \alpha^{n-1} + 1}{(\alpha-1)^2}.$$

Führt man hier wieder den Wert von α ein, und setzt in (6) ein, so erhält man

$$\bar{x}^2 = \xi^2 \left\{ n + \frac{2p-1}{2(1-p)^2} [(n-1) - n(2p-1) + (2p-1)^n] \right\}. \quad (7)$$

Faßt man hier nun die in n linearen Glieder zusammen, so folgt

$$\bar{x}^2 = n\xi^2 \frac{p}{1-p} + \xi^2 \frac{2p-1}{2(1-p)^2} [(2p-1)^n - 1]. \quad (8)$$

Nach Einführung von $n = vt$ und Benutzung der folgenden Konstanten an Stelle von v, ξ, p

$$a = v\xi^2 \frac{p}{1-p}, \quad b = \frac{2p-1}{2(1-p)^2} \xi^2, \quad c = (2p-1)^v \quad (9)$$

ergibt sich schließlich

$$\bar{x}^2 = at + b(c^t - 1). \quad (10)$$

3. Wir betrachten zwecks Diskussion der neuen Formel (10) zunächst folgende Spezialfälle:

a) Für genügend große Zeiten t wird, da c stets kleiner als 1, das zweite Glied in (10) gegen das erste zu vernachlässigen sein, so daß man wieder zu Formel (1) zurückkommt. Es gilt also auch im Falle einer Persistenz der Bewegungsrichtung die gewöhnliche Formel der Brownschen Bewegung für genügend große Zeiten mit Ausnahme des Extremfalles $p = 1$.

b) Für $p = 1/2$ wird $b = c = 0$, daher

$$\bar{x}^2 = at$$

ein Resultat, das von vornherein zu erwarten war, da ja diese Spezialannahme eben der gewöhnlichen Betrachtungsweise entspricht.

c) Es sei p sehr nahe gleich 1, ν endlich und von Null verschieden. Dann wird, wenn wir nach Potenzen der kleinen Größe $p - 1$ entwickeln,

$$(2p - 1)^{\nu t} - 1 = 2\nu t(p - 1) + 2\nu t(\nu t - 1)(p - 1)^2 + \dots$$

Daher wird aus (8)

$$\overline{x^2} = \nu \xi^2 t \left(\frac{p}{1-p} - \frac{2p-1}{1-p} - 1 \right) + (2p-1) \xi^2 \nu^2 t^2 \sim \xi^2 \nu^2 t^2$$

oder
$$\sqrt{\overline{x^2}} = \xi \cdot \nu \cdot t,$$

d. h. für sehr große Nachwirkung nimmt die Bewegung den Charakter einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung an mit der Geschwindigkeit $\xi\nu$ der geradlinigen Elemente, welcher Grenzfall also, wie man sieht, ebenfalls so herauskommt, wie eine unmittelbare Überlegung es verlangt.

d) Wir nehmen nun an, es sei gleichzeitig $p \sim 1$, dabei aber $\nu \gg 1$, derart, daß das Produkt $\frac{\beta}{2} = \nu(1-p)$ endlich und von Null verschieden bleibt. Ebenso soll $\xi \ll 1$ derart sein, daß die Geschwindigkeit $\varphi = \nu\xi$ endlich und von Null verschieden ist. Dann erhalten wir durch Entwicklung in eine Potenzreihe

$$\log c = \nu \log(2p-1) = \nu \log[1 - 2(1-p)] = -2\nu(1-p) + \dots = -\beta,$$

daraus folgt also

$$a = \frac{2\varphi^2}{\beta}, \quad b = \frac{2\varphi^2}{\beta^2}, \quad c^t = e^{-\beta t}$$

und daher

$$\overline{x^2} = \frac{2\varphi^2}{\beta^2} (\beta t + e^{-\beta t} - 1). \quad (11)$$

Diese Formel stimmt völlig überein mit einer für die Brownsche Bewegung von Ornstein¹⁾ abgeleiteten Formel, die aus der Differentialgleichung der Brownschen Bewegung von de Haas-Lorentz²⁾ gewonnen ist, wenn man φ^2 mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrate $\overline{u^2}$ identifiziert und β mit dem Ausdruck $\frac{w}{m} = \frac{1}{mB}$, wenn m die Masse und B die Beweglichkeit des Brownschen Partikels bedeuten. Die Ableitung der Gleichung (11) bei Ornstein setzt voraus, daß die unregelmäßig auf das Teilchen wirkenden Kräfte doch insofern eine gewisse gegenseitige Koppelung aufweisen, als, für sehr kleine Zeitdifferenzen die Kräfte als stetige Funktionen der

¹⁾ L. S. Ornstein, Proc. Amst. 21, 96, 1918.

