Sopra le funzioni iperellittiche di 1.^a specie (*I^{ter} Stufe*) per $p=2$.

(Memoria V di ERNESTO PASCAL, a Napoli.)

Scopo di questa Memoria V è lo studio dettagliato delle cosiddette funzioni iperellittiche di 1.^a specie (*I^{ter} Stufe*) per $p=2$, e delle funzioni jacobiane corrispondenti.

Mi è parso indispensabile, per poter far comprendere l'indole e il valore delle funzioni che studio in questa Memoria, di premettere nei primi paragrafi un cenno sulla interessante classificazione che il KLEIN stabilisce delle funzioni iperellittiche, considerandole come funzioni appartenenti al cosiddetto gruppo di sostituzioni abeliane, o ad un sottogruppo di esso.

Stabilita così una *funzione iperellittica*, essa non sarà in generale intera negli argomenti w (integrali di 1.^a specie); però sempre sarà (e questo è un punto sostanziale della teoria delle trascendenti) il quoziente di funzioni *intere* che chiameremo *funzioni jacobiane*.

Definiti certi speciali sottogruppi del gruppo abeliano, caratterizzati in una maniera assai semplice da un numero intero n scelto come *modulo*, si viene a stabilire una serie di funzioni di 1.^a, 2.^a, 3.^a, ... n^{ma} specie, e corrispondentemente un'altra serie di funzioni jacobiane di 1.^a, 2.^a, 3.^a, ... specie. Quelle di 2.^a specie corrispondono alle ordinarie funzioni $\wp$ di JACOBI, o, se si vuole, alle σ di KLEIN; quelle di 1.^a specie sono quelle appunto che ci proponiamo di studiare in questo lavoro.

È facile dimostrare che queste ultime [chiamate Σ dal KLEIN (*)] possono esprimersi linearmente mediante i quadrati delle σ ; quindi si presenterebbe l'idea di studiarle giovandosi degli sviluppi noti sulle σ (**); però ho creduto

(*) Math. Ann., Bd. 27, § 14.

(**) Vedi i lavori del BRIOSCHI (Lincei, serie IV, vol. 2 e 3) e il lavoro del WILTHERS (Math. Ann., Bd. 29, pag. 272).

più conveniente abbandonare quest'idea, a causa della dissimmetria che essa porterebbe nei calcoli, e studiare addirittura le Σ *direttamente*, il che costituisce certamente un procedimento più elegante.

Potendosi esprimere le quattro Σ pari linearmente mediante i quadrati di quattro speciali funzioni σ (*), si ricava che le Σ potranno prendersi come le coordinate omogenee di un punto di una superficie di KUMMER. Inoltre il quadrato della Σ_4 dispari si può esprimere razionalmente per le prime quattro Σ , e rappresenterà (eguagliato a zero) un certo fascio di sestiche tangenti lungo una curva di 12.^{mo} ordine alla superficie di KUMMER (**).

L'equazione della superficie di KUMMER in coordinate Σ come anche quella di questo fascio di superficie di 6.^o ordine hanno la rimarchevole proprietà di essere razionali negli invarianti fondamentali della sestica f ; lo studio di tali equazioni formerà l'oggetto delle Memorie seguenti.

§ 1. Gruppi di punti su di una curva iperellittica di genere 2 e loro relazione cogli integrali di 1.^a specie.

Se immaginiamo al modo solito rappresentata una curva iperellittica di genere $p = 2$, per mezzo di una superficie di RIEMANN a due falde e con sei punti di diramazione, possiamo facilmente studiare le coppie di punti esistenti su questa forma iperellittica.

Propriamente consideriamo due punti qualunque *non coniugati*, cioè che non stanno l'uno sovrapposto all'altro in ciascuna delle due falde della superficie.

Allora il teorema di RIEMANN e ROCH ci dice che tali punti non possono mai muoversi corresidualmente a loro stessi. Se invece i due punti dati sono *coniugati*, allora possono muoversi in una sola maniera corresidualmente a sè stessi.

Si ricava dunque che sulla nostra forma iperellittica esistono due specie di gruppi di due punti, cioè:

- 1.^o gruppi generali;
- 2.^o gruppi speciali, formati di due punti coniugati.

(*) Oltre di ciò la Σ_4 può esprimersi come somma dei quadrati di tutte le 10 σ pari.

(**) BURKHARDT, *Systematik*, etc. Math. Ann., Bd. 35, § 21.

Immaginiamo ora ciascuno dei due integrali w di 1.^a specie scisso nelle sue parti, reale e immaginaria:

$$w_h = \alpha_h + i\beta_h,$$

e consideriamo $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$ come le quattro coordinate di un punto in uno spazio a quattro dimensioni. Tale punto lo chiamiamo il punto (w).

Incominciamo col fissare in questo spazio il punto origine e prendiamo poi gli altri punti corrispondenti alle coordinate:

1. ^o punto	$w_1 = \omega_{11}$	$w_2 = \omega_{21}$
2. ^o " "	$w_1 = \omega_{12}$	$w_2 = \omega_{22}$
3. ^o " "	$w_1 = \omega_{13}$	$w_2 = \omega_{23}$
4. ^o " "	$w_1 = \omega_{14}$	$w_2 = \omega_{24}$

dove le ω sono al solito i *periodi degli integrali*. Allora questi quattro punti insieme al punto origine formano i vertici fondamentali di un parallelepipedo. Ogni altro vertice sarà dato da:

$$t_1(\text{I}) + t_2(\text{II}) + t_3(\text{III}) + t_4(\text{IV}),$$

dove (I) (II) (III) (IV) sono i quattro punti fissati sopra e le t sono numeri interi e propriamente hanno o il valore 0 o il valore 1.

Possiamo dividere tutto lo spazio a quattro dimensioni in tanti parallelepipedo congruenti a questo; ogni altro vertice di questi nuovi parallelepipedo sarà dato dalla stessa formola precedente dove però le t hanno il valore di un qualunque numero intero.

È chiaro che ogni punto dello spazio così diviso tiene sempre il suo congruente in un punto del parallelepipedo iniziale, nel senso che togliendo o aggiungendo opportunamente alle sue coordinate un numero *intero* di periodi, si potrà sempre giungere ad un punto del parallelepipedo primitivo. Di qui si ricava che ogni coppia di punti sulla nostra forma iperellittica trova sempre un punto (w) ad essa corrispondente nel parallelepipedo iniziale.

Consideriamo prima un gruppo *generale* di due punti. Poichè esso non può, come abbiamo detto, muoversi corresidualmente a sè stesso, così non vi sarà che solo esso che corrisponda ad un certo punto (w) del parallelepipedo iniziale; e d'altra parte è chiaro che non possono esistere due punti (w) nel parallelepipedo iniziale corrispondenti alla stessa coppia di punti (x).

Esaminiamo ora una coppia speciale $x' x''$.

Per essa gli integrali:

$$w_h = \left(\int^{x'} + \int^{x''} \right) dw_h,$$

sono ambedue zero; onde a tale coppia non corrisponde che solo il punto origine dello spazio (w).

Ma poichè la *coppia speciale* può muoversi corresidualmente a sè stessa, si ricava che *al punto origine delle w corrispondono tutte le infinite coppie di punti coniugati*.

Ora capita la domanda: Ad ogni punto del parallelepipedo delle w corrisponde sempre una coppia di punti sulla superficie di RIEMANN? In altri termini, la totalità di tutti i punti w che corrispondono a tutte le coppie possibili di punti riempiono tutto il parallelepipedo, o solo una parte di esso?

Un celebre teorema di JACOBI detto *teorema d'inversione* ci dà la risposta a questa domanda, e ci dice che non vi è punto (w) a cui non corrisponda una coppia di punti sulla superficie di RIEMANN.

Di qui si ricava che: *ogni funzione razionale simmetrica dei due punti sarà una funzione monodroma degli integrali w_1, w_2* .

Inoltre sarà chiaramente una funzione quattro volte periodica.

Poichè però, data una coppia di punti sulla superficie di RIEMANN, non vi corrisponde un solo punto (w), ma infiniti di tali punti, ciascuno in uno degli infiniti parallelepipedi congruenti, non si può dire reciprocamente che ogni funzione monodroma degli integrali w , sarà una funzione razionale dei due punti x, y (*).

Noi intanto prendiamo per ora questa definizione generale di *funzioni iperellittiche*.

Per funzioni iperellittiche si intendono quelle funzioni monodrome degli argomenti trascendenti che sono funzioni algebriche degli argomenti algebrici, intendendo per argomenti trascendenti gli integrali di 1.^a specie e i loro periodi, e per argomenti algebrici i punti della superficie di RIEMANN e i coefficienti della sestica fondamentale, cioè i moduli di tale superficie.

In seguito ci saranno utili anche i due altri risultati che inseriamo qui appresso:

1. Gli integrali di 1.^a specie sono funzioni *non diramate* dei gruppi di punti x della superficie di RIEMANN, il che significa che essi hanno sempre sul

(*) BURKHARDT, *Systematik*, etc. Math. Ann., Bd. 35, § 12.

piano x (su cui è distesa la superficie di RIEMANN) gli stessi punti di diramazione che ha la riemanniana, cioè le radici della sestica fondamentale $f(x)$.

La stessa proprietà vale dunque anche per qualunque funzione *monodroma* delle w .

2. Viceversa ogni funzione simmetrica *razionale* dei gruppi di punti è una funzione *non diramata* nello spazio a quattro dimensioni in cui estendiamo i due integrali w ; ciò dipende da quello che abbiamo detto avanti, che, cioè, tale funzione è una funzione monodroma delle w .

§ 2. Gruppo abeliano.

Se noi percorriamo colla variabile d'integrazione, nell'integrale di 1.^a specie, un cosiddetto *taglio canonico* della superficie di RIEMANN, otteniamo per risultato uno dei periodi ω .

Se invece percorriamo un cammino chiuso qualunque, otteniamo in generale una funzione lineare, con coefficienti interi, dei periodi.

Onde se noi da un sistema di tagli canonici passiamo ad un altro, i nuovi periodi (che non sono altro che il risultato dell'integrazione lungo cammini chiusi nella primitiva superficie) saranno certamente funzioni lineari degli antichi con coefficienti *interi*.

