ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

No. 256.

Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen.

Von Herrn Geheimenrath und Ritter *Bessel*.

So häufige Anwendungen das von *Borda* in die astronomische Praxis eingeführte Princip der Vervielfältigung der Beobachtungen auch gefunden hat, so ist doch die nähere Angabe des Vortheils, welchen dasselbe gewährt, unerörtert geblieben; auch ist nicht untersucht worden, weder auf welche Art die nach dieser Methode gemachten Beobachtungen combinirt werden müssen, wenn sie ihr wahrscheinlichstes Resultat geben sollen, noch wie groß das Gewicht dieses Resultats ist.

Ich werde diese Lücken jetzt auszufüllen suchen. Man muß in der That wünschen, auch aus Beobachtungen dieser Art das wahrscheinlichste Resultat ziehen zu können; auch wird der Vortheil, welcher, in einem besonderen Falle von der Anwendung des Principes der Vervielfältigungen zu erwarten ist, nur dann richtig gewürdigt werden können, wenn vorher genau erkannt ist, was dadurch geleistet wird. Um unnöthige Weitläufigkeit in Worten zu vermeiden, werde ich nur von der Messung eines Winkels (x), zwischen zwei festen Punkten A und B reden; es hat keine Schwierigkeit das diesem Falle Angemessene auf jeden anderen zu übertragen.

1.

Bei jeder Beobachtung kommen wenigstens zwei, von einander unabhängige Fehlerursachen in Betracht, im Falle einer Winkelmessung sind dieses die Unvollkommenheiten der Einstellungen auf die Objecte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll, und die Unvollkommenheiten der Theilungen und der Ablesungen derselben. Wenn man alle Beobachtungen mit einem gewissen Instrumente, nach einer gleichen Methode macht, und jede derselben von den übrigen ganz unabhängig ist, so haben alle (wenn übrigens nicht besondere Fehlerursachen für einige vorhanden sind) offenbar einen gleichen Werth und es hat gar kein Interesse, die beiden Fehlerursachen, aus deren Zusammenwirken der diesen Beobachtungen eigenthümliche wahrscheinliche Fehler entsteht, von einander zu trennen. Allein wenn die verschiedenen Beobachtungen von einander nicht unabhängig sind, wie dieses bei der Anwendung der Methode der

Vervielfältigung der Fall ist, so trennen sich beide Fehlerursachen und erfordern, wenn es darauf ankommt, die wahren Resultate einer Beobachtungsreihe zu erhalten, eine abgesonderte Berücksichtigung. Die Art, wie diese Absonderung im Folgenden gemacht ist, wird in allen ähnlichen Fällen angewandt werden können.

Ich werde den wahrscheinlichen (oder mittleren) Fehler der Einstellungen durch α , der Theilungen und Ablesungen durch β bezeichnen, größerer Bequemlichkeit wegen aber nicht α und β selbst, sondern $\frac{1}{\alpha\alpha} = a$ und $\frac{1}{\beta\beta} = b$ in die Rechnung einführen. Diese a und b sind die Gewichte der Operationen des Einstellens und Ablesens: die Einheit derselben ist das Gewicht einer Beobachtung, welche den wahrscheinlichen (oder mittleren) Fehler $= 1$ besitzt.

Die Messung des Winkels zwischen zwei Punkten A und B erfordert vier Operationen, welche ich, in der Ordnung, die bei der Anwendung eines Vervielfältigungs-Instrumentes stattfindet, jetzt aufzählen werde:

1. die Alhidade wird festgeklemt; der Index derselben entspricht einem willkürlichen Punkte (u) der Theilung, welcher durch die Ablesung $= m$ gefunden wird (Gew. $= b$);
2. das Instrument wird, ohne u zu ändern, auf den Punkt A eingestellt; die Entfernung dieses Punktes von dem Anfangspunkte der Theilungen (x), wird hierdurch $= u$ (Gew. $= a$);
3. die Alhidade wird, ohne α zu ändern, gedreht und das Instrument auf den Punkt B eingestellt; hierdurch gelangt der Index auf einen anderen Punkt der Theilung (u'), dessen Entfernung vom Anfangspunkte der Theilungen $= \alpha + x$ ist (Gew. $= a$);
4. die Angabe des Index wird abgelesen und $= m'$ gefunden (Gew. $= b$).

Hierdurch ist eine Beobachtung vollendet und wenn das Instrument als nicht-vervielfältigendes angewandt werden

soll, hat es dabei sein Bewenden; ich werde einen Augenblick dabei verweilen.

Die vier Gleichungen, welche diesen vier Operationen entsprechen, nämlich

$$\begin{aligned} u &= m \quad \text{Gewicht} = b \\ \alpha &= u \quad \dots\dots\dots a \\ \alpha + x &= u' \quad \dots\dots\dots a \\ u' &= m' \quad \dots\dots\dots b \end{aligned}$$

enthalten eben so viele unbekannte Größen und geben das bestimmte Resultat $x = m' - m$. Um das Gewicht desselben zu finden, macht man, nach den gewöhnlichen Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate, aus diesen Gleichungen 4 neue:

$$\begin{aligned} A &= 2\alpha\alpha - au - au' + ax = 0 \\ U &= -a\alpha + (a+b)u - bm = 0 \\ U' &= -a\alpha + (a+b)u' - ax - bm' = 0 \\ X &= a\alpha - au' + ax = 0 \end{aligned}$$

und eliminirt daraus alle unbekannten Größen bis auf x ; setzt man die übrigbleibende Gleichung unter die Form

$$X = px - q$$

so ist $x = \frac{q}{p}$ der gesuchte Werth von x und p ist sein Gewicht. Man findet ohne Mühe

$$X = \frac{ab}{2(a+b)} x - \frac{ab}{2(a+b)} (m' - m)$$

also das Gewicht der Bestimmung von x

$$= \frac{ab}{2(a+b)}.$$

Der diesem Gewichte entsprechende wahrscheinliche (oder mittlere) Fehler ist $= \sqrt{[2\alpha\alpha + 2\beta\beta]}$, derselbe den man unmittelbar gefunden haben würde, wenn man von dem Satze hätte ausgehen wollen, daß eine Beobachtung, auf welche mehrere, von einander unabhängige Fehlerursachen einwirken, welche resp. die wahrscheinlichen Fehler $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ erzeugen würden, den wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{[\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \dots]}$ besitzt. Dieser Satz ist, auf die hier angewandte Art, sehr leicht zu beweisen.

2.

Ich habe hier eine einzelne für sich bestehende Beobachtung betrachtet, welche von allen anderen derselben Art ganz unabhängig ist. Das Wesentliche der Vervielfältigungsmethoden ist aber die Abhängigkeit jeder folgenden Beobachtung von der vorhergehenden: das u' , auf welches der Index durch diese gelangt ist, vertritt bei jener die Stelle

des vorigen u . Ob die 4te Operation, die Ablesung, gemacht oder unterlassen wird, ist, in Beziehung auf die Benennung der Methode gleichgültig: eine Reihe Beobachtungen, deren jede folgende von dem der vorigen zugehörigen u' ausgeht, ist eine vervielfältigte, es mag zwischen jeder einzelnen, oder in gleichen oder ungleichen Zwischenräumen, oder nur am Anfange und am Ende abgelesen sein. Um alle diese verschiedenen Fälle unter Eine Uebersicht bringen zu können, werde ich den Ablesungen verschieden bezeichnete Gewichte beilegen; für die fehlenden werden die ihnen zugehörigen Gewichte später $= 0$ gesetzt, für die gemachten werden sie sämmtlich $= b$. Auf diese Art erhält man für jede Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen, der Aufzählung im 1sten Art. gemäß, folgende Reihe von Gleichungen:

$$\text{Gewicht} = \underbrace{a} \quad \underbrace{a}$$

$$\begin{aligned} u &= \alpha; & u' &= \alpha + x; & u' &= m' \dots\dots\dots b' \\ u'' &= \alpha'; & u'' &= \alpha' + x; & u'' &= m'' \dots\dots\dots b'' \\ u''' &= \alpha''; & u''' &= \alpha'' + x; & u''' &= m''' \dots\dots\dots b''' \end{aligned}$$

u. s. w.