²⁾ G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung. Braunschweig 1913.

Zeit gedacht, auch die Differenzen der Kraftwirkungen im allgemeinen klein bleiben. Diese Annahme läuft in unserer Sprache darauf hinaus, ξ sehr klein und ν sehr groß zu machen mit endlicher Geschwindigkeit φ , und p nahe an 1, wie es ja in diesem Spezialfall in der Tat durchgeführt wurde.

Gleichung (11) liefert ohne weiteres für große t

$$\overline{x^2} = \frac{2\varphi^2}{\beta} \cdot t,$$

also die gewöhnliche Formel der Brownschen Bewegung; dagegen für kleine t

$$\overline{x^2} = \varphi^2 t^2 = \xi^2 \nu^2 t^2,$$

also geradlinige und gleichförmige Bewegung.

4. Da die Voraussetzungen des Spezialfalles d) des vorigen Abschnittes im Falle der Brownschen Bewegung sicher erfüllt sind, fragen wir nun auf Grund der Formel (11) nach dem Gültigkeitsbereich der gewöhnlichen Formel (1). Laut ihrer Definition ist die Größe ν offenbar aufzufassen als die Anzahl der Molekülstöße, die pro Sekunde das Partikel treffen. Sie erscheint nach dem obigen mit B und m verknüpft durch die Gleichung

$$2\nu(1-p) = \frac{1}{mB}.$$

Nun ist $\nu(1-p)$ nichts anderes als die Anzahl der Richtungswechsel n des Partikels pro Sekunde. Diese ist also gleich

$$r = \frac{1}{2mB}.$$

Das gibt, um einen konkreten Fall zu betrachten, für Partikel von der Größenordnung 10^{-5} cm, die in einem Gase schweben, wo B zwischen 10^7 und 10^8 im absoluten Maße, der Größenordnung nach $r = 10^6$, oder für Zeiten $t < 10^{-6}$ sec hat die Brownsche Bewegung nicht mehr den Charakter der Formel (1), sondern den einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung.

Man kann auch noch auf einem anderen Wege zu dieser Zahlenangabe gelangen, indem man direkt von Formel (11) ausgeht. Bildet man nämlich die Ableitung des Ausdruckes $\beta t - 1 + e^{-\beta t}$, so erhält man für die Neigung der Kurve $x^2 = f(t)$ gegen die t -Achse

$$A = \beta(1 - e^{-\beta t}).$$

Dies ergibt für $t = 0$: $A = 0$ und für $t = \infty$: $A = \beta$.

Setzt man also mit einiger Willkür für diejenige Zeit τ , welche die Formel für kleine t von der für große t gültigen scheidet, $A = \frac{\beta}{2}$, so erhält man

$$\frac{\beta}{2} = \beta (1 - e^{-\beta\tau})$$

oder

$$\tau = \frac{1}{\beta} \log_{\text{nat}} 2 \sim \frac{0,7}{\beta}.$$

Das so gefundene τ stimmt also der Größenordnung nach mit $1/\beta$ überein, wie wir es oben angenommen haben.

Damit kommen wir aber auch in Übereinstimmung mit einer von Einstein¹⁾ angestellten Berechnung, der für Teilchen der Größenordnung 1μ Durchmesser die Zeit, oberhalb derer seine Formel die Bewegung richtig wiedergibt, zu rund 10^{-7} sec einschätzt.