Indicando i periodi ω con *due* indici, di cui il primo rappresenta l'indice dell'integrale a cui quel periodo si riferisce, e il secondo si riferisce al *taglio canonico* percorrendo il quale si ha quel periodo, e indicando con ω gli antichi periodi e con ω' i nuovi, si ha propriamente che:

$$\omega'_{11}, \quad \omega'_{12}, \quad \omega'_{13}, \quad \omega'_{14},$$

si esprimono ciascuno linearmente e con coefficienti interi per mezzo di

$$\omega_{11}, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{13}, \quad \omega_{14}.$$

Analoghe formole sussisteranno fra le ω'_{2i} e ω_{2i} .

Si hanno dunque in tutto *due* sistemi di variabili fra loro *cogredienti*.

Analogamente è chiaro che ω'_i si esprimerà come la somma di ω_i e di una combinazione lineare con coefficienti interi delle $\omega_{i1} \omega_{i2} \omega_{i3} \omega_{i4}$.

Studiando ora un po' più da vicino queste sostituzioni lineari che chiameremo, da ora in poi, sostituzioni abeliane, si trova subito una certa funzione delle ω , la quale deve godere della proprietà invariante rispetto a queste sostituzioni.

Si sa che i periodi ω debbono soddisfare a certe relazioni bilineari. Si dimostra che i primi membri di tali relazioni godono della invariantività per la trasformazione lineare (*).

Ciò è appunto che specializza queste sostituzioni e fa che i loro coefficienti numerici interi debbono sempre soddisfare a certe relazioni facili a trovarsi (**).

Osserviamo inoltre che siccome poi anche reciprocamente gli antichi periodi debbono esprimersi linearmente per i nuovi, con coefficienti *interi*, così il determinante della sostituzione deve essere eguale a ± 1 , e unendo poi questa proprietà con quelle altre adesso stabilite, si trova propriamente che tale determinante deve essere eguale a $+1$.

Le sostituzioni di tal natura formano un gruppo che si chiama *gruppo abeliano*.

Ora si presenta il problema di determinare tutte le sostituzioni mediante cui possono esprimersi tutte quelle del gruppo abeliano.

Per $p = 2$ si può dimostrare che esistono solo *quattro* di siffatte sostituzioni elementari (***).

Noi abbiamo visto avanti che vi sono certe condizioni, perchè un sistema di sostituzioni rappresenti un cangiamento di sistema di tagli canonici della superficie di RIEMANN.

(*) BURKHARDT, Opera cit., pag. 203. La dimostrazione rigorosa si trova in JORDAN, *Traité des substitutions*.

(**) BURKHARDT, loco cit.

(***) KRAZER, Annali di Mat., vol. 12, pag. 296.

CLEBSCH-GORDAN, *Abelsche Funct.*, pag. 304.

KRONECKER, *Ueber bilineare Formen*. Berl., Monatsb., 1866. — Crelle's Journal, vol. 68, pag. 273.

JORDAN, *Traité des substitutions*, pag. 171.

KRAUSE, *Die Transf. der hyp. Funct.* Leipzig, 1886, pag. 69 e seg.

In quanto alla teoria della trasformazione vedi anche:

HERMITE, Comptes Rendus, t. 40 (1855).

BRIOSCHI, *Sur la transformation des fonct. Abeliennes*, Comptes Rendus, t. 47 (1858). — *Sulla trasformazione delle funz. iperell.* Lincei. Rend. 1885.

THOMAE, *Die allg. Transf. der θ -Funct.* Göttingen, 1864 Dissert. — Crelle, vol. 75. — Zeitschrift f. Math. und Phy., Bd. 12.

KÖNISBERGER, Crelle, vol. 65.

WEBER, Crelle, vol. 74.

DORN, *Die Form und Zahl der Repraesentanten*, etc. Math. Ann., Bd. 7.

KRAUSE, *Sur la transformation des fonctions hyp. de 1.^{er} ordre*. Acta Math., t. 3, — *Zur Transformation*, etc. Crelle, vol. 95—98. — Math. Ann. 17—25.

Tali condizioni ci si presentano dunque come necessarie. Ora si domanda: Sono esse anche sufficienti? In altri termini, ogni sostituzione abeliana rappresenta sempre un cangiamento del sistema di tagli canonici?

La risposta a questa domanda è affermativa.

Per dimostrarlo si fa vedere geometricamente che ogni cangiamento del sistema di tagli si può comporre sempre mediante quattro cangiamenti elementari che corrispondono poi alle quattro sostituzioni elementari; ogni altra sostituzione abeliana componendosi mediante queste quattro, corrisponderà dunque ad un cangiamento del sistema di tagli (*).

§ 3. Sottogruppi per congruenze.

Chiamando P in generale i periodi primitivi e P' i trasformati, le sostituzioni abeliane sono del tipo:

$$\left. \begin{aligned} w' &= w + \sum_{\beta} h_{\beta} P_{\beta} \\ P'_{\alpha} &= \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} P_{\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dove le h e c sono numeri interi.

Consideriamo ora le congruenze:

$$\left. \begin{aligned} w' &\equiv w + \sum_{\beta} h_{\beta} P_{\beta} \\ P'_{\alpha} &\equiv \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} P_{\beta} \end{aligned} \right\} \pmod{n}, \quad (2)$$

dove n sia numero intero qualunque.

Propriamente si intende che sono i numeri interi h e c che debbono considerarsi presi nel campo di modulo n ; in altri termini il simbolo (2) non sta a significare altro se non che noi vogliamo considerare come appartenenti ad una stessa categoria due sostituzioni in cui i coefficienti h e c siano rispett. fra loro congrui secondo il modulo n .

È chiaro che il caso (1) è compreso in (2) e da esso si ricava per $n = 1$.

Il numero di tutte le sostituzioni (2) fra loro *incongruenti* è finito e dipende da n . Esso è stato calcolato da JORDAN (**) ed è in generale:

$$N = (n^{2p} - 1)n^{2p-1}(n^{2p-2} - 1) \dots (n^2 - 1)n \cdot n^{2p},$$

(*) BURKHARDT, *Syst. Math. Ann*, Bd. 35, § 7. — THOMAE, *Crelle*, Bd. 75.

(**) JORDAN, *Traité des substitutions*, pag. 176.

onde per $p = 2$ si ha:

$$\begin{array}{ll} n = 2 & N = 720 \cdot 16 \\ n = 3 & N = 51840 \cdot 81 \text{ (*)}. \end{array}$$

Vediamo ora come mediante le congruenze (2) si possono formare dei gruppi di sostituzioni.

Abbiamo detto che tutte le sostituzioni (2) fra loro congruenti secondo il modulo n noi le vogliamo considerare come racchiuse nella stessa categoria.

Per $n = 1$ ciò significa che noi consideriamo addirittura come comprese in una medesima classe *tutte* le sostituzioni abeliane, e sappiamo, d'altra parte, che queste formano un gruppo.

Ma ora si domanda: Sia $n > 1$ e raccolgo al solito in una medesima classe tutte le infinite sostituzioni fra loro congruenti (cioè che i coefficienti numerici h e c sieno rispett. e separatamente fra loro congruenti); tutte queste sostituzioni formeranno un gruppo?

In generale, no. Però può benissimo accadere che sieno scelti in tal modo i coefficienti h e c , che tali sostituzioni formino precisamente un gruppo.

Se ciò accade, esso sarà evidentemente un sottogruppo del gruppo principale (*Hauptgruppe*) (quello del paragrafo precedente che si ottiene per $n = 1$), e perciò lo chiameremo *sottogruppo per congruenze* (*congruenzuntergruppe*).

Oltre di tali sottogruppi, il gruppo principale ne conterrà in generale altri; e del resto anche limitandosi a quei soli sottogruppi così definiti, si presenta il problema interessantissimo di studiare quanti e quali sono i *sottogruppi per congruenze* corrispondenti ad un dato modulo n (**).

L'indice di un sottogruppo è il numero di tutti i valori che una funzione appartenente al sottogruppo, acquista quando ad essa si applichino tutte le sostituzioni del gruppo principale.

(*) Per $p = 1$ vedi GIERSTER, Math. Ann., Bd. 18 e 26. — Per $p = 2$ vedi BOLZA, Math. Ann., Bd. 33.

(**) Per $p = 1$ vedi i seguenti lavori del Dr. FRICKE:

Ueber Systeme ellipt. Modulfunct. Dissert. zu Leipzig. Braunschweig, 1886.

Ueber die substitutionsgruppen, etc. Math. Ann., Bd. 28, pag. 99.

Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe. Math. Ann., Bd. 29, pag. 98.

Ueber die ausgezeichneten Untergruppen, etc. Math. Ann., Bd. 30, pag. 345.

Ueber ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der ellipt. Modulfunct. Math. Ann., Bd. 31, pag. 227.

Vedi poi anche i lavori del KLEIN (Math. Ann., Bd. 14, 15, 17), HURWITZ (Math. Ann., Bd. 27), etc.

Se i gruppi risultano di un numero *finito* di sostituzioni, allora l'indice del sottogruppo si ottiene, come si sa, dividendo il numero delle sostituzioni del gruppo per il numero di quelle del sottogruppo. Ma nel nostro caso i gruppi risultano di un numero infinito di sostituzioni; in tal caso l'indice si trova nel seguente modo.

Sieno:

$$1 \quad S_1 \quad S_2 \dots,$$

tutte le sostituzioni del sottogruppo. Si prenda una sostituzione T non compresa in queste e si formino:

$$T, \quad TS_1, \quad TS_2 \dots$$

Si prenda daccapo un'altra sostituzione U non compresa nè nella prima, nè nella seconda serie, e si formino:

$$U, \quad US_1, \quad US_2 \dots$$

E così di seguito. Allora il numero di tutte le linee che si verranno a formare sino ad esaurire tutte le sostituzioni del gruppo principale, rappresenterà l'*indice* richiesto. Esso in generale potrà essere *finito* o *infinito*. Per i sottogruppi che ci occorrerà di considerare in seguito, tale *indice* è sempre *finito*.

§ 4. Sottogruppi principali.