$$u^{(n-1)} = \alpha^{(n-1)}; \quad u^{(n)} = \alpha^{(n-1)} + x; \quad u^{(n)} = m^{(n)} \dots\dots\dots b^{(n)}$$

Mit Ausnahme des Falls wo nur m und $m^{(n)}$ abgelesen sind, ist die Angabe dieser Gleichungen größer als die der unbekannten Größen. Die Gleichungen, aus welchen die wahrscheinlichste Bestimmung dieser Größen hervorgeht, sind folgende:

$$\begin{aligned} 2a\alpha + ax &= a(u + u') \\ 2a\alpha' + ax &= a(u' + u'') \\ 2a\alpha'' + ax &= a(u'' + u''') \end{aligned}$$

u. s. w.

$$2a\alpha^{(n-1)} + ax = a(u^{(n-1)} + u^{(n)})$$

$$(a+b)u = a\alpha + bm$$

$$(2a+b)u' = a(\alpha + \alpha' + x) + b'm'$$

$$(2a+b)u'' = a(\alpha' + \alpha'' + x) + b''m''$$

u. s. w.

$$(2a+b)u^{(n-1)} = a(\alpha^{(n-2)} + \alpha^{(n-1)} + x) + b^{(n-1)}m^{(n-1)}$$

$$(a+b)u^{(n)} = a(\alpha^{(n-1)} + x) + b^{(n)}m^{(n)}$$

$$nax + a(\alpha + \alpha' + \dots + \alpha^{(n-1)}) = a(u + u' + \dots + u^{(n)})$$

Wendet man die aus den n ersten Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke von $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}$ an, um die übrigen von diesen Größen zu befreien, und dividirt man diese, mit Ausnahme der letzten, durch $\frac{1}{2}a$, was erlaubt ist, indem man nicht die Gewichte der Bestimmungen der verschiedenen u , sondern nur das Gewicht von x zu wissen verlangt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2b}{a}\right) u - u' &= \frac{2b}{a} m - x \\ -u + \left(2 + \frac{2b'}{a}\right) u' - u'' &= \frac{2b'}{a} m' \\ -u' + \left(2 + \frac{2b''}{a}\right) u'' - u''' &= \frac{2b''}{a} m'' \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} -u^{(n-2)} + \left(2 + \frac{2b^{(n-1)}}{a}\right) u^{(n-1)} - u^{(n)} &= \frac{2b^{(n-1)}}{a} m^{(n-1)} \\ -u^{(n-1)} + \left(1 + \frac{2b^{(n)}}{a}\right) u^{(n)} &= \frac{2b^{(n)}}{a} m^{(n)} + x \end{aligned}$$

und

$$\frac{an}{2} x - \frac{a}{2} (u^{(n)} - u) = 0.$$

Wenn die wirklich gemachten Ablesungen die Ordnungszahlen

$$0, h, i, l, \dots, m, n$$

haben, so werden

$$b, b^{(h)}, b^{(i)}, b^{(l)}, \dots, b^{(m)}, b^{(n)}$$

einander gleich, die übrigen verschwinden. Man hat dann die rechts vom Gleichheitszeichen stehende GröÙe aller Gleichungen bei welchen das letztere der Fall ist $= 0$, den Coefficienten des mittleren Gliedes derselben $= 2$. Hieraus folgt man leicht

$$\begin{aligned} u' - u &= u'' - u' = \dots = u^{(h)} - u^{(h-1)} = \frac{u^{(h)} - u}{h} \\ u^{(h+1)} - u^{(h)} &= u^{(h+2)} - u^{(h+1)} = \dots = u^{(i)} - u^{(i-1)} = \frac{u^{(i)} - u^{(h)}}{i - h} \end{aligned}$$

u. s. w.

Indem diese Gleichungen hierdurch erfüllt werden, kommen sie nicht weiter in Betracht; die übrigen verwandeln sich in

$$\begin{aligned} \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right) u - \frac{1}{h} u^{(h)} &= \frac{2b}{a} m - x \\ -\frac{1}{h} u + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i-h}\right) u^{(h)} - \frac{1}{i-h} u^{(i)} &= \frac{2b}{a} m^{(h)} \\ -\frac{1}{i-h} u^{(h)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{i-h} + \frac{1}{l-i}\right) u^{(i)} - \frac{1}{l-i} u^{(l)} &= \frac{2b}{a} m^{(i)} \\ \dots &\dots \\ -\frac{1}{n-m} u^{(m)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{n-m}\right) u^{(n)} &= \frac{2b}{a} m^{(n)} + x \end{aligned}$$

Man findet hieraus, durch eine sehr leichte Rechnung, die Ausdrücke von $u^{(n)}$ und u durch die gemachten Ablesungen und x . Dividirt man nämlich die erste Gleichung durch $\frac{2b}{a} + 1$ und addirt man den Quotienten zur zweiten, so ist die Summe frei von u ; dividirt man diese Summe durch den Coefficienten von $u^{(h)}$ und durch $i - h$ und addirt man den Quotienten zur dritten Gleichung, so ist die

Summe beider auch frei von $u^{(h)}$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens bis zur letzten Gleichung führt auf die Form

$$L u^{(n)} = M + N x.$$

Wendet man dasselbe Verfahren in umgekehrter Ordnung an, so daß man bei der letzten Gleichung anfängt und bei der ersten endigt, so erhält man, analog bezeichnet,

$$L' u = M' + N' x.$$

Die Substitution der aus beiden Rechnungen hervorgegangenen Ausdrücke von $u^{(n)}$ und u in die Gleichung

$$\frac{an}{2} x - \frac{a}{2} (u^{(n)} - u) = 0$$

gibt endlich

$$\frac{a}{2} \left\{ n - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'} \right\} x - \frac{a}{2} \left\{ \frac{M}{L} - \frac{M'}{L'} \right\} = 0;$$

also

$$x = \frac{\frac{M}{L} - \frac{M'}{L'}}{n - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'}}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{a}{2} \left\{ n - \frac{N}{L} + \frac{N'}{L'} \right\}.$$

3.

Wenn die Ordnungszahlen der Beobachtungen, bei welchen abgelesen worden ist, nämlich $0, h, i, l, \dots, m, n$ eine arithmetische Progression sind, so kann man den Werth und das Gewicht von x , ohne in Weitläufigkeiten zu gerathen, noch weiter entwickeln. Die Vervielfältigungsbeobachtungen sind meistens in diesem Falle, indem man entweder nach jeder einzelnen Beobachtung, oder nach jeder 4ten oder 5ten abzulesen pflegt.