5. Um nun die neue Formel (10) einer Prüfung zu unterziehen, hieß es, Beobachtungen an einem geeigneten Material, d. h. an einem solchen anzustellen, bei dem womöglich die Abweichungen von der gewöhnlichen Form des Gesetzes (1) deutlich genug hervortreten. Wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, dürfte dies nun bei Beobachtungen der Brownschen Bewegung an kleinen Partikeln nicht wohl möglich sein. Es wurden daher lebende Infusorien als Beobachtungsmaterial gewählt. Beobachtet man die Bewegung eines Infusors unter dem Mikroskop, so hat man in der Tat den Eindruck einer völlig ungeordneten, der Brownschen ähnlichen Bewegung und es liegt daher nahe, beide nach ähnlichen Methoden zu untersuchen.

Die Idee einer solchen Beobachtungsmethode ist nicht neu. Sie ist bereits früher von Przi Bram²⁾ auf die Bewegung verschiedener Arten von Infusorien angewendet worden, in einer Arbeit, deren Inhalt in Kürze der folgende ist:

Für eine große Anzahl der Tierchen wird mittelst des Abbeschen Zeichenapparates und eines sekundenschlagenden Metronoms die Verschiebung in äquidistanten Zeitintervallen aufgezeichnet und daraus für alle Ausgangslagen das mittlere Verschiebungsquadrat gebildet. Tut man dies nicht nur für das einfache Zeitintervall, sondern auch für das doppelte, vierfache, achtfache usw., so sollen sich die entsprechenden \bar{x}^2 nach Formel (1) wie 1:2:4... verhalten, d. h. die Quotienten der so aufeinanderfolgenden Zahlen sind alle gleich 2. Es wird nun für jedes Infusor aus allen so gebildeten Quotienten

¹⁾ A. Einstein, Ann. d. Phys. 19, 371, 1906.

²⁾ K. Przi Bram, Pfügers Archiv f. Physiol. 153, 401, 1913.

das Mittel genommen und untersucht, ob bei neuerlicher Mittelbildung über viele ähnliche Tierchen der theoretische Wert 2 bevorzugt ist. Es zeigt sich in der Tat, daß im Mittel ungefähr der Wert 2 herauskommt, daß dagegen für jedes Individuum oft recht beträchtliche Abweichungen von diesem Werte auftreten, obschon wir ja auch hier bereits mit Mittelwerten zu tun haben. Man kann also die Przi-bramschen Versuche äußersten Falles nur als eine sehr rohe Bestätigung von (1) ansehen, die dem Zweifel darüber Raum läßt, ob sich die Formel auch dann bewährt, wenn sie auf ein statistisches Material genügender Breite, gewonnen an einem einzelnen Infusor, angewendet wird. Und das ist ja gerade eine notwendige Bedingung, wenn man eine dezidierte Aussage über die Art derartiger Bewegungen machen will.

Der biologische Gesichtspunkt nach der Natur der Infusorienbewegung war der eigentliche Ausgangspunkt dieser Arbeit und ich werde im folgenden sehr bald zeigen, daß es wirklich gelungen ist, nachzuweisen, daß Formel (1) die Verhältnisse hier nicht richtig wiedergibt, während hingegen Formel (10) eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment zu geben vermag, was nicht nur eine Bestätigung der umstehend entwickelten Theorie bedeutet, sondern gleichzeitig eine Aussage über gewisse biologische Eigentümlichkeiten der Infusorienbewegung erlaubt.

6. Die Beobachtungen erfolgten mittels eines Mikroskops und einer Zeiss'schen 0,1 mm tiefen Kammer zur Zählung von Blutkörperchen, die unter dem Namen „Objektnetzmikrometer“ bekannt ist, um das Verdunsten der Flüssigkeit zu vermeiden. War die Bewegung des Infusors zu rasch, so wurde das Wasser, in dem es sich befand, mit einer 1proz. Tragantlösung zur Erhöhung der Viskosität nach Bedarf versetzt.