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilito che cosa si intenda per *sottogruppo per congruenze*.

Ora fra tutti i possibili di tali sottogruppi ve ne sono certi speciali che vogliamo qui studiare.

Consideriamo tutte le infinite sostituzioni abeliane congruenti secondo il modulo n a quella i cui coefficienti sono rispettivamente:

$$\left. \begin{array}{lll} h = 0, & 0, \dots & 0 \\ c = 1, & 0, \dots & 0 \\ & 0, & 1, \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ & 0, & 0, \dots & 1. \end{array} \right\} \quad (a)$$

È facile prima di tutto vedere che tali sostituzioni formano un gruppo;

infatti il prodotto di due di esse, giusta la regola generale per la formazione del prodotto di due sostituzioni lineari, ha sempre i suoi coefficienti congruenti a quelli dello schema (a), onde è sempre una sostituzione della medesima categoria.

Il sottogruppo così formato lo chiameremo: *sottogruppo principale di n.^{ma} specie (*)* (*n^{ter} Stufe*).

Così si vede che il sottogruppo principale di 1.^a specie non è altro che il gruppo totale abeliano.

La sostituzione i cui coefficienti sono quelli dello schema (a) la chiameremo la istituzione *identica*.

Esaminiamo ora se *l'indice* del *sottogruppo principale* è finito o infinito.

Si può far vedere che una sostituzione abeliana S moltiplicata per una sostituzione del sottogruppo principale dà luogo ad un'altra sostituzione S' congruente ad S secondo il modulo n , e che viceversa due sostituzioni S, S' fra loro congruenti, possono ricavarsi l'una dall'altra moltiplicando S per una certa sostituzione del sottogruppo principale. Onde una funzione F appartenente al sottogruppo principale acquista lo stesso valore per due sostituzioni S, S' fra loro congruenti. Onde infine il numero dei valori di F , cioè *l'indice* richiesto non è altro che il numero N da noi determinato nel paragrafo precedente.

§ 5. Le funzioni iperellittiche come funzioni di gruppi.

Nel § 1 abbiamo definite le funzioni iperellittiche come quelle funzioni *monodrome* negli argomenti trascendenti, le quali sono *algebriche* negli argomenti algebrici.

Ora noi osserviamo due cose:

1.° Che gli argomenti algebrici restano inalterati se le w si aumentano di multipli di periodi;

2.° Che gli argomenti algebrici sono indipendenti dal sistema di tagli canonici della superficie di RIEMANN.

Onde si ricava che quelle tali funzioni iperellittiche di cui abbiamo parlato, che sono *razionali* negli argomenti algebrici, sono funzioni che restano inalterate per tutte le sostituzioni del gruppo abeliano, cioè appartengono a quel gruppo.

(*) KLEIN, Lezioni, semestre d'estate 1887. — BURKHARDT, *Systematik*, pag. 225 e seg.

Se ora consideriamo in generale le funzioni *algebriche* degli argomenti algebrici, esse per tutte le sostituzioni abeliane acquisteranno un numero *finito* di valori, quindi in generale apparterranno ad un sottogruppo di ordine *finito*.

Le funzioni iperellittiche quindi ci si presentano qui come funzioni monodrome delle w e funzioni appartenenti a certi sottogruppi del gruppo abeliano, o al gruppo abeliano stesso.

Limitandoci a considerare solo quei sottogruppi che abbiamo chiamati *principali* e che sono appunto di *indice finito*, abbiamo una serie di funzioni iperellittiche di 1.^a, 2.^a, ... n^{ma} specie secondochè appartengono a sottogruppi principali di 1.^a, 2.^a, ... n^{ma} specie.

È da questo punto di vista che noi ci poniamo così sotto gli occhi tutto il quadro delle funzioni iperellittiche. Però ci si presenta qui la domanda: Le funzioni qui definite sono *intere* negli argomenti trascendenti?

Risponderemo che non lo sono; però, e questo è un punto fondamentale della teoria delle trascendenti, sono sempre il quoziente di funzioni *intere* che chiameremo funzioni jacobiane di 1.^a, 2.^a, ... n^{ma} specie.

Le funzioni jacobiane di 2.^a specie sono le σ di KLEIN, quelle di 1.^a specie sono le Σ (*).

Queste tali funzioni jacobiane non possono però includersi nella classificazione generale da noi data sopra, in quantochè esse non appartengono ad un sottogruppo di *indice finito* (**).

§ 6. Le funzioni iperellittiche ridotte a covarianti.

Prendiamo per fondamento anzichè gli integrali w coi periodi ω , i cosiddetti integrali *normali* v , cioè tali combinazioni delle w che i quattro periodi di v_1, v_2 sui due tagli canonici A_1, A_2 di 1.^a specie (***) si riducano rispettivamente a

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1, \end{array}$$

mentre gli altri quattro sieno:

$$\begin{array}{cc} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22}. \end{array}$$

(*) KLEIN, *Hyp. Sigmafunct.* Math. Ann., Bd. 27, pag. 462.

(**) BURKHARDT, *Syst.*, pag. 245.

(***) BURKHARDT, *Opera cit.*, pag. 202.

Allora consideriamo una funzione monodroma di tali argomenti trascendenti *normali*.

Poichè questi godono della proprietà invariantiva rispetto alla trasformazione lineare della sestica fondamentale f , la stessa proprietà dovrà avere la funzione monodroma di cui si parla.

Onde le funzioni iperellittiche definite nel paragrafo precedente diventano covarianti o invarianti algebrici di f .

Possiamo dunque fare questa notevole riduzione al problema; cioè anzichè considerare funzioni algebriche qualunque delle coppie di punti della superficie di RIEMANN, considerare in ispeciale tali funzioni che godano della proprietà invariantiva rispetto alla trasformazione lineare della sestica fondamentale.

Tali altre funzioni iperellittiche le potremo poi esprimere a loro volta come quozienti di funzioni *jacobiane*, godenti di un'analoga proprietà invariantiva, e che potranno quindi considerarsi come dei *covarianti trascendenti*. Così nel caso di *specie* 2, le funzioni Θ generali rappresentano le funzioni jacobiane *non covarianti*, e invece le σ di KLEIN sono proprio queste tali funzioni covarianti.

Tutto ciò che abbiamo detto nei paragrafi precedenti in quanto alle relazioni fra le funzioni iperellittiche e i gruppi e sottogruppi abeliani, resta perfettamente inalterato, giacchè queste nuove funzioni sebbene immediatamente funzioni di v e τ pure sono *mediatamente* funzioni delle w e ω e quindi soddisfanno a tutte le cose dette avanti.

§ 7. Funzioni Jacobiane di 1.^a specie Σ .

Sia $\chi(x' x'')$ la forma *media* (*mittelform*) introdotta da KLEIN (*), e propriamente sia quella *forma media* formata con quello speciale integrale di 3.^a specie chiamato Q , e sia $\varphi(x' x')$ un covariante razionale simmetrico in $x' x''$, e di grado 3δ (δ è numero intero positivo), e che inoltre diventi 0 ^{δ} per $x' = x''$ (**).

(*) Göttinger Nachrichten, 1887, pag. 518. — Math. Ann., Bd. 36. — Vedi anche le mie Memorie I e III.

(**) Si noti che qui consideriamo ciascuna delle x' , x'' come coppia di variabili omogenee, cioè per x' intendiamo la coppia di variabili omogenee $x'_1 x'_2$, e così per x'' . Inoltre si noti che φ non deve essere razionale che sulla superficie di RIEMANN, quindi può contenere $\sqrt{f(x')}$, $\sqrt{f(x'')}$ che su questa sono razionali.

Formiamo l'espressione:

$$\Sigma^{(\delta)} = [\chi(x' x'')]^\delta \varphi(x' x'').$$

Ricordando allora le formole di periodicità della forma media χ , si trova subito che la Σ soddisfa alla seguente equazione funzionale:

$$\Sigma^{(\delta)}(w + \omega) = \Sigma^{(\delta)}(w) e^{2\delta \Sigma \eta \left(w + \frac{\omega}{2} \right)}.$$

Il numero δ lo chiameremo *ordine* della funzione jacobiana di 1.^a specie Σ (*).

Ricordando la proprietà invariantiva della forma χ costruita per l'integrale normale di 3.^a specie Q , si ha che Σ è un *covariante trascendente* di f .

Le Σ sono funzioni dei punti $\frac{x'_1}{x'_2}, \frac{x''_1}{x''_2}$ della superficie di RIEMANN, e quindi sono funzioni degli integrali w di 1.^a specie come risulta dal teorema d'inversione.

Però si può dimostrare dippiù, che cioè esse sono addirittura funzioni *monodrome e intere* delle w . Queste due asserzioni si possono dimostrare con un metodo perfettamente analogo a quello tenuto dal BURKHARDT per dimostrare che le funzioni σ sono monodrome e intere nelle w (**).

Si incomincia col far vedere che le Σ possono svilupparsi in serie secondo le potenze ascendenti di $x' - \overline{x''}$, le quali serie convergono in un campo X piccolissimo attorno al punto $\overline{x''}$, cioè al punto coniugato di x'' .

Ora nel campo che nello spazio delle w corrisponde ad X , le differenze $x' - \overline{x''}$ possono svilupparsi in serie secondo le potenze *interi positive* delle w_1, w_2 . Lo stesso dunque potrà farsi delle Σ . Con una facile considerazione si può poi mostrare che il campo in cui convergono queste ultime serie può estendersi indefinitivamente. Del resto che Σ sia una funzione *intera* delle w può dimostrarsi anche nella seguente maniera.

Essendo la forma media χ eguale a

$$\frac{e^{\overline{Q}(x' x'')}}{\sqrt[2]{f(x') f(x'')}} ,$$

si vede che Σ può diventare ∞ solo dove Q diventa ∞ , ovvero dove il denominatore $\sqrt[2]{f(x') f(x'')}$ diventa zero.

(*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 27, pag. 463.

(**) BURKHARDT, *Hyp. Sigmafunct.* Math. Ann., Bd. 32, pag. 431, § 23.

Ora Q diventa ∞ solo quando $x' = x''$ e propriamente in tal caso e^Q diventa ∞^4 ; ma poichè φ è tale che per $x' = x''$ diventa 0^2 si ha che Σ resta finito.

