XI. *Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung; von Joseph Osgood Thompson.*

In der Elasticitätstheorie wird gewöhnlich angenommen, dass die elastische Verlängerung eines Stabes oder Drahtes der Belastung proportional ist. Man hat aus den Versuchen gefolgert, dass dies Gesetz in allen denjenigen Fällen Gültigkeit hat, in welchen die Verlängerung innerhalb der sogenannten Elasticitätsgrenze liegt. Hooke¹⁾ war der erste, der dies Gesetz aufstellte, und seine Behauptung „ut tensio sic vis“, obwohl bisweilen in Frage gestellt, scheint die Versuchsprobe bis auf die Gegenwart bestanden zu haben. Wertheim²⁾ in seinen oft genannten Untersuchungen über die Elasticität der Metalle, und später Edlund³⁾ in seinen Messungen der thermischen Aenderungen, die bei der Dehnung von Drähten hervorgerufen werden, finden keine Ungenauigkeit in dem gewöhnlichen Gesetz. Ebensowenig Morin⁴⁾, obgleich der Abstand zwischen den unteren und oberen Marken auf seinen Drähten 21 m betrug.

Auch Miller⁵⁾ sucht zu zeigen, dass die elastische Dehnung der Kraft proportional ist. Meines Wissens hat bis jetzt Jeder für selbstverständlich gehalten, dass das alte Gesetz gültig sei, und es ist nie versucht worden, dasselbe einer strengen Kritik zu unterziehen.

Bei einigen Messungen des Hrn. Stradling hier kam die Frage zur Sprache. Prof. F. Kohlrausch forderte mich auf, dieselbe in einer sorgfältigen Untersuchung zu behandeln.

1) R. Hooke, *Lectures and Collections*. London 1679.

2) Wertheim, *Pogg. Ann. Ergbd.* 2. p. 1. 1848.

3) Edlund, *Pogg. Ann.* 114. p. 1. 1861 u. 126. p. 539. 1865.

4) Morin, *Compt. rend.* 54. p. 235. 1862.

5) Miller, *Sitzungsber. d. math.-phys. Cl. der kgl. bayer. Acad. d. Wiss.* 1882. Heft 4.

An dieser Stelle sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer für seine schätzbaren Rathschläge und Hülfe bei dieser Untersuchung meinen innigsten Dank auszusprechen.

A priori liegt kein Grund vor, welcher für die strenge Gültigkeit des einfachen Proportionalitätsgesetzes spräche. In der That, wenn man den Fall näher betrachtet, so scheint es sehr wahrscheinlich, dass sich Abweichungen von dem Gesetze finden. Wenn ein Draht einer Dehnung unterworfen ist, so werden die relativen Lagen seiner Molecüle verändert, und er wird ein merklich verschiedener Körper. Folglich sollte man sich nicht wundern, wenn in einem und demselben Körper der Elasticitätsmodul eine Abhängigkeit von der Deformation zeigt.

Da nun von den früheren Beobachtern bewiesen ist, dass die Abweichungen von dem Proportionalitätsgesetz, wenn es solche gibt, sehr klein sind, so wird im voraus klar, dass zum Nachweis jener Abweichungen die Beobachtungen eine sehr hohe Genauigkeit besitzen müssen. Man wird also folgende Versuchsbedingungen einzuhalten haben: Der Draht muss lang und frei von Krümmungen sein. Die Temperatur des Ortes, wo die Versuche ausgeführt werden, muss während eines Versuches annähernd constant bleiben.

Ferner müssen mehrere Nebenphänomene in Betracht gezogen werden, von denen die wichtigsten sind: die Temperaturänderungen bei der Volumänderung des Drahtes und die elastische Nachwirkung. Der Einfluss dieser Nebenphänomene wird später im einzelnen erörtert werden.