Ich werde also

$$h = i - h = l - i = \dots = m - n$$

annehmen, für die Ordnungszahl der letzten Beobachtung aber nh schreiben, so daß die ganze Reihe der Beobachtungen aus n Abtheilungen, jede von h Vervielfältigungen besteht. Die allgemeineren Gleichungen im vorigen Art. verwandeln sich in diesem Falle in:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right) u - \frac{1}{h} u^{(h)} &= \frac{2b}{a} m - x \\ -\frac{1}{h} u + \left(\frac{2b}{a} + \frac{2}{h}\right) u^{(h)} - \frac{1}{h} u^{(2h)} &= \frac{2b}{a} m^{(h)} \\ -\frac{1}{h} u^{(h)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{2}{h}\right) u^{(2h)} - \frac{1}{h} u^{(3h)} &= \frac{2b}{a} m^{(2h)} \\ \dots &\dots \\ -\frac{1}{h} u^{(nh-h)} + \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{h}\right) u^{(nh)} &= \frac{2b}{a} m^{(nh)} + x \end{aligned}$$

oder wenn man sie mit h multiplicirt und k für $\frac{bh}{a} + 1$ schreibt, in

$$\begin{aligned} (2k-1)u - u^{(h)} &= 2(k-1)m - hx \\ -u + 2k u^{(h)} - u^{(2h)} &= 2(k-1)m^{(h)} \\ -u^{(h)} + 2k u^{(2h)} - u^{(3h)} &= 2(k-1)m^{(2h)} \\ \text{u. s. w.} \\ -u^{(nh-h)} + (2k-1)u^{(nh)} &= 2(k-1)m^{(nh)} + hx \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen muß der Ausdruck von $u^{(nh)} - u$ abgeleitet und in die Gleichung

$$\frac{an}{2}x - \frac{a}{2}(u^{(nh)} - u) = 0$$

gesetzt werden, welche dann x bestimmen wird. Zieht man die erste von der letzten, die zweite von der vorletzten, u. s. w. ab, und bezeichnet man, der Abkürzung wegen $u^{(nh)} - u$ durch Δ_n , $u^{(nh-h)} - u^{(h)}$ durch Δ_{n-2} u. s. w., ferner $m^{(nh)} - m$ durch d_n , $m^{(nh-h)} - m^{(h)}$ durch d_{n-2} , u. s. w. so erhält man folgende neue Gleichungen

$$\begin{aligned} (2k-1)\Delta_n - \Delta_{n-2} &= 2(k-1)d_n + 2hx \\ -\Delta_n + 2k\Delta_{n-2} - \Delta_{n-4} &= 2(k-1)d_{n-2} \\ -\Delta_{n-2} + 2k\Delta_{n-4} - \Delta_{n-6} &= 2(k-1)d_{n-4} \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist die letzte dieser Gleichungen

$$-\Delta_4 + 2k\Delta_2 = 2(k-1)d_2;$$

wenn es eine ungerade Zahl ist, aber

$$-\Delta_3 + (2k+1)\Delta_1 = 2(k-1)d_1.$$

Durth diese Verschiedenheit wird eine abgesonderte Entwicklung beider Fälle nöthig. Ich werde mit einem geraden n anfangen. Schreibt man die Gleichungen in umgekehrter Ordnung

$$\begin{aligned} 2k\Delta_2 - \Delta_4 &= 2(k-1)d_2 \\ -\Delta_2 + 2k\Delta_4 - \Delta_6 &= 2(k-1)d_4 \\ -\Delta_4 + 2k\Delta_6 - \Delta_8 &= 2(k-1)d_6 \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$-\Delta_{n-2} + (2k-1)\Delta_n = 2(k-1)d_n + 2hx$$

und schafft man, durch Division der ersten Gleichung durch $2k = k'$, aus der Summe dieses Quotienten und der 2ten Gleichung Δ_2 fort, so daß man erhält

$$k''\Delta_4 - \Delta_6 = 2(k-1)\left\{d_4 + \frac{d_2}{k'}\right\}$$

wo k'' für $2k - \frac{1}{k'}$ geschrieben ist; ferner aus dieser und der 3ten Gleichung Δ_4 , so daß man erhält

$$k''\Delta_6 - \Delta_8 = 2(k-1)\left\{d_6 + \frac{d_4}{k''} + \frac{d_2}{k'k''}\right\}$$

u. s. w., und setzt man dieses bis zur letzten Gleichung fort, so ergibt diese

$$(k^{(n)} - 1)\Delta_n = 2(k-1)\left\{d_n + \frac{d_{n-2}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}} + \frac{d_{n-4}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}} + \dots + \frac{d_2}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}\dots k'}\right\} + 2hx$$

Man erhält endlich, indem man den hieraus folgenden Ausdruck von Δ_n in die Gleichung

$$\frac{an}{2}x - \frac{a}{2}\Delta_n = 0$$

setzt,

$$0 = \frac{ah}{2}\left\{n - \frac{2}{k^{(\frac{1}{2}n)} - 1}\right\}x - \frac{a(k-1)}{k^{(\frac{1}{2}n)} - 1}\left\{d_n + \frac{d_{n-2}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}} + \frac{d_{n-4}}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}} + \dots + \frac{d_2}{k^{(\frac{1}{2}n-1)}k^{(\frac{1}{2}n-2)}\dots k'}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich der Werth und das Gewicht von x ; das letztere ist der Coefficient von x in dieser Gleichung. Die Reihe der eingeführten k' , k'' , ... ist

$$k' = 2k; \quad k'' = 2k - \frac{1}{k'}; \quad k''' = 2k - \frac{1}{k''}; \quad \text{u. s. w.} \dots$$

Für ein ungerades n ist die Reihe der Gleichungen in umgekehrter Ordnung geschrieben,

$$\begin{aligned} (2k+1)\Delta_1 - \Delta_3 &= 2(k-1)d_1 \\ -\Delta_1 + 2k\Delta_3 - \Delta_5 &= 2(k-1)d_3 \\ -\Delta_3 + 2k\Delta_5 - \Delta_7 &= 2(k-1)d_5 \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$-\Delta_{n-2} + (2k-1)\Delta_n = 2(k-1)d_n + 2hx.$$

Führt man hier

$$\kappa' = 2k+1; \quad \kappa'' = 2k - \frac{1}{\kappa'}; \quad \kappa''' = 2k - \frac{1}{\kappa''}; \quad \text{u. s. w.}$$

in die Rechnung ein, so wird, ganz ähnlich mit dem vorher betrachteten Falle, die Endgleichung:

$$0 = \frac{ah}{2}\left\{n - \frac{2}{\kappa^{(\frac{n+1}{2})} - 1}\right\}x - \frac{a(k-1)}{\kappa^{(\frac{n+1}{2})} - 1}\left\{d_n + \frac{d_{n-2}}{\kappa^{(\frac{n-1}{2})}} + \frac{d_{n-4}}{\kappa^{(\frac{n-1}{2})}\kappa^{(\frac{n-2}{2})}} + \dots + \frac{d_1}{\kappa^{(\frac{n-1}{2})}\kappa^{(\frac{n-2}{2})}\dots \kappa'}\right\}.$$

4.

Ich werde jetzt die Größen k' , k'' , k''' u. s. w. und κ' , κ'' , κ''' u. s. w. unabhängig voneinander ausdrücken. Multiplicirt man die Reihe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} k' &= 2k \\ k'' &= 2k - \frac{1}{k'} \\ k''' &= 2k - \frac{1}{k''} \end{aligned}$$

u. s. w.

respective mit 1, k' , $k'k''$, $k'k''k'''$ u. s. w. und bezeichnet man k' , $k'k''$, $k'k''k'''$, durch ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , so verwandeln sie sich in

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_1 - 2k \\ 0 &= \phi_2 - 2k\phi_1 + 1 \\ 0 &= \phi_3 - 2k\phi_2 + \phi_1 \\ 0 &= \phi_4 - 2k\phi_3 + \phi_2 \end{aligned}$$

u. s. w.