Così $\sqrt{f(x')f(x'')}$ diventa zero solo quando o x' ovvero x'' cadono in un punto di diramazione; ma allora e^Q diventa anche 0^4 , perchè e^Q diventa ∞ logaritmicamente col residuo -1 ; dunque anche in questo caso l'espressione resta finita. Da queste due considerazioni risulta dunque che Σ è una funzione intera delle w (*).

Inoltre le Σ sono *intere e monodrome* anche nei coefficienti della sestica fondamentale; quindi riunendo tutte queste proprietà si ricava che esse possono svilupparsi in serie secondo le potenze ascendenti intere positive delle w ; inoltre i diversi termini dello sviluppo debbono essere covarianti interi e razionali della sestica fondamentale.

§ 8. Sistema completo di funzioni iperellittiche e jacobiane di 1.^a specie.

È chiaro che il quoziente di due funzioni jacobiane di 1.^a specie (definite come nel paragrafo precedente) costituisce una funzione iperellittica di 1.^a specie.

Si può dimostrare che esiste un sistema completo di funzioni iperellittiche di 1.^a specie, cioè un sistema di tali funzioni che ogni altra è esprimibile razionalmente mediante quelle (**).

È facile trovare tale sistema completo, se noi per un momento prendiamo la definizione antica di funzioni iperellittiche, cioè quella nella quale non si suppone che esse debbano avere la proprietà invariantiva. Allora si tratta di trovare il sistema completo per tutte le funzioni simmetriche razionali dei due punti:

$$(x', \sqrt{fx'}) \quad (x'', \sqrt{fx''}),$$

della superficie di RIEMANN.

(*) KLEIN, Lezioni sulle funzioni iperellittiche. Göttingen, Sommersemester 1887.

(**) Ciò è analogo al fatto della esistenza di un sistema completo di covarianti e invarianti di una *forma algebrica fondamentale qualunque*. In quanto ad una dimostrazione generalissima di quest'ultimo teorema, e anzi tale che da essa si può anche dedurre quella del teorema del testo, vedi due recenti Note del Dr. HILBERT nei Göttinger Nachrichten di dicembre 1888 e gennaio 1889.

Tale sistema completo risulta di (*):

$$x' + x'', \quad x' x'', \quad \sqrt{f x'} \sqrt{f x''}, \\ \sqrt{f x'} + \sqrt{f x''},$$

di cui le tre prime sono *pari*, cioè non cambiano se ciascuno dei due punti si muta nel suo coniugato, e l'ultima è *dispari* cioè muta di segno se si fa il detto mutamento. È chiaro che in un sistema completo, di funzioni dispari non ve ne può essere più di *una*, perchè se ve ne fossero *due*, il loro prodotto sarebbe una funzione *pari*, e quindi una di esse si esprimerebbe razionalmente mediante l'altra e mediante funzioni pari.

Così per es. nel sistema completo precedente è inutile includere l'altra funzione dispari:

$$x' \sqrt{f x'} + x'' \sqrt{f x''}.$$

Le funzioni di cui si parla si chiamano *pari* e *dispari* per la seguente ragione. Esse sono, come si sa dai paragrafi precedenti, funzioni delle w ; ora le w mutano di segno quando ambedue i punti $x' x''$ si mutano nei loro coniugati; quindi le funzioni da noi chiamate pari e dispari, sono precisamente tali considerate come funzioni delle w .

Per trovare ora il sistema completo nel caso in cui si voglia che le funzioni iperellittiche posseggano la proprietà invariante rispetto alla trasformazione lineare di f_6 , non dobbiamo fare altro che sostituire alle quattro funzioni precedenti altre quattro le quali sieno covarianti razionali, simmetrici in x' , x'' e quindi sieno esprimibili razionalmente mediante le quattro funzioni precedenti, e tali che viceversa le quattro funzioni precedenti sieno esprimibili razionalmente mediante le nuove. Solo nel caso che si verifichi anche quest'ultima condizione, si potrà dire che il sistema nuovo è sostituibile all'antico. Ora sieno l_x^2 , m_x^2 , n_x^2 i noti tre covarianti quadratici di f_6 e formiamo:

$$X_1 = (x' x'')^2 l_{x'} l_{x''}; \quad X_2 = (x' x'')^2 m_{x'} m_{x''}; \quad X_3 = (x' x'')^2 n_{x'} n_{x''},$$

$$X_4 = \sqrt{f(x')} \sqrt{f(x'')} + a_{x'}^3 a_{x''}^3, \quad X_5 = a_x \{ a_{x'}^4 a_{x''} \sqrt{f(x'')} - a_{x''}^4 a_{x'} \sqrt{f(x')} \} (x' x'')^5,$$

dove adesso si intendono variabili omogenee, cioè introdotte $x'_1 x'_2$; $x''_1 x''_2$ e quindi propriamente per $f(x')$ si intende $f(x'_1 x'_2)$.

Se formiamo i rapporti di X_i a ciascuna delle tre prime X , e poi di X_5 al prodotto delle stesse, abbiamo quattro funzioni formanti un sistema che si

(*) BURKHARDT, *Syst.*, pag. 230,

può sostituire all'antico; infatti ciascuna delle antiche potrà esprimersi razionalmente mediante queste, come è facile verificare.

Si noti che per la formazione di X_5 è stata necessaria l'introduzione del punto ausiliario t , altrimenti non sarebbe stato possibile costruire un'espressione invariante (*).

Del resto una X_5 costruita con un'altra t si esprimerà razionalmente mediante quella di sopra.

Se ora moltiplichiamo le quattro prime X per la forma media χ (vedi paragrafo precedente) e l'ultima per χ^3 , si hanno cinque funzioni jacobiane degli ordini rispett. 1 e 3.

Le nostre quattro funzioni iperellittiche sono allora evidentemente quozienti di funzioni jacobiane.

Poichè poi ogni altra funzione iperellittica si esprime razionalmente sempre mediante le quattro dette, si ha per risultato il teorema già annunciato (§ 5):

Ogni funzione iperellittica di 1.^a specie si esprime sempre come il quoziente di funzioni jacobiane.

Se gli integrali di 1.^a specie anzichè porli sotto la forma (vedi § 1):

$$w_h = \left(\int^x + \int^{x''} \right) dw_h,$$

li poniamo sotto la forma equivalente:

$$w_h = \int_y^x dw_h,$$

allora le cinque forme X diventano:

$$X_1 = (xy)^2 l_x l_y$$

$$X_2 = (xy)^2 m_x m_y$$

$$X_3 = (xy) n_x n_y$$

$$X_4 = \sqrt{f(x)} \sqrt{f(y)} + a_x^3 a_y^3$$

$$X_5 = (xy)^5 a_t \{ a_x a_y^4 \sqrt{f(x)} + a_y a_x^4 \sqrt{f(y)} \};$$

le funzioni jacobiane corrispondenti le chiameremo Σ cogli stessi indici.

(*) Vedi BURKHARDT, Opera cit., pag. 234. Si potrebbe costruire una X_5 che contenga il punto t non più linearmente: e infatti il BURKHARDT nell'Opera citata adopera una X_5 che contiene t a terza potenza. Per i nostri sviluppi ci sarà più semplice adoperare la nostra X_5 , la quale è quella appunto usata nelle citate lezioni di KLEIN (Sommersem. 1887).

Nei paragrafi seguenti ci proponiamo di studiare gli sviluppi delle Σ così formate in funzione degli integrali w .

Le prime quattro sono funzioni pari, e l'ultima è dispari; quindi, per le cose dette nel paragrafo precedente, risulta che le prime quattro potranno svilupparsi in serie secondo le potenze intere ascendenti positive pari delle w , e l'ultima secondo le potenze dispari.

Chiamando $[w]^{2\nu}$ un termine dello sviluppo di una delle prime quattro Σ , si può trovare tale termine di che grado è nei coefficienti di f .

Osserviamo che essendo l, m, n rispett. dei gradi 3, 5, 7, le $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ debbono venire rispettivamente dei gradi 2, 4, 6, 0; inoltre Σ_5 è di grado $-\frac{3}{2}$.

Ora le w sono ciascuna di grado $-\frac{1}{2}$ onde $[w]^{2\nu}$ viene:

di grado	$\nu + 2$	per	Σ_1
"	$\nu + 4$	"	Σ_2
"	$\nu + 6$	"	Σ_3
"	ν	"	Σ_4

e un termine $[w]^{2\nu+1}$ di Σ_5 viene poi di grado $\nu - 1$ (*).

§ 9. Sviluppo dell'integrale di 3.^a specie Q .

Nella Memoria di BURKHARDT (**) sta calcolato solo il primo termine dello sviluppo di $\overline{Q}(xy)$, quando i due punti x, y si avvicinano indefinitivamente. Per le cose che diremo in seguito ci importa di conoscere gli altri termini dello sviluppo. Ed è appunto questo l'oggetto della ricerca che intraprendiamo ora.

L'espressione di Q è:

$$Q = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{\sqrt{f(z)} \sqrt{f(z')} + a_z^{p-1} a_{z'}^{p-1}}{2(zz')^2} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \frac{dz'}{\sqrt{f(z')}}.$$

Poniamo:

$$z = x + \zeta$$

$$z' = \bar{x} + \zeta',$$

dove $\bar{x}$ è il coniugato di x .

(*) KLEIN, Lezioni cit.

(**) *Hyp. Sigmaf. Math. Ann.*, Bd. 32, pag. 407; formola (57).

Allora lo sviluppo di $a_x^{p-1} a_{x'}^{p-1}$ sia:

$$a_x^{p-1} a_{x'}^{p-1} = f(x) [1 + B_1 \zeta + B'_1 \zeta' + B_2 \zeta^2 + B'_2 \zeta \zeta' + B''_2 \zeta'^2 + B_3 \zeta^3 + B'_3 \zeta^2 \zeta' + B''_3 \zeta \zeta'^2 + B'''_3 \zeta'^3 + \dots],$$

e quello di $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \frac{1}{\sqrt{f(x')}}$ sia:

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)} \sqrt{f(x')}} = -\frac{1}{f(x)} [1 + A_1 \zeta + A'_1 \zeta' + A_2 \zeta^2 + A'_2 \zeta \zeta' + \dots].$$

Sviluppando dunque il numeratore dell'integrando di Q , è facile vedere che restano solo i termini a cominciare da quello di 2.^o ordine in ζ e ζ' . Inoltre tali termini debbono risultare tutti divisibili per $(\zeta - \zeta')^2$ (*) e inoltre debbono essere simmetrici in ζ e ζ' .