Die Drähte, welche von Hrn. Obermaier in Nürnberg zu dem Zwecke besonders verfertigt waren, gaben mir die ersten der obengenannten Versuchsbedingungen. Der Thurm des physikalischen Institutes zu Strassburg gewährte die nothwendige Länge. Ein Draht von etwa 23 m wurde verwendet, und der Thurm besass, da er auf der Nordseite des Gebäudes lag, eine so gleichmässige Temperatur, dass die totale Aenderung eines ganzen Vormittags sich gewöhnlich auf weniger als $0,5^{\circ}$ belief. Um zu jeder Zeit sowohl die mittlere Temperatur, als auch die Aenderung derselben bestimmen zu können, brachte ich zuerst sechs Thermometer in Anwendung, welche in glei-

chen Abständen in dem Thurme aufgehängt wurden. Später wurde, auf Vorschlag von Prof. Kohlrausch, an Stelle der sechs Thermometer ein Messingdraht von etwa 23 m Länge verwendet, welcher parallel mit dem Hauptdraht lief, und ein constantes Gewicht trug. Da dieser „Thermometerdraht“ nur 9 cm von dem Hauptdraht und beide gleich weit entfernt vom Kathetometer I waren, so war ich im Stande, ohne die Einstellung des Oculars des Fernrohres zu ändern, auf die Marke an dem „Thermometerdraht“ zu visiren, und die Temperaturen bis auf $\frac{1}{40}^{\circ}$ zu messen.

Apparat.

In dem Thurme des Institutes befinden sich vier feste Pfeiler, von denen drei innerhalb des Thurmes, fast an der Spitze enden. Ein grosser viereckiger Balken von 25 cm Dicke wurde auf zwei diagonal gegenüber liegende Pfeiler gelegt, und dieser ergab eine unbiegsame Stütze für das obere Ende des Drahtes. Dem grossen Balken parallel wurde ein kleinerer gelegt, auf dem sich ein Mikroskop befand, welches auf die obere Marke gerichtet war. Der grosse Balken ruhte auf eisernen Füßen, welche so angepasst waren, dass die ganze Einrichtung vollständig fest stand. Ein bewegliches Fadencross im Ocular des Mikroskops ermöglichte eine Verschiebung der Marke von 0,005 mm wahrzunehmen. Da eine Belastung von 70 kg auf der Mitte des Balkens eine Verschiebung von nur 0,03 mm hervorrief, und da das schwerste Gewicht, welches in meinen Versuchen angewendet wurde, 18 kg betrug, so dürfen wir die obere Marke als constant ansehen.

Jedoch wurde, um jede Unsicherheit zu beseitigen, die Marke öfters beobachtet, und sie ergab sich als vollständig constant.

An dem unteren Ende des Drahtes brachte man folgende Einrichtung an: Zwei Kathetometer wurden auf denselben Steinblock gestellt, das eine, um die Stellung der Marke bei Nullbelastung, das andere, um die Senkung derselben zu beobachten. Um eine schnelle Messung zu ermöglichen, und den störenden Einfluss der Nachwirkung möglichst zu verringern, gebrauchte man einen in Glycerin getauchten Dämpfer. Hierbei war man im Stande, innerhalb 10 Secunden nach der Be-

lastung das Kathetometer genau einzustellen. Um die Möglichkeit einer Reibung des Dämpfers an den Seiten des umgebenden Gefässes zu verhindern, war der Dämpfer an dem oberen Ende eines leichten rechtwinkligen Rahmens befestigt, an dessen unterem Ende die Gewichtsschale angebracht war. Der Rahmen umgab das Gefäss so, dass er weder mit demselben, noch mit dem Brett, auf welchem es stand, in Berührung kam. Ohne eine solche Einrichtung würde eine Reibung zwischen dem Dämpfer und den Seiten des Gefässes entstanden sein, wenn sich die Belastung nicht genau in der Mitte der Gewichtsschale befand. Ausserdem war zur raschen Beruhigung der Draht durch eine kleine Oeffnung in einem Brettchen geführt und der Rahmen durch eine Gabel an grösseren Drehungen gehindert.

Die Gewichte, welche in Anwendung kamen, waren sorgfältig calibrirt worden, sodass der durchschnittliche Fehler weniger als $\frac{1}{20000}$ betrug. Anfangs benutzte ich als untere Marke einen feinen Diamantstrich auf dem Drahte selbst oder auf einer Glasperle. Später befestigte ich an dem Drahte eine feine auf Papier gedruckte Preilspitze, und dadurch war eine Sicherheit in der Einstellung bis auf 0,005 mm ermöglicht. Da in einigen Fällen die beobachtete Dehnung mehr als 58 mm betrug, so ist es klar, dass, wenn man noch dazu Mittelwerthe von vielen Messungen nimmt, man im Stande ist, eine bedeutende Genauigkeit zu erreichen.

