OSSERVAZIONI SULLA NOTA PRECEDENTE; (*)

per il prof. M. L. Albeggiani, in Palermo.

Adunanza del 12 febbrajo 1890.

Muovendo dalle proprietà di cui godono le circonferenze tangenti a tre circonferenze date, proprietà sulle quali l'egregio prof. Caldarera in parte fonda la sua dimostrazione, e riferendo i punti del piano ad un sistema di coordinate ortogonali qualunque, si perviene ad ottenere per le coordinate del centro e per la lunghezza del raggio di una di tali circonferenze, espressioni di gran lunga più semplici di quelle alle quali arriva il suddetto professore con l'ajuto di un sistema di coordinate triangolari sia pur questo quello, del resto abbastanza naturale, in cui il triangolo formato dai centri delle tre circonferenze date è triangolo di riferimento.

In ciò che segue farò uso delle notazioni e delle equazioni che si trovano nella XV^a Lezione della monografia dell'Hesse: « *Vorlesungen aus der analytische Geometrie der Geraden, des Punktes und des Kreises in der Ebene* ».

Posto

$$k_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2,$$

siano

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

(*) *Sistema di circoli tangenti a tre cerchi dati, in coordinate trilineari*; Nota del prof. F. Caldarera. (Questi Rendiconti, t. IV; pp. 43-49).

le equazioni delle circonferenze date. Supponendo inoltre di prendere in considerazione quella circonferenza rispetto alla quale le circonferenze date restano tangenti esternamente, le coordinate x, y del centro di essa soddisfano alla equazione:

$$(1) \quad r_0(k_1 - k_2) + r_1(k_2 - k_0) + r_2(k_0 - k_1) = 0$$

che è quella della retta la quale passa per il centro radicale delle circonferenze date ed è perpendicolare al loro asse di similitudine esterno.

Dette ora r, x', y' la lunghezza del raggio della circonferenza cercata e le coordinate del punto di contatto di essa con la circonferenza $k_0 = 0$, si hanno le relazioni:

$$(2) \quad x - a_0 = \frac{(r + r_0)(x' - a_0)}{r_0}, \quad y - b_0 = \frac{(r + r_0)(y' - b_0)}{r_0}$$

$$(3) \quad (x' - a_0)^2 + (y' - b_0)^2 - r^2 = 0$$

$$(4) \quad \frac{k'_1 - k'_0}{[10]^2 - (r_1 - r_0)^2} - \frac{k'_2 - k'_0}{[20]^2 - (r_2 - r_0)^2} = 0$$

dove k'_i indica ciò che diventa k_i per $x = x', y = y'$ e $[ij]$ indica la distanza dei centri delle circonferenze $(k_i), (k_j)$. La (4), come è noto, esprime che il punto di contatto cercato è uno dei punti d'intersezione della circonferenza (k_0) con la retta che unisce il centro radicale sudetto al polo, rispetto alla circonferenza (k_0) , dell'asse di similitudine esterno.

Ponendo per brevità:

$$L_0 = \frac{l_1 - l_0}{[10]^2 - (r_1 - r_0)^2} - \frac{l_2 - l_0}{[20]^2 - (r_2 - r_0)^2},$$

la (4) si può scrivere

$$(5) \quad A_0(x' - a_0) + B_0(y' - b_0) + R_0 r_0 = 0,$$

la quale combinata con la (3) dà :

$$x' - a_0 = - \frac{r_0}{A_0^2 + B_0^2} [A_0 R_0 - B_0 H_0],$$

$$y' - b_0 = - \frac{r_0}{A_0^2 + B_0^2} [B_0 R_0 + A_0 H_0],$$

dove

$$H_0 = \pm \sqrt{A_0^2 + B_0^2 - R_0^2}.$$

Dalle (2), tenendo presente la (5), si trova :

$$(6) \quad A_0(x - a_0) + B_0(y - b_0) + R_0(r + r_0) = 0;$$

inoltre il centro cercato deve trovarsi sulla retta che unisce il centro della circonferenza (k_0) col punto di contatto (x' , y'), quindi in seguito alla (6), sussiste anche la

$$(7) \quad B_0(x - a_0) - A_0(y - b_0) - H_0(r + r_0) = 0.$$

Il sistema di equazioni (1), (6), (7) lineari nelle x , y , r lascia determinare in modo semplice tali incognite: il segno di H_0 sarà evidentemente quello che rende positivo il valore trovato di r , come per la quantità chiamata Q , dal prof. Caldarera.

Mutando r_0 , r_1 , r_2 in $-r_0$, $-r_1$, $-r_2$ si trovano le espressioni analoghe relative alla circonferenza rispetto alla quale le circonferenze date sono tangenti internamente: mutando poi opportunamente i segni di uno o di due dei raggi r_0 , r_1 , r_2 ed in conformità tenendo conto di ciascuno degli altri assi di similitudine, si ottengono, in simil modo, le espressioni dei raggi e delle coordinate dei centri delle rimanenti sei circonferenze.

Per ultimo si osserva che la forma delle A_0 , B_0 , R_0 , H_0 è assai propria per lasciar discutere i diversi casi di possibilità del problema.

Come si scorge, nè la difficoltà della ricerca, nè la complicazione dei calcoli non permisero ai vari Autori che trattarono analiticamente questo problema, di dare le espressioni dei raggi e delle coordinate dei

centri delle circonferenze cercate; soltanto lo scopo al quale essi mirarono, più conforme del resto alla natura del problema, fu di scoprire per mezzo dell'analisi, quelle particolari proprietà geometriche le quali avessero potuto renderne facile ed elegante la costruzione; raggiunta la meta non si curarono di andare oltre, ritenendo, a buon dritto, ogni altra ricerca, intesa a ritrovare le quantità suddette, un semplice esercizio di calcolo, priva d'interesse e come tale oziosa. Basta leggere in proposito la Nota del Gergonne (*), il quale, credo, fu il primo ad occuparsi della quistione col mezzo delle geometria analitica, per accorgersi dello spirito che la informa; in principio di essa è scritto :
. dans le dessein de venger complètement la géométrie analytique du reproche qu'on ne lui fait que trop souvent de ne pouvoir rivaliser avec la géométrie pure, pour la construction des problèmes, j'essayais de prouver que cette géométrie analytique, convenablement maniée, offrait les solutions les plus directes, les plus élégantes et les plus simples de deux problèmes dès-long-temps célèbres, et qui passent pour difficiles : je veux parler du problème où il s'agit de *décrire un cercle qui touche trois cercles donnés* et de celui où il est question de *décrire une sphère qui touche quatre sphères données*.

Palermo, gennaio 1890.

M. L. ALBEGGIANI.

(*) Gergonne: *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan.*—
Ann. de Mat. pures et appliquées, rédigées par J. D. Gergonne, t. VII, 1816 et 1817.