Quindi possiamo dire che i termini di 3.^o grado nelle ζ e ζ' debbono raccogliersi in

$$M(\zeta - \zeta')^2 (\zeta + \zeta'),$$

non essendovi altra funzione simmetrica di 1.^o grado in ζ e ζ' , che la loro somma. E per trovare M basta allora evidentemente trovare semplicemente il coefficiente di ζ^3 nello sviluppo generale.

Riguardo ai termini di 4.^o grado essi dovranno riunirsi a formare:

$$P(\zeta - \zeta')^2 (\zeta^2 + \zeta'^2) + P'(\zeta - \zeta') \zeta \zeta',$$

potendosi tutte le altre funzioni simmetriche di 2.^o grado in ζ e ζ' ridurre solo alle due:

$$(\zeta^2 + \zeta'^2) \quad \text{e} \quad \zeta \zeta'.$$

Per trovare P possiamo dunque trovare il coefficiente di ζ^4 e per trovare P' possiamo trovare il coefficiente di $\zeta^3 \zeta'$ al quale aggiungiamo il doppio di P .

Si ha dunque:

$$Q = -\frac{1}{2} \int_y^x \int_{y'}^{x'} [N + M(\zeta + \zeta') + P(\zeta^2 + \zeta'^2) + P' \zeta \zeta' + \dots] d\zeta d\zeta',$$

dove:

$$N = A_2 + A_1 B_1 + B_2$$

$$M = A_3 + A_2 B_1 + A_1 B_2 + B_3$$

$$P = A_4 + A_3 B_1 + A_2 B_2 + A_1 B_3 + B_4$$

$$P' = A'_4 + A_3 B'_1 + A'_3 B_1 + A_2 B'_2 + A'_2 B_2 + A_1 B'_3 + A'_1 B_3 + B'_4 + 2P.$$

(*) BURKHARDT, Opera cit., pag. 390.

Integrando e supponendo poi $\zeta' = \zeta$ si ha:

$$\overline{Q}(x y) = -\frac{1}{2} \left[N\zeta^2 + M\zeta^3 + \left(\frac{2}{3} P + \frac{1}{4} P' \right) \zeta^4 + \dots \right].$$

Resta a calcolare i coefficienti N, M, P, P' di cui solo il primo è calcolato nel lavoro citato di BURKHARDT.

I coefficienti B, A hanno i seguenti valori:

$$B_1 = B'_1 = \frac{1}{2} \frac{f'}{f}$$

$$B_2 = B''_2 = \frac{p}{4(2p+1)} \frac{f''}{f}; \quad B'_2 = \frac{p+1}{2(2p+1)} \frac{f''}{f}$$

$$B_3 = B'''_3 = \frac{p-1}{24(2p+1)} \frac{f'''}{f}; \quad B'_3 = B''_3 = \frac{p+1}{8(2p+1)} \frac{f'''}{f}$$

$$B_4 = B^{IV}_4 = \frac{(p-1)(p-2)}{32 \cdot 3(2p+1)(2p-1)} \frac{f^{IV}}{f}; \quad B'_4 = B'''_4 = \frac{(p+1)(p-1)}{24(2p+1)(2p-1)} \frac{f^{IV}}{f}$$

.....

$$A_1 = A'_1 = -\frac{1}{2} \frac{f'}{f}$$

$$A_2 = A'_2 = -\frac{1}{4} \frac{ff'' - \frac{3}{2} f'^2}{f^2}; \quad A'_2 = \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2}$$

$$A_3 = A'''_3 = -\frac{1}{12} \frac{f^2 f''' - \frac{9}{2} ff' f'' + \frac{15}{4} f'^3}{f^3}$$

$$A'_3 = A''_3 = \frac{1}{8} \frac{ff' f'' - \frac{3}{2} f'^3}{f^3}$$

$$A_4 = A^{IV}_4 = -\frac{1}{48} \frac{f^3 f^{IV} - 6f^2 f' f''' + \frac{45}{2} ff'^2 f'' - \frac{9}{2} f^2 f''^2 - \frac{105}{8} f'^4}{f^4}$$

$$A'_4 = A'''_4 = \frac{1}{24} \frac{f^2 f' f''' - \frac{9}{2} ff'^2 f'' + \frac{15}{4} f'^4}{f^4}$$

.....

Con queste espressioni troviamo finalmente i richiesti valori dei coefficienti dello sviluppo di Q . Si trova:

$$\begin{aligned}
 N &= -\frac{1}{8(2p+1)f^2} [(2p+2)ff'' - (2p+1)f'^2] (*) \\
 M &= \frac{1}{8(2p+1)f^3} [-(p+1)f^2f''' + (3p+2)ff'f'' - (2p+1)f'^3] \\
 \frac{2}{3}P + \frac{1}{4}P' = R &= \frac{1}{(4p^2-1)f^4} \left[-\frac{43p^2+21p-22}{9 \cdot 64} f^3f^{IV} \right. \\
 &\quad + \frac{(43p+32)(2p-1)}{9 \cdot 32} f^2f'f''' \\
 &\quad - \frac{(29p+17)(2p-1)}{64} ff'^2f'' \\
 &\quad + \frac{(22p+15)(2p-1)}{3 \cdot 64} f^2f''^2 \\
 &\quad \left. + \frac{29(4p^2-1)}{256} f'^4 \right].
 \end{aligned}$$

Per $p=2$ si hanno le formole:

$$\begin{aligned}
 N &= -\frac{1}{40f^2} (6ff'' - 5f'^2) \\
 M &= \frac{1}{40f^3} (-3ff''' + 8ff'f'' - 5f'^3) \\
 R &= \frac{1}{15f^4} \left(-\frac{1}{3} f^3f^{IV} + \frac{59}{48} f^2f'f''' - \frac{225}{64} ff'^2f'' \right. \\
 &\quad \left. + \frac{59}{64} f^2f''^2 + \frac{435}{256} f'^4 \right).
 \end{aligned}$$

(*) BURKHARDT, loc. cit.

§ 10. Le tre funzioni jacobiane $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Giusta le cose dette nei paragrafi precedenti queste funzioni hanno la forma:

$$\Sigma_1 = \frac{(xy)^2 e^{\overline{Q}(xy)}}{\sqrt{f(x)f(y)}} l_x l_y,$$

e le altre due si ottengono da questa scambiando l con m e n .

Lo sviluppo di Σ_1 è allora per $y = x + \zeta$, il seguente:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\zeta^2}{f(x)} (l_x^2 + l_x l_1 \zeta) [1 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots] \left[1 - \frac{1}{2} N \zeta^2 - \frac{1}{2} M \zeta^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{4} N^2 \right) \zeta^4 + \dots \right] \\ &= S_2 \zeta^2 + S_3 \zeta^3 + S_4 \zeta^4 + \dots, \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{l_x^2}{f(x)} \\ S_3 &= \frac{1}{f^2} \left(f l_x l_1 - \frac{1}{2} f' l_x^2 \right) \\ S_4 &= \frac{1}{f^3} \left(-\frac{7}{40} f f'' l_x^2 + \frac{5}{16} f'^2 l_x^2 - \frac{1}{2} f f' l_x l_1 \right) \\ S_5 &= \frac{1}{f^4} \left(-\frac{11}{15 \cdot 16} f^2 f''' l_x^2 + \frac{19}{5 \cdot 16} f f' f'' l_x^2 - \frac{7}{32} f'^3 l_x^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{40} f^2 f'' l_x l_1 + \frac{5}{16} f f'^2 l_x l_1 \right) \\ S_6 &= \frac{1}{f^5} \left(-\frac{7}{6 \cdot 8 \cdot 15} f^3 f^{IV} l_x^2 + \frac{47}{15 \cdot 48} f^2 f' f''' l_x^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{21}{5 \cdot 16} f f'^2 f'' l_x^2 + \frac{113}{32 \cdot 5 \cdot 15} f^2 f''^2 l_x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{21}{8 \cdot 16} f'^2 l_x^2 - \frac{11}{240} f^3 f''' l_x l_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{19}{80} f^2 f' f'' l_x l_1 - \frac{7}{32} f f'^3 l_x l_1 \right). \end{aligned}$$

In quanto poi agli sviluppi degli integrali w si ha:

$$w_1 = - \int_y^x \frac{z_1 dz_1}{\sqrt{f(z)}} = W_1 \zeta + W_2 \zeta^2 + W_3 \zeta^3 + \dots,$$

dove:

$$W_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{f}}$$

$$W_2 = -\frac{f - \frac{1}{2} f' x_1}{f^{\frac{3}{2}}}$$

$$W_3 = -\frac{1}{6} \frac{-ff' - \frac{1}{2} ff'' x_1 + \frac{3}{4} f'^2 x_1}{f^{\frac{5}{2}}}$$

$$W_4 = -\frac{1}{4f^{\frac{7}{2}}} \left[-\frac{1}{12} \left(f^2 f''' - \frac{9}{2} ff' f'' + \frac{15}{4} f'^3 \right) x_1 - \frac{1}{4} \left(f^2 f'' - \frac{3}{2} ff'^2 \right) \right]$$

$$W_5 = -\frac{1}{5f^{\frac{9}{2}}} \left[-\frac{1}{48} \left(f^3 f^{IV} - 6f^2 f' f''' + \frac{45}{2} ff'^2 f'' - \frac{9}{2} f^2 f''^2 - \frac{105}{8} f'^4 \right) x_1 - \frac{1}{12} \left(f^3 f''' - \frac{9}{2} f^2 f' f'' + \frac{15}{4} ff'^3 \right) \right].$$

In quanto all'espressione di w_2 , essa ha una forma perfettamente analoga, salvo che mancano i termini senza x_1 , e quelli altri termini che in w_1 sono moltiplicati per x_1 , in w_2 sono invece moltiplicati per 1.