Hieraus geht hervor, daß ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 u. s. w. die Coefficienten einer rückkehrenden Reihe sind, und daß man die identische Gleichung

$$\frac{1}{1-2ky+\gamma\gamma} = 1 + \phi_1 \cdot \gamma + \phi_2 \cdot \gamma^2 + \phi_3 \cdot \gamma^3 + \dots$$

hat. Bezeichnet man $\sqrt{(kk'-1)}$ durch r , $k+r$ durch R , $k-r$ durch R' , so hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2ky+\gamma\gamma} &= \frac{1}{(R-\gamma)(R'-\gamma)} \\ &= \frac{1}{2r} \left\{ \frac{1}{R'-\gamma} - \frac{1}{R-\gamma} \right\}; \end{aligned}$$

und wenn man diesen Ausdruck nach den aufsteigenden Potenzen von γ entwickelt,

$$= \frac{1}{2r} \left\{ \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) + \left(\frac{2}{R'^2} - \frac{2}{R^2} \right) \gamma + \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{R^3} \right) \gamma^2 + \dots \right\}$$

Bemerkt man noch, daß $RR' = 1$ ist, so erhält man allgemein:

$$2r\phi_i = R^{i+1} - R'^{i+1}$$

und hieraus

$$k^{(i)} = \frac{\phi_i}{\phi_{(i-1)}} = \frac{R^{i+1} - R'^{i+1}}{R^i - R'^i}$$

Die Reihe der κ , nämlich:

$$\begin{aligned} \kappa' &= 2k + 1 \\ \kappa'' &= 2k - \frac{1}{\kappa'} \\ \kappa''' &= 2k - \frac{1}{\kappa''} \end{aligned}$$

u. s. w.

läßt sich ebenfalls durch R und R' ausdrücken. Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit 1, κ' , $\kappa'\kappa''$, $\kappa'\kappa''\kappa'''$, und bezeichnet man diese Producte durch 1, ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , so verwandeln die Gleichungen sich in:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_1 - 2k - 1 \\ 0 &= \psi_2 - 2k\psi_1 + 1 \\ 0 &= \psi_3 - 2k\psi_2 + \psi_1 \\ 0 &= \psi_4 - 2k\psi_3 + \psi_2 \end{aligned}$$

u. s. w.

Man sieht hieraus, daß man hat,

$$\frac{1+\gamma}{1-2ky+\gamma\gamma} = 1 + \psi_1 \cdot \gamma + \psi_2 \cdot \gamma^2 + \psi_3 \cdot \gamma^3 + \dots;$$

was links vom Gleichheitszeichen steht ist

$$= \frac{1}{2r} \left\{ \frac{1+R'}{R'-\gamma} - \frac{1+R}{R-\gamma} \right\}$$

und wenn man $\frac{1}{R}$ für R' schreibt

$$= \frac{1+R}{2r} \left\{ \frac{1}{1-R\gamma} - \frac{1}{R-\gamma} \right\}.$$

Die Entwicklung dieses Ausdruckes nach den aufsteigenden Potenzen von γ giebt allgemein:

$$\begin{aligned} 2r\psi_i &= (1+R) \left\{ R^i - \frac{1}{R^{i+1}} \right\} \\ &= \frac{1+R}{\sqrt{R}} \left\{ R^{i+\frac{1}{2}} - R^{i-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{R} + \sqrt{R'} \right\} \left\{ R^{i+\frac{1}{2}} - R^{i-\frac{1}{2}} \right\}; \end{aligned}$$

man hat also auch

$$\kappa^{(i)} = \frac{\psi_i}{\psi_{(i-1)}} = \frac{R^{i+\frac{1}{2}} - R^{i-\frac{1}{2}}}{R^{i-\frac{1}{2}} - R^{i-\frac{3}{2}}}.$$

5.

Aus dem vorigen Art. gehet hervor, daß die richtige Combination einer Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen, in welcher die Ablesungen gleichmäßig vertheilt sind, so wie auch die Berechnung des Gewichtes ihres Resultats, auf die Function

$$R^i - R'^i$$

oder

$$R^i - R^{-i}$$

zurückführt. Diese Function werde ich jetzt durch $[i]$ bezeichnen, ihre Anwendung auch nicht auf ganze Werthe von i beschränken. Nach den Formeln des 3ten Art. ist für ein gerades n , wenn man für die Reihe der k ihre Ausdrücke durch die hier eingeführte Function setzt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{2}{h}(k-1)}{n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]} \left\{ d_n[\frac{1}{2}n] + d_{n-2}[\frac{1}{2}n-2] + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + d_4[2] + d_2[1] \right\} \end{aligned}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{ah}{2} \left\{ \frac{n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]}{[\frac{1}{2}n+1] - [\frac{1}{2}n]} \right\}.$$

Es ist offenbar, daß der gemeinschaftliche Factor des Ausdruckes von x nichts anders sein kann, als

$$\frac{1:h}{n[\frac{1}{2}n] + (n-2)[\frac{1}{2}n-1] + \dots + 4[2] + 2[1]}$$

dieses folgt aus der Nothwendigkeit, daß für den Fall völlig genauer Beobachtungen, für welchen $d_n = nhx$, $d_{n-2} = (n-2)hx$; u. s. w. sein würde, die Formel sich in $x = x$ verwandele. Man kann aber auch diese Umformung leicht unmittelbar verificiren, indem man $n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n]$ durch $2(k-1) = R + R' - 2 = (\sqrt{R} - \sqrt{R'})^2 = [\frac{1}{2}]^2$ dividirt. Hieraus geht eine zweite Formel für x hervor, welche nur die Berechnung der Functionen $[i]$ von $i = 1$ bis $i = \frac{1}{2}n$ voraussetzt, nämlich

$$x = \frac{1}{h} \cdot \frac{d_n[\frac{1}{2}n] + d_{n-2}[\frac{1}{2}n-1] + \dots + d_4[2] + d_2[1]}{n[\frac{1}{2}n] + (n-2)[\frac{1}{2}n-1] + \dots + 4[2] + 2[1]}.$$

Bezeichnet man den Nenner dieser Formel durch N , so hat man:

$$n[\frac{1}{2}n+1] - (n+2)[\frac{1}{2}n] = 2(k-1)N,$$

und erhält hieraus

$$[\frac{1}{2}n+1] - [\frac{1}{2}n] = \frac{2}{n} \left\{ [\frac{1}{2}n] + (k-1)N \right\}.$$

Setzt man dieses in den Ausdruck des Gewichtes von x , so erhält es die Form:

$$\frac{\frac{1}{2}nbhhN}{[\frac{1}{2}n] + (k-1)N}$$

Für den Fall eines ungeraden n findet man die folgenden, den vorigen ganz gleichen Formeln:

$$x = \frac{\frac{2}{h}(k-1)}{n[\frac{n+2}{2}] - (n+2)[\frac{n}{2}] + \dots + d_3[\frac{3}{2}] + d_1[\frac{1}{2}]}$$

oder auch

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{d_n[\frac{n}{2}] + d_{n-2}[\frac{n-2}{2}] + \dots + d_3[\frac{3}{2}] + d_1[\frac{1}{2}]}{n[\frac{n}{2}] + (n-2)[\frac{n-2}{2}] + \dots + 3[\frac{3}{2}] + [\frac{1}{2}]};$$

Das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{ah}{2} \left\{ \frac{n[\frac{n+2}{2}] - (n+2)[\frac{n}{2}]}{[\frac{n+2}{2}] - [\frac{n}{2}]} \right\},$$

oder, wenn der Nenner der zweiten Formel für x durch N bezeichnet wird,

$$\frac{\frac{1}{2}nbhhN}{[\frac{n}{2}] + (k-1)N}.$$

6.