Die Registrierung geschah nicht vermittelt der Bahnaufzeichnung mit dem Zeichenapparat, die nur ziemlich ungenaue Resultate liefert, sondern nach der vom Verfasser¹⁾ angegebenen einfachen Methode der Registrierung von „doppelseitigen Erstdurchgangszeiten“. Zu diesem Zwecke wurde ein quadratisches Okullarraster im Okular des Beobachtungsmikroskops angebracht und vermittelt eines Morse-doppelstiftschreibers, wie es in der bekannten Ehrenhaft'schen Methode geschieht, dessen erster Hebel durch einen Morsetaster vom Beobachter und dessen zweiter Hebel durch ein sekundenschlagendes Metronom betätigt wurde, jeder Erstdurchgang des betrachteten

¹⁾ R. Fürth, Ann. d. Phys. 53, 177, 1917.

Infusors durch einen Strich der einen der beiden Scharen des Rasters registriert¹⁾. Die auf diese Weise gewonnenen Zeiten, zwischen zwei Erstdurchgängen durch benachbarte Rasterintervalle geben im Mittel die sogenannten mittleren doppelseitigen Erstdurchgangszeiten über ein Rasterintervall. In analoger Weise gewinnt man dann aus dem Beobachtungsmaterial die Zeiten für die zwei-, drei-, viermal größere Strecke usw. L. c. habe ich nun gezeigt, daß diese mittleren Passagezeiten einer Formel der Gestalt (1) genügen, wenn man darin x^2 durch das Quadrat des betrachteten Rasterintervalls und t durch die mittlere Passagezeit ersetzt.

Es ist nun anzunehmen, daß auch im Fall der erweiterten Formel (10) diese Art der Ersetzung zutreffend bleibt, so daß es möglich wird, so vermittelst der gewonnenen Erstdurchgangszeiten Formel (10) zu prüfen.

Einen Mangel unserer Betrachtungsweise des Problems bildet es naturgemäß, daß in Wirklichkeit eine Persistenz der Bewegungsrichtung sich nicht nur in einer geringeren Wahrscheinlichkeit einer Umkehr, sondern überhaupt in einer großen Wahrscheinlichkeit kleiner Winkel zwischen aneinandergrenzenden Bahnelementen dokumentieren wird. Dieser Mangel rührt daher, daß wir die Bewegung als linear aufgefaßt haben, während sie in Wirklichkeit im Raume erfolgt. Doch ist immerhin auch so zu erwarten, daß eine große Persistenz der Bewegungsrichtung im Raume sich durch ein p nahe an 1 bemerkbar machen wird und umgekehrt.

7. Als erste sei eine Beobachtungsreihe an *Paramäcium* in Wasser mit Zusatz von Tragantlösung mitgeteilt. Sie erfolgte mittels des Objektivs *aa* und des orthoskopischen Okulars $f=15$ mm von Zeiss, um eine genügend hohe Vergrößerung bei großem Gesichtsfeld zu erhalten. Die Vergrößerung dieser Kombination beträgt 95fach linear.

Ein Teil des Okularmikrometers entsprach 0,073 mm. An dem untersuchten Tier wurden 112 Zeiten registriert, die ich jedoch im Detail nicht wiedergebe. In der folgenden Tabelle 1 sind in der ersten Spalte die benutzten Intervallängen x in Rasterteilen als Einheit und in der zweiten Spalte die dazugehörigen mittleren Passagezeiten t von $x=1$ bis $x=10$ angegeben. In der Fig. 1 ist die derart gewonnene empirische Funktion $x^2 = f(t)$ graphisch dargestellt, die nach Formel (1) eine gerade Linie sein sollte.

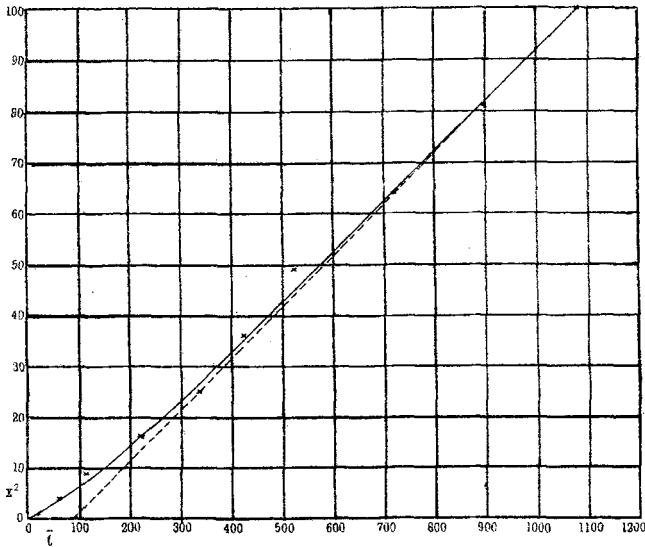
¹⁾ Näheres über diese Methode findet man in der oben zit. Arbeit S. 184f.