Da queste formole, insieme con quelle precedenti per lo sviluppo di Σ_1 , risulta subito che il primo termine di Σ_1 è, come del resto si può prevedere,

$$[w]_{\Sigma_1}^2 = l_w^2.$$

La parte in ζ^3 dello sviluppo di Σ_1 risulta quando in questo primo termine in luogo delle w (che stanno a 2.° grado) pongo i termini in ζ^3 rispett. dei quadrati delle w o del loro prodotto.

In altri termini il detto termine in ζ^3 risulta quando in

$$l_w^2 = l_1^2 w_1^2 + 2l_1 l_2 w_1 w_2 + l_2^2 w_2^2,$$

pongo in luogo di

w_1^2	l'espressione	$\frac{1}{f^2} \left(f x_1 - \frac{1}{2} f' x_1^2 \right)$
$w_1 w_2$	"	$\frac{1}{f^2} \left(\frac{1}{2} f - \frac{1}{2} f' x_1 \right)$
w_2^2	"	$\frac{1}{f^2} \left(-\frac{1}{2} f' \right)$

Il termine in ζ^4 di Σ risulta:

I. Se in l_w^2 pongo per w_1^2, w, w_2, w_2^2 i loro termini in ζ^4 , i quali, come è facile vedere, possono risultare in due modi, cioè:

- a) o coi prodotti dei soli termini in ζ^2 degli sviluppi delle w ;
- b) o coi prodotti dei termini in ζ con quelli in ζ^3 .

II. Se in $[w]^4$ pongo per le w i loro termini in ζ .

La prima parte la possiamo calcolare, ed è:

$$\left\{ \frac{1}{16} l_x^2 f'^2 - \frac{1}{4} l_x l_1 f f' + \frac{1}{4} l_1^2 f^2 \right\} \frac{\zeta^4}{f^3} \quad a)$$

$$\left\{ -\frac{1}{6} l_x^2 f f'' + \frac{1}{4} l_x^2 f'^2 - \frac{1}{3} l_x l_1 f f' \right\} \frac{\zeta^4}{f^3}. \quad b)$$

Sottraendo ora le espressioni a) b) da S_4 , si vede che si distruggono i termini in $f'^2 l_x^2$, e restano termini tutti divisibili per f , che debbono dunque costituire la parte seconda.

Si ha per risultato semplicemente:

$$-\frac{1}{4} (a l)^2 a_x^2 \cdot \frac{1}{f^2},$$

dove ponendo w_1, w_2 in luogo di $\frac{x_1}{\sqrt{f}}$ e di $\frac{1}{\sqrt{f}}$ si ha infine:

$$[w]_{z_1}^4 = -\frac{1}{4} (a l)^2 a_w^4.$$

Analogamente:

$$[w]_{z_2}^4 = -\frac{1}{4} (a m)^2 a_w^4$$

$$[w]_{z_3}^4 = -\frac{1}{4} (a n)^2 a_w^4.$$

Queste espressioni sono le seconde *überschiebungen* di f rispettivamente su l, m, n .

Le loro espressioni mediante i covarianti del sistema completo della sextica sono note (*).

(*) GORDAN, *Invariant.*, II, pag. 287 e seg. — CLEBSCH, *Th. d. bin. Form.*, p. 285 e seg.

Si ha propriamente:

$$[w]_{\Sigma_1}^4 = -\frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} A \cdot k$$

$$[w]_{\Sigma_2}^4 = -\frac{1}{8} l^2 - \frac{1}{12} B \cdot k - \frac{1}{12} A \cdot \Delta$$

$$[w]_{\Sigma_3}^4 = -\frac{1}{4} l m + \frac{1}{12} C \cdot k - \frac{1}{12} B \cdot \Delta,$$

dove $A, B, C, \Delta, k, \dots$ sono i noti invarianti e covarianti della sestica (*).

§ 11. Calcolo del termine $[w]^6$ in ciascuna delle tre prime Σ .

La parte in ζ^6 dello sviluppo di Σ_i risulta, oltrechè ponendo in $[w]^6$ per le w i loro termini in ζ , anche dalle seguenti altre combinazioni:

I. Ponendo in l_w^2 per le w :

- a) Il quadrato dei termini in ζ^3 del loro sviluppo;
- b) Il doppio prodotto dei termini in ζ^2 e ζ^4 ;
- c) Il doppio prodotto dei termini in ζ e ζ^5 .

II. Ponendo in $[w]^4$ per le w :

- a) Quattro volte il prodotto della terza potenza dei termini in ζ per la prima dei termini in ζ^3 ;
- b) Sei volte la seconda potenza dei termini in ζ per la seconda dei termini in ζ^2 .

Tali espressioni sono rispettivamente (a meno di un denominatore f^5):

$$\begin{aligned} \text{I. a)} \quad & \frac{1}{12 \cdot 12} \left(f^2 f''^2 + \frac{9}{4} f'^4 - 3 f f'^2 f'' \right) l_x^2 + \frac{1}{36} \left(f^2 f' f'' - \frac{3}{2} f f'^3 \right) l_x l_1 \\ & + \frac{1}{36} f^2 f'^2 l_1^2 \\ & b) \quad \frac{1}{8 \cdot 12} \left(f^2 f' f''' - \frac{9}{2} f f'^2 f'' + \frac{15}{4} f'^4 \right) l_x^2 \\ & + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{12} f^3 f''' + \frac{1}{2} f^2 f' f'' - \frac{1}{2} f f'^3 \right) l_x l_1 \\ & - \frac{1}{16} \left(f^3 f'' - \frac{3}{2} f^2 f'^2 \right) l_1^2 \end{aligned}$$

(*) Il k di GORDAN è lo stesso dell' i di CLEBSCH.

$$\begin{aligned}
c) \quad & -\frac{1}{5 \cdot 24} \left(f^3 f^{IV} - 6 f^2 f' f'' + \frac{45}{2} f f'^2 f'' - \frac{9}{2} f^2 f'^2 - \frac{105}{8} f'^4 \right) l_x^2 \\
& - \frac{1}{12} \left(f^3 f''' - \frac{9}{2} f^2 f' f'' + \frac{15}{4} f f'^3 \right) l_x l_1 \\
\text{II. a)} \quad & \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} f^2 f' f''' + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 5} f^2 f''^2 - \frac{1}{8 \cdot 5} f f'^2 f'' \right) l_x^2 \\
& - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} f^2 f' f'' - \frac{1}{8} f f'^3 \right) l_x l_1 + \frac{1}{6} \left(-\frac{7}{12} f^2 f'^2 + \frac{1}{2} f^3 f'' \right) l_1^2 \\
b) \quad & \frac{3}{8} \left(-\frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} f^3 f^{IV} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} f^2 f' f''' - \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 5} f f'^2 f'' \right) l_x^2 \\
& - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} f^3 f''' + \frac{1}{6 \cdot 5} f^2 f' f'' - \frac{1}{24} f f'^3 \right) l_x l_1 \\
& + \frac{3}{8} \left(-\frac{1}{6 \cdot 5} f^3 f'' - \frac{1}{12} f^2 f'^2 \right) l_1^2.
\end{aligned}$$

Sottraghiamo la somma di tutte queste espressioni da quella di S_6 del § 10. Si vede in primo punto che scompaiono i termini non divisibili per f^2 , ciò che appunto deve verificarsi, perchè l'espressione che rimane, dovendo essere il risultato che si ottiene ponendo per le w in $[w]^6$ i loro termini in w , e inoltre dovendo $[w]^6$ essere un'espressione *intera*, come sappiamo dalla teoria generale delle Σ , si ha che vi deve rimanere solo il denominatore f^3 .

Ponendo f sotto la forma simbolica il risultato finale è:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{1}{f^3} \left[-\frac{1}{8} b_x^6 a_x^2 a_1^4 l_x^2 + \frac{1}{4} b_x^5 b_1 a_x^3 a_1^3 l_x^2 - \frac{1}{8} b_x^4 b_1^2 a_x^4 a_1^2 l_x^2 \right. \\
& \quad + \frac{1}{4} b_x^6 a_x^3 a_1^3 l_x l_1 - \frac{1}{4} b_x^5 b_1 a_x^4 a_1^2 l_x l_1 + \frac{1}{4} b_x^5 b_1 a_x^5 a_1 l_1^2 \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} b_x^6 a_x^4 a_1^2 l_1^2 \right] \quad (1)
\end{aligned} \right\}$$

Si ricordi che in queste espressioni è tolta l'omogeneità delle x_1, x_2 ; essa è apparentemente di 10.^o ordine in x , ma effettivamente è solo di 6.^o ordine.

È facile vedere che esistono solo i seguenti due covarianti di 6.^o ordine, di 2.^o grado nei coefficienti di f , di 1.^o grado nei coefficienti di l , e fra loro linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned}
(ab)^4 a_x^2 b_x^2 l_x^2 &= \text{I} \\
(ab)^2 (al)^2 a_x^2 b_x^4 &= \text{II},
\end{aligned}$$

onde l'espressione precedente deve essere del tipo:

$$\frac{1}{f^3} (c I + c' II). \quad (2)$$

Sviluppiamo ora I e II colle formole:

$$(ab)^4 = 2a_1^4 b_x^2 - 8a_1^3 a_x b, b_x^3 + 6a_1^2 a_x^2 b_1^2 b_x^2$$

$$(al)^2 = a_1^2 l_x^2 - 2a_x a_1 l_x l_1 + a_x^2 l_1^2$$

$$(ab)^2 = a_1^2 b_x^2 - 2a_x a_1 b_x b_1 + a_x^2 b_1^2,$$

e paragoniamo allora (2) con (1). Si ha per risultato:

$$c = 0 \quad c' = -\frac{1}{8};$$

onde infine:

$$\begin{aligned} [w]_{\Sigma_1}^6 &= -\frac{1}{8} (ab)^2 (al)^2 a_w^2 b_w^4 \\ &= -\frac{1}{8} ((fl)^2, f)^2. \end{aligned}$$

e mutando l in m e n si hanno i termini per le altre due Σ .