Wollte man die Ablesungen des Instrumentes als ganz genau voraussetzen und die einzige Fehlerursache in den Einstellungen des Fernrohres auf die Punkte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll, suchen, so würde $b = \infty$ und k und R gleichfalls unendlich groß sein; die folgenden Glieder der Formel für x würden, vergleichungsweise mit dem ersten, verschwinden, und der Ausdruck von x sich auf $\frac{1}{nh} d_n$ reduciren. Wollte man dagegen die Einstellungen als völlig genau ansehen und die Fehler nur in den Ablesungen suchen, so würden $a = \infty$, $k = 1$, $R = 1$ sein, die Functionen $R^i - R^{-i}$ würden verschwinden und Zähler und Nenner der Formeln für x würden gleichfalls verschwinden. Man erhält den dieser Voraussetzung angemessenen Werth von x dadurch daß man Zähler und Nenner in Beziehung auf R differentiirt, und statt ihrer die Differentialquotienten setzt; da $\frac{d[i]}{dR} = \frac{i}{R} \{ R^i + R^{-i} \}$, also in dem hier betrachteten Falle $= 2i$ ist, so ist dieser Werth von x

$$= \frac{n d_n + (n-2) d_{n-2} + (n-4) d_{n-4} + \dots}{n n + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \dots}.$$

Die erste Praxis, nämlich den ganzen Bogen, welchen der Index des Instruments von der ersten Beobachtung bis zur letzten durchlaufen hat, durch die Anzahl der Beobachtungen dividirt, als wahrscheinlichsten Werth des gesuchten Winkels zu betrachten, ist die gewöhnliche; die durch Vervielfältigungsinstrumente gemachten Beobachtungen der großen französischen Gradmessung und vieler anderen ähnlichen Unternehmungen sind so berechnet worden. Diese Praxis ist jedoch nicht zu vertheidigen, desto weniger, da der Grund jeder Anwendung der Vervielfältigungsmethode kein anderer sein kann, als Theilungs- und Ablesungsfehler des Instruments unschädlicher zu machen, also in der Wahl der Methode selbst eine Anerkennung derselben Fehler liegt, deren angenommenes Nichtvorhandensein die Grundlage des Rechnungsverfahrens ist. Weniger inconsequent erscheint die zweite, die Summe der Quadrate der Unterschiede, bis auf welche man die Ablesungen darstellen kann, zum Minimum machende Rechnungsart; sie ist desto richtiger je größer die Sicherheit der Einstellungen, vergleichungsweise mit der der Ablesungen ist: also auch richtiger, wenn die durch Ablesungen entstehenden Abtheilungen der Beobachtungsreihe nur eine oder einige Vervielfältigungen enthalten, als wenn sie deren viele umfassen. Will man jedoch nicht zufrieden sein, ein der Wahrheit nahes Resultat einer Beobachtungsreihe zu erhalten, sondern sucht man das auf richtigen Principien beruhende, allein wahre,

so darf weder die eine noch die andere Praxis angewandt werden, sondern man muß der gegenwärtig entwickelten Theorie folgen.

Indessen steht der Anwendung dieser Theorie eine Schwierigkeit im Wege, nämlich die, jedem einzelnen Falle angemessene Bestimmung von $k = 1 + \frac{hb}{a^2}$. Das Gewicht einer Ablesung ($= b$) kann zwar für jedes Instrument ein für allemal festgesetzt werden; allein das Gewicht einer Einstellung ($= a$) hängt von der größeren oder geringeren Deutlichkeit der Zielpunkte und von der Ruhe oder Unruhe der Luft ab, und es wird schwerlich gelingen, die Abhängigkeit von diesen Umständen für jeden besonderen Fall vollständig, d. h. in Zahlen, zu erkennen. Dieselbe Schwierigkeit tritt übrigens allenthalben hervor, wo es darauf ankommt, aus langen Reihen von Beobachtungen Resultate zu ziehen; diese Beobachtungen werden, wenigstens wenn veränderliche äußere Umstände Einfluß darauf haben, nicht sämtlich gleiches Gewicht besitzen, man kann aber, in Ermangelung eines sicheren Maassstabes für den Einfluß dieser Umstände, nichts anderes thun, als die Ungleichheit des Gewichtes, welche daraus hervorgeht, unberücksichtigt zu lassen, und etwa diejenigen Fälle, wo sie höchst auffallend hervortritt, gänzlich auszuschließen.

Wenn man die in großer Anzahl, aus den ausgezeichneteren deutschen Werkstätten hervorgegangenen Vervielfältigungsinstrumente aufmerksamer betrachtet, so bemerkt man leicht, daß die Kraft der schönen Fernröhre, mit welchen diese Instrumente versehen zu sein pflegen, die Kraft der Eintheilungen und Ablesungen, so sehr auch diese vervollkommenet worden sind, beträchtlich übertrifft; bei den so häufig angewandten früheren, vor *Gambey* verfertigten, französischen Instrumenten ähnlicher Art, welche auch in optischer Beziehung viel unvollkommener waren, scheint dennoch das Uebergewicht der Fernröhre über die Theilungen noch größer gewesen zu sein. In beiden Fällen ist $\frac{b}{a}$ ein sich der Einheit nicht nähernder Bruch; in beiden also ist die wahrscheinlichste Berechnungsart derjenigen Beobachtungsreihen, in welchen mehr als zwei Ablesungen vorkommen, von der einfachen Division des ganzen, von dem Index durchlaufenen Bogens durch die Anzahl der Beobachtungen, beträchtlich und zwar desto mehr verschieden, je kleiner die Gruppen von Einstellungen sind, welche durch die Ablesungen getrennt werden. Dieses bezieht sich zwar zunächst auf Beobachtungen, bei welchen nicht fremde ungünstige Umstände hinzukommen; allein ich bemerke, daß das Auge gegen jede Unvollkommenheit des Sehens so empfindlich ist, daß ein Beobachter selten zu dem Ent-

schlusse kommen wird, einen Winkel zu messen, wenn diese Unvollkommenheit eine Grenze erreicht, die beträchtlich nachtheilig zu werden drohet. Aus meiner Erfahrung glaube ich im Gegentheile folgern zu dürfen, daß man häufig geneigt ist, einen Mangel an Eleganz der Bilder im Fernrohr, der auf die Sicherheit des Zielens keinen beträchtlichen Einfluß hat, als eine erhebliche Fehlerursache anzusehen. Ich glaube daher, daß das, was ich über den Werth des Bruches $\frac{b}{a}$ gesagt habe, nicht sehr eng beschränkt, sondern auf alle Fälle, in welchen man Winkel zu beobachten pflegt, ausgedehnt werden darf.

7.

Um die Berechnungsart der Beobachtungsreihen, welche mit einem häufig angewandten Vervielfältigungsinstrumente gemacht worden sind, näher kennen zu lernen, habe ich mich bemühet die mittleren Fehler der Einstellungen und Ablesungen dieses Instrumentes auszumitteln. Es ist dieses ein 12zolliger Theodolit von *Pistor*, der dem Königl. Preuss. Generalstabe gehört und zu einem beträchtlichen Theile seiner Arbeiten benutzt worden ist. Die Werkstatt, in welcher dieser Theodolit verfertigt worden ist, hat auch bei diesem Instrumente ihren unbestrittenen Ruhm, vorzügliche schöne, fleißige Arbeit zu liefern bewährt. Das Fernrohr hat 16 Zoll Brennweite, 16 Linien Oeffnung und 27malige Vergrößerung; die Theilstriche sind höchst regelmäfsig und gleich und werden, durch jeden der 4 Nonien, von 5 zu 5" abgelesen.