Tabelle 1.

x (beob.)	t	x^2 (ber.)	x (beob.)	t	x^2 (ber.)
1	18,5	1,0	6	423,1	34,8
2	58,7	3,4	7	524,6	44,7
3	111,8	7,7	8	722,6	64,5
4	221,0	16,0	9	899,2	81,7
5	334,4	26,3	10	1078,1	99,5

Man sieht, daß für genügend große t die Kurve in der Tat mit großer Genauigkeit eine Gerade ist, hingegen für kleine t ganz aus-

Fig. 1.



gesprochen von dieser Form abweicht. Auch geht die so gewonnene Gerade, nicht, wie es Formel (11) verlangen würde, durch den Koordinatenursprung hindurch.

Wir suchen nun drei Werte der Konstanten a, b, c so zu bestimmen, daß durch Formel (10) die gewonnene Kurve möglichst gut dargestellt wird. Das gelingt hier sehr einfach, indem durch die in der Figur mit — — — gezeichnete Gerade, in die für große t die Kurve übergeht, offenbar gegeben ist durch die Gleichung

$$x^2 = at - b,$$

wo man die Werte von a und b aus der Figur leicht graphisch entnehmen kann. Es folgt dann der Wert von c durch Mittelbildung

über alle aus (10) berechneten c , wenn man darin successive die x und t aller 10 beobachteten Punkte, sowie die gewonnenen a und b eingesetzt denkt. Auf diese Weise erhält man

$$a = 0,1008, \quad b = 8,65, \quad c = 0,9943.$$

Setzt man diese Zahlen in (10) ein und berechnet mittels der beobachteten t die zugehörigen x , so kann man sich ein Bild über die Genauigkeit der Formel machen, indem man die so berechneten x (ber.) mit den Quadraten der ganzen Zahlen von 1 bis 10 vergleicht. Wie aus der dritten Spalte der Tabelle 1 hervorgeht, ist die Übereinstimmung recht gut. Die nach diesen Daten konstruierte theoretische Kurve ist in Fig. 1 eingezeichnet und gleicht, wie man sieht, die Beobachtungen gut aus.

Wir können aber nun auch noch weiter auf Grund der Formel (9) aus den berechneten Werten von a , b , c die der theoretisch wichtigeren Konstanten ν , ξ und p bestimmen, was am besten durch Lösung der transzendenten Gleichungen (9) auf graphischem Wege erfolgt. Ohne auf die Details näher einzugehen, sei das Resultat dieser Berechnungen wie folgt mitgeteilt. Es ergibt sich

$$p = 0,556, \quad \nu = 0,00263, \quad \varphi = \nu \cdot 5,52 \text{ partes/sec} = 0,00106 \text{ mm/sec.}$$

Wir sehen also, daß in diesem Falle die Persistenz der Bewegungsrichtung eine geringfügige ist, daß daher dem untersuchten Paramäcium nur ein sehr geringes Raumorientierungsvermögen zugesprochen werden kann, daß ferner die Lebhaftigkeit der Bewegung, die durch die Zahl ν gemessen werden kann, eine ziemlich geringe ist, und daß schließlich die mittlere Geschwindigkeit vom Betrage φ rund $1/1000$ mm/sec ausmacht.

8. Als zweites Beispiel bringe ich eine Beobachtung an einem größeren Infusor, dessen Spezies mir nicht bekannt war, in reinem Wasser, zu dessen Beobachtung infolge der rascheren Bewegung eine schwächere Vergrößerung, nämlich Objektiv aa und Okular 1 von Zeiss genommen wurde. Die Registrierung geschah wieder mittels desselben Rasters, bei dem in diesem Falle ein Teil dem Abstände von 0,13 mm entsprach. Die Vergrößerung betrug 24fach linear. Die Anzahl der Beobachtungen war 134¹⁾. In der folgenden Tabelle 2 sind analog zu der früheren die zusammengehörigen beobachteten Werte von x und t eingetragen, die graphische Darstellung ist durch Fig. 2 gegeben.