Da quest'ultima formola si ricava questo notevole teorema:

« Il termine $[w]^6$ in ciascuna delle tre Σ non è altro che, a meno di un fattore numerico, la seconda *überschiebung* del termine precedente $[w]^4$ sopra f . »

Un'analogia proprietà sussiste fra $[w]^4$ e $[w]^2$, però in quest'ultimo caso, la cosa è prevedibile, perchè $[w]^4$ dovendo avere la forma invariante, non può avere altra espressione che $(f, l)^2$ (a meno di un fattore numerico da noi avanti determinato) non esistendo altro covariante di 4.° ordine e di 1.° grado nei coefficienti di f e di l .

Per il caso invece che noi abbiamo posto in vista, non si può più prevedere il risultato, perchè esiste effettivamente un altro covariante [oltre $((fl)^2, f)^2$] che sia di 6.° ordine, di 2.° grado nei coefficienti di f e di 1.° grado nei coefficienti di l ; come abbiamo sopra notato.

Possiamo dunque porre in vista questo risultato:

« Gli sviluppi di $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ sono tali che, sino ai termini di 6.° ordine, ogni termine si forma dal precedente (a meno di un fattore numerico) facendone la seconda *überschiebung* sulla sestica fondamentale. »

§ 12. Espressione definitiva dei termini $[w]^6$.

Come abbiamo fatto per i termini $[w]^4$, cercheremo anche in questo caso di esprimere $[w]^6$ mediante i covarianti del sistema completo della sestica.

Si tratterà di calcolare le seconde *überschiebungen* di $(fl)^2$, $(fm)^2$, $(fn)^2$ sopra f .

Ora le $(fl)^2$, $(fm)^2$, $(fn)^2$ sono note (vedi § 10), quindi per calcolare i nostri termini $[w]^6$ tutto si riduce a sapere calcolare le seconde *überschiebungen* sopra f delle seguenti espressioni:

$$\Delta, \quad k, \quad l^2, \quad lm.$$

Ora $(fk)^2$ è proprio un covariante del sistema completo; esso è chiamato p da CLEBSCH.

Inoltre:

$$(f, \Delta)^2 = \frac{1}{2} lk - \frac{1}{6} B \cdot f \quad (*),$$

e infine facilmente si hanno le formole:

$$\begin{aligned} (f, l^2)^2 &= (al)^2 a_x^4 \cdot l_x^2 - \frac{1}{3} (ll')^2 \cdot a_x^6 \\ &= (fl)^2 \cdot l - \frac{1}{3} Au \cdot f, \end{aligned}$$

essendo Au l'invariante della quadratica l :

$$(f, lm)^2 = \frac{1}{2} (fm)^2 \cdot l - \frac{1}{2} (fl)^2 \cdot m - \frac{1}{3} A_{lm} \cdot f,$$

essendo A_{lm} l'invariante simultaneo delle due quadratiche l , m . Le espressioni di Au , A_{lm} sono note (**).

Onde infine:

$$\begin{aligned} [w]_{\Sigma_1}^6 &= -\frac{1}{8} \left(2\Delta + \frac{A}{3} k, f \right)^2 \\ &= -\frac{1}{8} lk + \frac{1}{24} Bf - \frac{1}{24} p \end{aligned}$$

(*) GORDAN, *Invariant.*, II, pag. 279.

(**) CLEBSCH, pag. 299.

$$\begin{aligned}
[w]_{\Sigma_2}^6 &= -\frac{1}{8} \left(\frac{l^2}{2} + \frac{B}{3} k + \frac{A}{3} \Delta, f \right)^2 \\
&= -\frac{1}{8} \Delta l - \frac{1}{24} A k l + \frac{1}{24} C \cdot f + \frac{1}{72} A B \cdot f - \frac{1}{24} B \cdot p \\
[w]_{\Sigma_3}^6 &= -\frac{1}{8} \left(l m - \frac{1}{3} C k + \frac{1}{3} B \Delta, f \right)^2 \\
&= -\frac{1}{32} l^3 - \frac{1}{24} B k l - \frac{1}{48} A \Delta l - \frac{1}{8} \Delta m - \frac{1}{48} A k m + \\
&\quad + \frac{5}{144} B^2 f + \frac{1}{36} A C \cdot f + \frac{1}{24} C p.
\end{aligned}$$

§ 13. La funzione Σ_4 .

Per $y = x + \zeta$ si trova il seguente sviluppo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + a_x^2 a_y^2 &= 2f + f' \zeta + \frac{1}{4} \frac{\frac{7}{5} f f'' - \frac{1}{2} f'^2}{f} \zeta^2 + \\
&\quad + \frac{1}{12} \frac{\frac{11}{10} f^2 f'' - \frac{3}{2} f f' f'' + \frac{3}{4} f'^3}{f^2} \zeta^3 + \\
&\quad + \frac{1}{48} \frac{f^3 f^{IV} - 2 f^2 f' f''' + \frac{9}{2} f f'^2 f'' - \frac{3}{2} f^2 f''^2 - \frac{15}{8} f^4}{f^3} \zeta^4 + \dots
\end{aligned}$$

Tenendo quindi presente l'espressione di Σ_4 e gli sviluppi dei paragrafi precedenti, si ha:

$$\Sigma_4 = 2 + T_1 \zeta + T_2 \zeta^2 + T_3 \zeta^3 + T_4 \zeta^4 + \dots$$

dove:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{f} (2f A_1 + f') \\
T_2 &= \frac{1}{f^2} \left(-N f^2 + \frac{7}{20} f f' - \frac{5}{8} f'^2 + 2 A_2 f^2 \right) \\
T_3 &= \frac{1}{f^3} \left[-M f^3 - \frac{1}{2} N f^2 (2f A_1 + f') + 2 A_3 f^3 + f^2 f' A_2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{7}{20} f^2 f'' - \frac{1}{8} f f'^2 \right) A_1 + \frac{1}{12} \left(\frac{11}{10} f^2 f''' - \frac{5}{2} f f' f'' + \frac{3}{4} f'^3 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 = \frac{1}{f^4} \bigg\{ & - \left(R - \frac{1}{4} N^2 \right) f^4 - \frac{1}{2} M f^3 (2 f A_1 + f') - \\
& - \frac{1}{2} N \left(\frac{7}{20} f^3 f'' - \frac{5}{8} f^2 f'^2 + 2 A_2 f^4 \right) + 2 A_4 f^4 + \\
& + A_3 f^3 f' + \frac{1}{4} A_2 f^2 \left(\frac{7}{5} f f'' - \frac{1}{2} f'^2 \right) - \\
& - \frac{1}{24} f' \left(\frac{11}{10} f^2 f''' - \frac{3}{2} f f' f'' + \frac{3}{4} f'^3 \right) + \\
& + \frac{1}{48} \left(f^3 f^{IV} - 2 f^2 f' f''' + \frac{9}{2} f f'^2 f'' - \frac{3}{2} f^2 f''^2 - \frac{15}{8} f'^4 \right) \bigg\}.
\end{aligned}$$

Se per le N , M , A , si pongono i loro valori (vedi § 9) si trova che:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

In quanto a T_4 si trova semplicemente:

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{1}{f^2} \left\{ \frac{1}{16 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} f f^{IV} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8} f' f''' + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} f'^2 \right\} = \\
&= \frac{1}{f^2} \left(\frac{1}{2} a_x^6 b_x^2 b_1^4 - 2 a_x^5 a_1 \cdot b_x^3 b_1^3 + \frac{3}{2} a_x^4 a_1^2 \cdot b_x^4 b_1^2 \right) \\
&= \frac{1}{f^2} \left\{ \frac{1}{4} (a b)^4 a_x^2 b_x^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Onde lo sviluppo di Σ_4 è:

$$\Sigma_4 = 2 + * + \frac{1}{4} k_w^4 + \dots$$

§ 14. La funzione dispari Σ_5 . Termini di 5.^o e 7.^o ordine.

Lo sviluppo della forma X_5 secondo le potenze di ζ è:

$$\begin{aligned}
& - \zeta^5 \left\{ 2 a_t a_x^5 f^{\frac{1}{2}} + a_t \left(\frac{1}{2} \frac{f'}{f^{\frac{1}{2}}} a_x^5 + 5 a_x^4 a_1 f^{\frac{1}{2}} \right) \zeta + \right. \\
& \left. + a_t \left(\frac{1}{4} \frac{f'' f - \frac{1}{2} f'^2}{f^{\frac{3}{2}}} a_x^5 + \frac{1}{2} \frac{f'}{f^{\frac{1}{2}}} a_x^4 a_1 + 6 a_x^3 a_1^2 f^{\frac{1}{2}} \right) \zeta^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_t \left(\frac{1}{12} \frac{f^2 f''' - \frac{3}{2} f f' f'' + \frac{3}{4} f'^3}{f^{\frac{5}{2}}} a_x^5 + \frac{1}{4} \frac{f f'' - \frac{1}{2} f'^2}{f^{\frac{3}{2}}} a_x^4 a_1 + 4 a_x^3 a_1^2 f^{\frac{1}{2}} \right) \zeta^3 + \\
& + a_t \left(\frac{1}{48} \frac{f^3 f^{IV} - 2 f^2 f' f''' + \frac{9}{2} f f'^2 f'' - \frac{3}{2} f^2 f''^2 - \frac{15}{8} f'^4}{f^{\frac{7}{2}}} a_x^5 \right. \\
& \left. + \frac{1}{12} \frac{f^2 f''' - \frac{3}{2} f f' f'' + \frac{3}{4} f'^3}{f^{\frac{5}{2}}} a_x^4 a_1 + a_x a_1^4 f^{\frac{1}{2}} \right) \zeta^4 + \dots \Big\}.
\end{aligned}$$