Ich habe zuerst den Werth von $\alpha x + \beta \beta$, dann α abge sondert, zu bestimmen gesucht. Das erstere erlangt man ohne Schwierigkeit durch häufig wiederholte Beobachtungen eines einfachen Winkels zwischen zwei deutlichen irdischen Punkten, indem dem 1^{ten} Art. zufolge, der mittlere Fehler den Beobachtungen dieser Art verrathen $= \sqrt{2\alpha\alpha + 2\beta\beta}$ ist. Um ihn zu bestimmen hat Herr Lieutenant *Kulenkamp*, der dasselbe Instrument seit einigen Jahren anwendet, 55 Beobachtungen, an drei verschiedenen Winkeln, immer auf anderen Punkten der Theilung, theils auf dem Dreieckspunkte *Algeberg*, theils hier auf der Sternwarte gemacht. Die Summe der Quadrate der Unterschiede von den mittleren Werthen der drei Winkel, findet sich aus diesen Beobachtungen $= 397,60$, also das Quadrat des mittleren Fehlers $= 7,6461$ und

$$\alpha x + \beta \beta = 3,8231.$$

Die von β getrennte Bestimmung von α habe ich auf das Prinzip gegründet, daß man ein stärkeres Fernrohr schärfer auf das Fadennetz eines schwächeren richten kann, als das schwächere auf das Fadennetz des stärkeren. Der Theo-

dolit wurde im Meridian des Meridiankreises aufgestellt und sein Fernrohr auf die Kreuzfäden in diesem Instrumente gerichtet; dann wurde die Lage des Meridianfernrohrs, durch mehrmals wiederholte Anwendung der Schraube eines der Mikroskope, welche, Behufs der Zonenbeobachtungen, an den Pfeilern befestigt sind, bestimmt; endlich wurde das Fernrohr des Meridiankreises auf das Fadennetz des Theodoliten gerichtet und der Unterschied seiner nunmehrigen Lage von der früheren, genau so wie vorher gemessen. Dieser Unterschied entsteht aus der Zusammenwirkung dreier Ursachen, nämlich der Unvollkommenheiten der Einstellungen, sowohl des schwächeren als des stärkeren Fernrohrs, und der Unvollkommenheit der Messung des Unterschiedes durch das Mikroskop. Die letzte Ursache kann man aber absondern, indem man die Unsicherheit jeder Einstellung des Mikroskops durch häufig wiederholte Einstellungen untersucht; die beiden ersteren kann man gleichfalls voneinander trennen, indem man die Sicherheit der Einstellung jeder der beiden Fernröhre seiner Vergrößerung proportional annimmt.

Der Unterschied der Einstellungen des kleineren Fernrohrs auf das größere und des größeren auf das kleinere ist 23 Mal gemessen worden:

+ 0,34	+ 0,58	+ 0,21
— 0,10	— 0,10	+ 0,58
+ 0,21	— 0,14	— 0,82
— 1,40	+ 1,17	— 1,68
+ 0,07	+ 0,17	+ 0,03
— 0,10	+ 0,65	+ 0,10
+ 0,34	— 0,17	— 0,51
— 0,10	+ 0,82	

Die Summe der Quadrate dieser Unterschiede ist 9,3041; das Quadrat des mittleren Werthes derselben = 0,4045. Auf Rechnung der Messungen mit dem Mikroskope kommt hier von 0,0842, und für die Einstellungen beider Fernröhre bleibt 0,3203 übrig. Das größere Fernrohr vergrößert 280, das kleinere 27 Mal. Das Quadrat des mittleren Einstellungsfehlers des Fernrohrs des Theodoliten ist daher

$$\alpha\alpha = \frac{(280)^2}{(280)^2 + (27)^2} \cdot 0,3203 = 0,3173.$$

Zieht man diesen Werth von $\alpha\alpha$ von der früher erhaltenen Gleichung ab, so bleibt

$$\beta\beta = 3,5058$$

übrig. Die mittleren Fehler der Einstellungen und Able-
sungen des Pistorschen Theodoliten sind daher

$$\alpha = 0'',563; \quad \beta = 1'',872.$$

Es ist wirklich auffallend, daß ein so kleines Fernrohr, wie das des Theodoliten ist, eine so große Sicherheit der Einstellung gewährt; die angeführten Beobachtungen lassen aber über die nahe Richtigkeit dieser Bestimmung keinen

Zweifel. Indessen sind diese Beobachtungen an den sich völlig scharf und ruhig zeigenden Fäden des Meridiankreises gemacht, während die Anwendungen des Instrumentes zu geodätischen Zwecken oft unter weniger günstigen Umständen gemacht werden müssen, welchen ein größerer Werth von α zukömmt. Wie groß dieser anzunehmen sei, damit er einem mittleren Zustande der äußeren Umstände entspreche, ist, wie man leicht bemerkt, eine Frage, zu deren Beantwortung die Data fehlen. Allein wenn die Regel befolgt wird, unter auffallend unvortheilhaften Umständen nicht zu beobachten, so wird, der im 6ten Art. gemachten Bemerkung gemäß, der Werth von α , meiner Meinung nach, wenigstens nicht stark vergrößert werden dürfen; um meine Ansicht hiervon bestimmter anzugeben, füge ich hinzu, daß ich glaube, daß einer wirklich gemachten Beobachtungsreihe nicht leicht ein mehr als um die Hälfte vergrößerter Werth von α zukommen wird. Die willkürliche Wahl eines bestimmten Werthes, welche der Berechnung der Beobachtungen vorangehen muß, werde ich, aus diesem Grunde, so treffen, daß ich für $\frac{b}{a} = \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}$, welches, den angeführten Bestimmungen zufolge = 0,0905 ist, die runde Zahl 0,2 annehme, wodurch der mittlere Einstellungsfehler auf 0'',837 gebracht wird.

Dieser Annahme zufolge wird

$$k = 1 + \frac{h}{5}$$

und es hat nun kein Hinderniß mehr, die mit dem untersuchten Instrumente gemachten Beobachtungen, den im 5ten Art. gegebenen Formeln gemäß zu berechnen. Um dieses anschaulich zu machen, will ich den Fall einer 20fachen Vervielfältigung eines Winkels in Zahlen entwickeln; ich werde dabei zuerst annehmen, daß zwischen jeder einzelnen Beobachtung abgelesen ist; dann von 2 zu 2, 4 zu 4, 5 zu 5, 10 zu 10 und endlich nur am Anfange und am Ende; ich werde also nach und nach

$$h = 1, 2, 4, 5, 10, 20 \text{ und } n = 20, 10, 5, 4, 2, 1$$

setzen.

$$\text{I. } h = 1; \quad n = 20; \quad k = 1,2.$$

$$Nx = 504,53 d_{20} + 270,76 d_{18} + 145,31 d_{16} + 77,97 d_{14} \\ + 41,83 d_{12} + 22,42 d_{10} + 11,97 d_8 + 6,32 d_6 \\ + 3,18 d_4 + 1,33 d_2$$

$$N = 19256,04$$

$$\text{Gewicht} = 12,61; \quad \text{mittl. Fehler} = 0,282.$$

$$\text{II. } h = 2; \quad n = 10; \quad k = 1,4.$$

$$2Nx = 76,317 d_{10} + 32,044 d_8 + 13,404 d_6 + 5,486 d_4 \\ + 1,960 d_2$$

$$N = 1125,81$$

$$\text{Gewicht} = 12,20; \quad \text{mittl. Fehler} = 0'',286.$$

III. $h = 4; n = 5; k = 1,8.$

$$4Nx = 19,6825 d_5 + 5,8187 d_3 + 1,2650 d_1$$

$$N = 117,1336$$

$$\text{Gewicht} = 11,79; \text{mittl. Fehler} = 0'',291.$$

IV. $h = 5; n = 4; k = 2,0.$

$$5Nx = 13,8562 d_4 + 3,4641 d_2$$

$$N = 62,3529$$

$$\text{Gewicht} = 11,67; \text{mittl. Fehler} = 0'',293.$$

V. $h = 10; n = 2; k = 3,0.$

$$20x = d_2$$

$$\text{Gewicht} = 11,41; \text{mittl. Fehler} = 0'',296.$$

Der VI Fall $h = 20; n = 1; k = 5,0$ ist von dem V, weder im Ausdrucke von x noch im Gewichte verschieden. Man kann hierbei noch bemerken, daß für einen rationalen Werth von k , sowohl die Formeln für x , als auch die Ausdrücke des Gewichtes, in rationalen Zahlen angegeben werden können, z. B. für den IV Fall:

$$90x = 4d_4 + d_2 \quad \text{Gewicht} = \frac{450}{11}b.$$

8.