¹⁾ Für ihre freundliche Mithilfe bei der Beobachtung dieser und einiger anderer Reihen sei Fr. N. Weigner bestens gedankt.

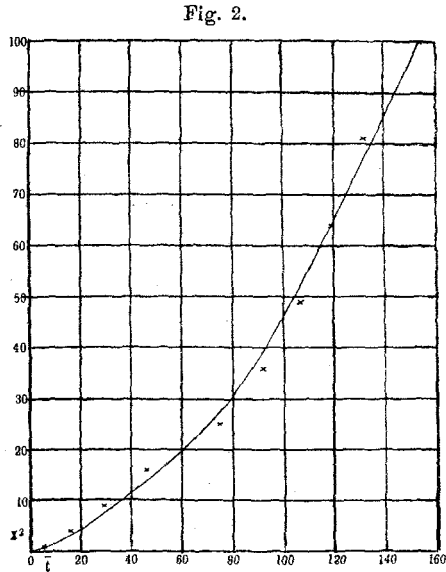
Tabelle 2.

x (beob.)	t	x^2 (ber.)	x (beob.)	t	x^2 (ber.)
1	5,76	0,4	6	91,49	39
2	15,63	3,1	7	106,24	52
3	29,04	8,2	8	118,9	65
4	45,91	16	9	131,2	82
5	74,86	27	10	154,2	99

Aus der Figur ist unmittelbar zu ersehen, daß in diesem Falle von einer Geradlinigkeit auch für die größeren t nicht die Rede sein kann, daß man also hier wahrscheinlich einem Falle mit großer Nachwirkung gegenübersteht. Da also an diesem Material das Verfahren zur Bestimmung der Konstanten, wie es im vorigen Abschnitt verwendet worden war, nicht gut anwendbar ist, wurde zu ihrer Berechnung ein numerisches Ausgleichsverfahren eingeschlagen, das hier füglich übergangen werden kann. Man erhält die folgenden Werte

$$\begin{aligned}
 a &= 3,76, \\
 b &= 1600, \\
 c &= 0,9977.
 \end{aligned}$$

Vermittelt dieser Werte der Konstanten wurde nun wie oben aus Formel (10) für jedes beobachtete t das zugehörige x^2 (ber.) ausgerechnet und in Tabelle 2 eingetragen. Man sieht auch hier eine recht gute Übereinstimmung, was auch aus der graphischen Darstellung durch die theoretische, ausgezogene Kurve in Fig. 2 hervorgeht.



Schließlich kann man von hier aus wieder die Werte der Konstanten ξ , ν und p gewinnen, die sich zu

$$p = 0,90, \quad \nu = 0,01, \quad \varphi = \nu \cdot 0,834 = 0,0083 \text{ mm/sec}$$

ergeben. Also ist hier, wie bereits oben vermutungsweise mitgeteilt wurde, wirklich die Nachwirkung oder Persistenz der Bewegungs-

richtung recht groß, so daß wir diesem Tier ein viel höheres Orientierungsvermögen zuschreiben dürfen, als dem Paramäcium. Die Lebhaftigkeit der Bewegung ist auch hier viel größer, was wohl dem Umstande zuzuschreiben ist, daß hier reines Wasser als Flüssigkeit vorliegt im Gegensatze zu der zähen Flüssigkeit des vorigen Beispiels.

Die beiden mitgeteilten Infusorienversuche mögen bloß als Illustration der oben theoretisch gefundenen Gesetzmäßigkeit aufgefaßt werden und als Versuch auf diesem Wege zu neuen Aufschlüssen biologischer Natur zu gelangen. Das große und interessante Material, das die verschiedenen niederen Lebewesen in dieser Beziehung bilden, nach solchen Prinzipien weiter zu untersuchen, soll anderen, hierzu Berufeneren aufgespart bleiben.

Prag, im Juni 1920.