Inoltre lo sviluppo di $[\chi(xy)]^3$ è dato da:

$$\begin{aligned}
& 1 + 3 A_1 \zeta + \left(-\frac{3}{2} N + 3 A_1^2 + 3 A_2 \right) \zeta^2 + \\
& + \left(-\frac{3}{2} M - \frac{9}{2} A_1 N + 6 A_1 A_2 + 3 A_3 + A_1^3 \right) \zeta^3 + \\
& + \left(-\frac{3}{2} R + \frac{9}{8} N^2 - \frac{9}{2} A_1 M - \frac{3}{2} N (3 A_1^2 + 3 A_2) + \right. \\
& \left. + 3 A_4 + 6 A_1 A_3 + 3 A_2^2 + 3 A_1^2 A_2 \right) \zeta^4 + \dots,
\end{aligned}$$

onde lo sviluppo di Σ_5 è dato da:

$$\Sigma_5 = T_5 \zeta^5 + T_6 \zeta^6 + \dots,$$

dove:

$$\begin{aligned}
T_5 &= -\frac{2 a_t a_x^5}{f^{\frac{5}{2}}} \\
T_6 &= -\frac{1}{f^{\frac{7}{2}}} \left(5 f a_x^4 a_1 - \frac{5}{2} f' a_x^5 \right) a_t \\
T_7 &= -\frac{1}{f^{\frac{9}{2}}} \left\{ \left(-\frac{4}{5} f f'' + \frac{5}{2} f'^2 \right) a_x^5 - 7 f f' a_x^4 a_1 + 6 f^2 a_x^3 a_1^2 \right\} a_t \\
T_8 &= -\frac{1}{f^{\frac{11}{2}}} \left\{ \left(-\frac{23}{8 \cdot 15} f^2 f''' + \frac{137}{80} f f' f'' - \frac{75}{32} f'^3 \right) a_x^5 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{19}{8} f^2 f'' + \frac{121}{16} f f'^2 \right) a_x^4 a_1 - 9 f^2 f' a_x^3 a_1^2 + 4 f^3 a_x^2 a_1^3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_9 = -\frac{1}{f^{\frac{13}{2}}} & \left\{ \left[-\frac{3}{5 \cdot 16} f^3 f^{IV} + \frac{207}{32 \cdot 15} f^2 f' f'' - \frac{81}{32} f f'^2 f'' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{243}{32 \cdot 25} f^2 f''^2 + \frac{275}{128} f'^4 \right] a_x^5 a_t \right. \\
& + \left[-\frac{29}{3 \cdot 16} f^3 f''' + \frac{217}{40} f^2 f' f'' - \frac{15}{2} f f'^3 \right] a_x^4 a_1 a_t \\
& \left. + \left[-\frac{63}{20} f^3 f'' + \frac{81}{8} f^2 f'^2 \right] a_x^3 a_1^2 a_t - 6 f^3 f' a_x^2 a_1^3 a_t + f^4 a_x a_1^4 a_t \right\}.
\end{aligned}$$

Il primo termine di Σ_5 è allora evidentemente:

$$[w]_{\Sigma_5}^5 = 2 a_w^5 a_t.$$

Per trovare il secondo termine togliamo da T_7 quello che risulta ponendo in $[w]^5$ per le w :

1.^o Cinque volte il prodotto delle quarte potenze dei loro termini in ζ per quelli in ζ^3 ;

2.^o Dieci volte il prodotto delle terze potenze dei loro termini in ζ per i quadrati dei termini in ζ^2 .

Dobbiamo cioè togliere:

$$\frac{5}{3 f^{\frac{9}{2}}} \left[+ f f' a_x^4 a_1 a_t + \frac{1}{2} \left(f f'' - \frac{3}{2} f'^2 \right) a_x^5 a_t \right] \quad (1)$$

$$\frac{5}{f^{\frac{9}{2}}} \left(-f^2 a_x^2 a_1^2 a_t + f f' a_x^4 a_1 a_t - \frac{1}{4} f'^2 a_x^5 a_t \right). \quad (2)$$

Allora si vede che i termini in f'^2 si distruggono, come deve accadere, perchè essi sono i soli che conserverebbero per denominatore $f^{\frac{9}{2}}$, mentre che, per ragioni analoghe a quelle altre volte dette (vedi § 11), debbono restare tutti termini solo col denominatore $f^{\frac{7}{2}}$.

Resta infine:

$$-\frac{1}{f^{\frac{7}{2}}} \left(\frac{1}{30} f'' a_x^5 - \frac{1}{3} f' a_x^4 a_1 + f a_x^3 a_1^2 \right) a_t,$$

cioè:

$$-\frac{1}{f^{\frac{7}{2}}} \left(b_x^4 b_1^2 \cdot a_x^5 - 2 b_x^3 b_1 a_x^4 a_1 + b_x^2 a_x^3 a_1^2 \right) a_t.$$

Onde il secondo termine di Σ_5 è precisamente:

$$[w]_{\Sigma_5}^7 = (a b)^2 a_w^3 b_w^4 a_t = H_w^7 H_t.$$

§ 15. Il termine di 9.^o ordine di Σ_3 .

Togliamo da T_9 quello che risulta ponendo per le w .

1. In $2a_w^5 a_t$:

a) dieci volte il prodotto dei quadrati dei loro termini in ζ^3 per il cubo dei termini in ζ ;

b) venti volte il prodotto dei termini in ζ^4 per quelli in ζ^2 e per i cubi dei termini in ζ ;

c) cinque volte il prodotto dei termini in ζ^5 per le quarte potenze dei termini in ζ ;

d) trenta volte il prodotto dei termini in ζ^3 per i quadrati dei termini in ζ^2 e per i quadrati dei termini in ζ ;

e) cinque volte il prodotto delle quarte potenze dei termini in ζ^2 per la prima di quelli in ζ .

2. In $H_w^7 H_t$.

a) sette volte la sesta potenza dei termini in ζ moltiplicata per la prima di quelli in ζ^2 ;

b) ventun volte il prodotto della quinta potenza dei termini in ζ per la seconda dei termini in ζ^2 .

Dobbiamo cioè infine togliere da T_9 la seguente espressione (a meno del denominatore $f^{\frac{13}{2}}$):

$$\begin{aligned} & - \left[-\frac{3}{5 \cdot 16} f^3 f^{IV} + \frac{77}{9 \cdot 4 \cdot 5} f^2 f' f''' - \frac{81}{32} f f'^2 f'' + \frac{221}{5 \cdot 16 \cdot 9} f^2 f''^2 + \frac{275}{128} f'^4 \right] a_x^5 a_t \\ & - \left[-\frac{7}{12} f^3 f''' + \frac{389}{72} f^2 f' f'' - \frac{15}{2} f f'^3 \right] a_x^4 a_1 a_t \\ & - \left[\frac{1474}{9 \cdot 16} f^2 f'^2 - \frac{77}{24} f^3 f'' \right] a_x^3 a_1^2 a_t + \frac{25}{4} f^3 f' a_x^2 a_1^3 a_t - \frac{11}{8} f^4 a_x a_1^4 a_t. \end{aligned}$$

Si ottiene per risultato:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{32 \cdot 9} f^2 f' f''' - \frac{23}{32 \cdot 9 \cdot 25} f^2 f''^2 \right] a_x^5 a_t \\ & - \left[-\frac{1}{48} f^3 f''' + \frac{1}{45} f^2 f' f'' \right] a_x^4 a_1 a_t \\ & - \left[\frac{7}{5 \cdot 24} f^3 f'' - \frac{1}{9} f^2 f'^2 \right] a_x^3 a_1^2 a_t - \frac{1}{4} f^3 f' a_x^2 a_1^3 a_t + \frac{3}{8} f^4 a_x a_1^4 a_t, \end{aligned}$$

ovvero anche (sopprimendo un fattore comune f^2):

$$\left. \begin{aligned} & - \left[\frac{5}{2} c_x^5 c_1 b_x^3 b_1^3 - \frac{23}{8} c_x^4 c_1^2 b_x^4 b_1^2 \right] a_x^5 a_t \\ & - \left[-\frac{5}{2} c_x^6 b_x^3 b_1^3 + 4 c_x^5 c_1 b_x^4 b_1^2 \right] a_x^4 a_1 a_t \\ & - \left[\frac{7}{4} c_x^6 b_x^4 b_1^2 - 4 c_x^5 c_1 b_x^5 b_1 \right] a_x^3 a_1^2 a_t \\ & - \frac{3}{2} c_x^6 b_x^5 b_1 a_x^2 a_1 a_t + \frac{3}{8} c_x^6 b_x^6 a_x a_1^2 a_t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ora dal sistema delle forme invariantive della sestica risulta che non esiste altro covariante di 10.^o ordine e 3.^o grado che solo

$$k_x^4 f_x^6.$$

Onde il termine di 9.^o ordine in x e di 1.^o ordine in t , che andiamo cercando, non può essere che del seguente tipo:

$$c k_x^3 k_t f_x^6 + c' k_x^4 f_x^5 f_t, \quad (2)$$

dove c, c' sono due coefficienti numerici da determinare.

Poniamo in (2) per k la espressione $(ab)^4 a_x^2 b_x^2$, e poi sviluppiamo i determinanti (ab) colla formola simbolica:

$$(ab) = a_1 b_x - a_x b_1,$$

(si ricordi che qui le x non sono più variabili omogenee, ma si è supposto $x_2 = 1$), e finalmente si ponga l'indice 1 in luogo dell'indice t . Allora risulta la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & (c + 2c')(012) - 8c'(113) + 6c'(122) + \\ & + 2c(023) - 4c(014) + c(005), \end{aligned}$$

dove per brevità si è indicata col simbolo (lmn) l'espressione:

$$a_x^{6-l} a_1^l b_x^{6-m} b_1^m c_x^{6-n} c_1^n.$$

Intanto in (1) ponendo anche l'indice 1 in luogo dell'indice t e poi raccogliendo i termini simili, si ha:

$$+ \frac{3}{2} (113) - \frac{9}{8} (122) + \frac{3}{4} (023) - \frac{3}{2} (014) + \frac{3}{8} (005),$$

onde dal paragone si ha:

$$c = \frac{3}{8} \quad c' = -\frac{3}{16}.$$

E passando infine dalle x alle w si ha che:

$$[w]_{z_s}^9 = -\frac{3}{8} k_w^3 k_t f_w^6 + \frac{3}{16} k_w^4 f_w^5 f_t.$$

Napoli, $\frac{\text{Gennaio}}{\text{Marzo}}$ 1890.