Nach den Formeln des 5ten Art. können, sobald β oder b bekannt geworden ist und man für den Werth von α eine bestimmte Wahl getroffen hat, das Gewicht und der mittlere Fehler des Resultats einer Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen berechnet werden. Man kann aber durch eine Annäherung an diese Formeln eine leichtere Uebersicht erhalten. Das Gewicht ist nämlich:

$$\frac{ah}{2} \left\{ \frac{n \left[\frac{n+2}{2} \right] - (n+2) \left[\frac{n}{2} \right]}{\left[\frac{n+2}{2} \right] - \left[\frac{n}{2} \right]} \right\}$$

oder auch

$$\frac{ah}{2} \left\{ n+1 - \frac{\left[\frac{n+2}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right]}{\left[\frac{n+2}{2} \right] - \left[\frac{n}{2} \right]} \right\}$$

und wenn man für $\left[\frac{n+2}{2} \right]$ und $\left[\frac{n}{2} \right]$ ihre Ausdrücke setzt,

$$\frac{ah}{2} \left\{ n+1 - \frac{R+1}{R-1} \left(\frac{R^{n+1}-1}{R^{n+1}+1} \right) \right\}$$

Da R^{n+1} für eine einigermaßen zahlreiche Reihe von Beobachtungen eine große Zahl wird, so kann man den davon abhängigen Factor des letzten Gliedes, ohne beträchtlichen Fehler $= 1$ setzen, also den Ausdruck des Gewichtes

$$= \frac{ah}{2} \left\{ n+1 - \frac{R+1}{R-1} \right\},$$

oder auch, da

$$\frac{R+1}{R-1} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

ist,

$$= \frac{ah}{2} \left\{ n+1 - \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \right\}$$

annehmen. Dieser Ausdruck wird für jede Anzahl der Vervielfältigungen ($= hn$) desto größer, je kleiner h ist, am größten für $h = 1$; es ergibt also das größte Gewicht, welches eine Reihe von Vervielfältigungsbeobachtungen dadurch erlangt, daß man zwischen den einzelnen abliest, näherungsweise

$$= \frac{a}{2} \left\{ n+1 - \sqrt{\frac{2a}{b} + 1} \right\}$$

und den ihm entsprechenden mittleren Fehler von x

$$= \frac{\alpha \sqrt{2}}{\sqrt{\left\{ n+1 - \sqrt{\frac{2\beta\beta}{\alpha\alpha} + 1} \right\}}}$$

Das kleinste Gewicht, welches eine Ableseung am Anfange und eine am Ende ergibt, ist nach der Formel im 5ten Art.

$$= \frac{abnn}{2(nb+a)}$$

und der mittlere Fehler von x

$$= \sqrt{\left(\frac{2\alpha\alpha + \frac{2}{n}\beta\beta}{n} \right)}$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke der mittleren Fehler, mit dem durch eine eben so große Anzahl nicht-vervielfältigender Beobachtungen übrig gelassenen, welcher aus der Formel des 1sten Art.

$$= \sqrt{\left(\frac{2\alpha\alpha + 2\beta\beta}{n} \right)}$$

gefunden wird, geht hervor, in welchem Maasse die Vervielfältigungsbeobachtungen in jedem besonderen Falle im Vortheile sind. Für das oben angeführte Beispiel von 20 Beobachtungen mit dem 12zolligen Pistorschen Theodoliten, ist der kleinste mittlere Fehler des durch Vervielfältigung zu erlangenden Resultats $= 0'',282$, der größte $= 0'',296$ gefunden worden; beide sind beträchtlich kleiner als der mittlere Fehler des Mittels aus 20 voneinander unabhängigen Beobachtungen des einfachen Winkels, welchen die zuletzt gegebene Formel $= 0'',648$ bestimmt. Die Vervielfältigungsmethode ist also hier, bei ihrer ungünstigsten Anwendung um $0'',352$ und bei ihrer günstigsten um $0'',366$ im Vortheile. Für den ersten Fall hat dieser Vortheil einen einfachen Ausdruck, den ich, weil er eine Uebersicht gewährt, hier hersetzen will. Er ist nämlich

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{n} \right) \left\{ \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta} - \sqrt{\alpha\alpha + \frac{\beta\beta}{n}} \right\}}$$

oder auch

$$= \frac{\beta\beta \cdot \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{2}{n}}}{\sqrt{\left\{ \alpha\alpha + \beta\beta \right\} + \sqrt{\left\{ \alpha\alpha + \frac{\beta\beta}{n} \right\}}}$$

Man übersieht hierdurch sogleich, in welchem Maasse die Vervielfältigung der Beobachtung vor der wiederholten An-

stellung einzelner einen Vortheil voraus hat. Dieser Vortheil ist desto beträchtlicher, je weniger genau man auf dem Instrumente abliest; mit wachsender Genauigkeit der Theilungen und Ablesungen verkleinert er sich aber so sehr, daß dann der Vorzug der Vervielfältigungsmethode wenig beträchtlich wird. Hätte man statt des im 7^{ten} Art. untersuchten Instrumentes, ein anderes angewandt, welches, bei demselben Werthe von α einen nur halb so großen von β besäße, so würde der Vortheil auf der Seite der Vervielfältigungen, bei 20 Beobachtungen, im mittleren Fehler nur 0",111 betragen.

9.

Ich habe bis hierher angenommen, daß das Resultat einer Winkelbeobachtung aus keinem anderen Grunde, als aus den beiden in Rechnung gebrachten, von der Wahrheit abweichen könne. Unter dieser Annahme liegt der Vorzug der Vervielfältigungen vor der Wiederholung einzelner Beobachtungen am Tage, allein wenn ein unbedingtes Urtheil über den Vorzug der einen oder der anderen Methode in einem gegebenen Falle, gefällt werden soll, muß die Rechtmäßigkeit der Annahme vorher untersucht werden.

In Beziehung auf die einfache Beobachtung eines horizontalen Winkels, kenne ich keine Fehlerursachen außer den Unvollkommenheiten der Einstellungen und Ablesungen, diese letzteren einschließend der Theilungsfehler des Instrumentes genommen. In der That ist die ganze Operation völlig symmetrisch für beide Punkte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll; man klemmt zuerst den Kreis fest, und bewegt die gelösete Alhidade, stets in einer Richtung, nach und nach auf beide Punkte, so daß das Verfahren für den einen genau dasselbe wird wie für den anderen, und dadurch jeder Grund wegfällt, welcher befürchten lassen könnte, daß der Winkel fortwährend etwas zu groß oder etwas zu klein gemessen werde; will man sich auch gegen den Einfluß einer langsamen Drehung des Standpunktes des Instrumentes sichern, so muß man, nachdem in der Ordnung $A B$ auf beide Punkte eingestellt und abgelesen ist, zum zweitenmale in der umgekehrten $B A$ einstellen und ablesen.

Anders verhält es sich aber mit den Vervielfältigungsbeobachtungen: hier erlangt man die größere, im Vorhergehenden näher bestimmte Freiheit des Resultats von dem Ablesungsfehler, nur durch die Annahme, daß während der beiden Bewegungen des Instruments, das was ich im 1^{sten} Art. durch u und α bezeichnet habe, wirklich unverändert bleibe. Die Vervielfältigungsinstrumente sollen so gebauet werden, daß Grund vorhanden ist, auf diese Un-

veränderlichkeit zu rechnen; die mechanischen Künstler scheinen auch vorzüglich hierauf ihre Aufmerksamkeit gerichtet zu haben. Indessen läßt sich einerseits die Möglichkeit einer kleinen Veränderung nicht läugnen, und andererseits muß man zugeben, daß ein directes Prüfungsmittel der Unveränderlichkeit nicht vorhanden ist. Denn durch eine Wiederholung der Ablesung nach der Drehung des mit der Alhidade zusammengeklebten Kreises kann man die unveränderte relative Lage beider, innerhalb einer Grenze, welche die Kraft der Ablesungen überschreitet und welche man nur durch die Methode der Vervielfältigungen zu überschreiten hofft, nicht erkennen; für die Unveränderlichkeit der Lage des Kreises während der alleinigen Drehung der Alhidade, ist noch weniger ein Prüfungsmittel vorhanden, ohne daß man behaupten kann, daß es hier so unnöthig wäre, als bei der ganz symmetrisch gemachten Beobachtung eines einfachen Winkels. Ich habe keinen Grund, zu glauben, daß dergleichen Veränderungen bei den besseren Vervielfältigungsinstrumenten, z. B. den nach *Reichenbachs* Muster gebaueten Azimuthal-Theodoliten, wirklich vorhanden sind; glaube aber, daß, wenn völlig sichere und selbst über die geringsten Kleinigkeiten entscheidende Prüfungsmittel vorhanden wären, man nicht unterlassen würde, dadurch direct zu entscheiden, ob die Federung des Metalls, oder der Spielraum der Drehungsaxe in ihrer Hülse, durchaus ohne nachtheilige Wirkung sind. In Ermangelung eines solchen Mittels, würde man sich durch den Erfolg davon überzeugen, wenn man eine Anzahl einfach gemessener Winkel auch durch Vervielfältigungen misst und die Resultate beider Methoden nicht auf eine Art verschieden findet, die zur Annahme einer neuen, immer in einem Sinne wirkenden Fehlerursache nöthigt; auch die Summe der drei Winkel eines Dreiecks wird das Nichtvorhandensein einer solchen Ursache zeigen können. Immer aber muß eine sehr große Anzahl von Beobachtungen gemacht werden, wenn sie auch über Brüche von Secunden, die hier allein zweifelhaft sein können, entscheiden soll.

Ebe diese Prüfung mit einem Instrumente vorgenommen ist, wird man, wenn man anders geneigt ist, einem Zweifel über die Unveränderlichkeit desselben während der Drehungen, einiges Gewicht beizulegen, von zwei Resultaten, welche gleiche mittlere Fehler besitzen, deren einer aber auf einfachen, der andere auf vervielfältigten Beobachtungen beruhet, dem ersteren das meiste Vertrauen schenken müssen. Allein dieser Fall kömmt in der geodätischen Praxis nicht leicht vor, vielmehr wird man, in der Zeit, die man auf die Beobachtung eines Winkels wenden kann, durch die Vervielfältigungsmethode einen kleineren mittl. Fehler

erlangen, als durch einfache Messungen. Wenn also zwischen beiden Methoden gewählt werden soll, so ist zu entscheiden, ob der Gewinn, den man durch die Anwendung der Vervielfältigungen, in der Verkleinerung der zufälligen Fehler immer hat, groß genug ist, um die Furcht vor beständigen, aus dem Instrumente selbst hervorgehenden Fehlern zum Schweigen zu bringen. Man sieht aus dem Vorhergehenden, in welchem Maasse ein größeres, schärfere Ablesungen gewährendes Instrument, den Vortheil auf der Seite der Vervielfältigungen verkleinert; für ein solches Instrument kann, selbst bei einer mäßigen Anzahl der Beobachtungen, dieser Vortheil so klein werden (z. B. Art. 8 am Ende) daß man nicht leicht geneigt sein wird, für ihn irgend etwas von der Ueberzeugung der völligen Freiheit von beständigen Fehlern aufzuopfern. Es kommt auch noch die Frage in Betracht, ob einzelne und vervielfältigte Beobachtungen mit gleicher Aufmerksamkeit gemacht werden; allein ihre Beantwortung ist individuell für jeden Beobachter; für mich würde sie dem Vervielfältigen vielleicht nicht günstig sein.

Indessen entziehen sich Zweifel über die Rechtmäßigkeit der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Instruments während der Drehungen derselben, so wie auch die eben berührte individuelle Berücksichtigung des Beobachters, derjenigen Rechnung gänzlich, welche den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler auf das Resultat, an den Tag zu legen beabsichtigt. Man kann von der Sicherheit des Resultats in der letzteren Beziehung, der Natur der Sache nach, nicht auf die in der ersteren stattfindende, als auch nicht auf die Sicherheit des Resultats, ohne Beziehung, schließen. Man muß beide ganz verschiedene Seiten der Vervielfältigungsmethode der Beobachtungen im Auge behalten, wenn man, immer nur in dem besonderen Falle eines bestimmten Instruments und vielleicht auch eines bestimmten Beobachters, zwischen ihr und der Methode der einfachen Messungen eine Wahl treffen will. Das was ich in diesem Aufsatz entwickelt habe, führt die Frage dadurch auf ihre einfachste Gestalt zurück, daß es den Gewinn, den das Princip des Vervielfältigens als solches er giebt, an den Tag legt.

Bessel.

Ueber die Größe des Erdschattens bei Mondfinsternissen, nebst einigen anderen dahin gehörigen Bemerkungen.

Von den Herren *Beer* und *Mädler*.

Die von *Mayer* gegebene Regel, daß der Erdschatten um $\frac{1}{25}$ vergrößert werden müsse, ist seitdem durch keine direkten Untersuchungen aufs Neue geprüft, sondern nur immer bei Vorausberechnung dieser Erscheinung angewandt worden. Auch kennen wir nicht das Detail der *Mayer*-schen Untersuchungen, zu denen eine genauere Kenntniß der Mondoberfläche erforderlich zu seyn scheint, als zu seiner Zeit erlangt werden konnte.

Auch bietet sich die Gelegenheit zu diesen Untersuchungen selten, da nicht allein Anfang und Ende der Finsternisse in angemessener Höhe über dem Horizont erfolgen, sondern auch partiale, so wie überhaupt solche, die nicht nahe central sind, ausgeschlossen werden müssen, da im letztern Falle die Mondflecken Selten des Schattendurchschnitts beschreiben, die vom Centro sehr entfernt, und bei denen der Fehler ihrer selenographischen Lage von zu nachtheiligem Einfluß sind. Auch können selbst vorübergehende und an sich unbedeutende Witterungs-Störungen die Untersuchung vereiteln.

Bei der am 26^{ten} Decbr. 1833 eingetretenen Mondfinsternisse vereinigten sich für Berlin alle günstigen Umstände im höchsten Grade. Die einzigen heitern Stunden des

ganzen Decembers fielen in diesen Abend von 5 Uhr bis nach Mitternacht, bei leichtem Frost und mäßigem Nordwinde. Die Grenze des wahren Schattens war, wenigstens in den der Mondmitte nähern Gegenden, um höchstens 5'' im Bogen ungewiß.

Wir stellen hier nur diejenigen Mondflecke zusammen, deren Ein- und Austritt beobachtet werden konnte, und das angegebene Moment bezieht sich, wo nichts Anderes bemerkt ist, auf die Mitte des Flecks.

Sternzeit = *Tiede's* Regulator + 7^h,8.

		Beobachtete	
		Eintritte.	Austritte.
		^h ' "	^h ' "
Grimaldi	1 Rd....	3 1 15	} 5 39 16
	2 Rd....	2 43	
Cartesius.....		8 47	41 15
Aristarch.....		5 34	46 59
Kepler.....		9 55	50 20
Sinus Iridum Ostcap		12 16	53 3
Sinus Iridum Westcap		16 1	56 22
Copernicus	1 Rd....	16 27,5	57 53
	2 Rd....	18 21	59 44
Plato	1 Rd.....	21 51,5	} 6 1 50
	2 Rd.....	23 10	
Pico.....		22 22	2 27