Einfluss der Temperaturänderungen.

Man konnte leicht vorhersehen, dass die Hauptschwierigkeiten in der Messung der wahren elastischen Dehnung entstehen würden durch die Nachwirkung und die von den Volumänderungen hervorgerufenen Temperaturänderungen. Diese letzteren sind nach Theorie und Beobachtung proportional der Belastung, vorausgesetzt, dass die Dehnung innerhalb der sogenannten Elasticitätsgrenze bleibt. Durch besondere Beobachtungen mit einem Thermoelement habe ich mich noch davon überzeugt, dass bei meinen Versuchen, innerhalb der Fehlergrenze, keine Abweichung von der Proportionalität dieser Thermoeffecte mit der Belastung vorhanden war. Dies spricht

auch dafür, dass in keinem Falle die Belastung zu weit gesteigert wurde. Diese thermischen Effecte waren in jedem Falle von grösserem Einfluss als die Nachwirkung.

Die von W. Thomson hergeleitete Gleichung für die durch eine Belastung Δp hervorgerufene Temperaturabnahme Δt ist:

$$\Delta t = \frac{A T \alpha}{w c} \Delta p,$$

wo A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist, T die absolute Temperatur, α der Coëfficient der Wärmeausdehnung, w die Masse der Längeneinheit des Drahtes und c die spezifische Wärme des Metalles bei constantem Druck. Clausius¹⁾ stellt dieselbe Gleichung auf und gibt an, dass Joule diese Gleichung durch Versuche bestätigt hat. Doch beschränkt sich die Untersuchung von Joule auf eine nur angenäherte Bestätigung der obigen Gleichung. Edlund²⁾, der dieselbe Arbeit später und mit den besten damals bekannten Methoden ausführte, erhielt thermische Effecte, die etwa um 40 Proc. kleiner waren als die theoretischen. Indem ich als Grundlage meiner Berechnungen die von Edlund erreichten Resultate annahm, fand ich, dass in einigen Fällen der Einfluss dieser thermischen Effecte in meinen Messungen 0,10 mm betragen könnte. Der Einfluss der Nachwirkung war, wie später gezeigt wird, viel geringer. Wegen der Unsicherheit in der Bestimmung des momentanen Temperaturzustandes des belasteten Drahtes verwandte ich, um ein schnelles Verschwinden der thermischen Effecte zu ermöglichen, bei fast allen Versuchen dünne Drähte von 0,2 bis 0,3 mm Durchmesser. Um mich darüber zu orientiren, wie schnell der Draht seine ursprüngliche Temperatur wieder annehme, nachdem ein Gewicht auf die Schale gelegt worden war, gebrauchte ich ein Thermoelement mit Spiegelgalvanometer und Scala. Das Thermoelement bestand aus zwei sehr feinen Drähten, der eine von Eisen, der andere von Neusilber, welche mit möglichst wenig Loth an dem Hauptdrahte angebracht waren. Die Empfindlichkeit bei vier Versuchen ergab sich als 72, 71, 77 und 72 Scalentheile, also 73 Scalentheile im Durchschnitt für 1° C. In jedem Falle

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie 3. Aufl. 1. p. 199. 1887.

2) Edlund, Pogg. Ann. 126. p. 557. 1865.

wurden nur erste Ausschläge beobachtet. Die Schwingungsdauer der Galvanometernadel war 6,5 Sec. Die Verbindungen der Neusilber- und Eisendrähte mit den Galvanometerdrähten waren in Petroleum von constanter Temperatur, die beiden Löthstellen auf dem Hauptdrahte in ein kleines mit Wasser gefülltes Gummigefäß getaucht. Die Temperaturen des Wassers und des Petroleums wurden genau bestimmt, und dann wurde mittelst eines Stromschlüssels der Stromkreis geschlossen.

Die Verbindungsstellen der Drähte mit dem Hauptdraht waren etwa 15 mm weit voneinander entfernt; bei der Temperaturänderung durch die Anspannung des Drahtes waren sie mit ein wenig Baumwolle gegen Luftströmungen geschützt. Freilich verzögerte die Baumwolle die Abkühlung, resp. die Erwärmung des Drahtes; ohne dieselbe wäre die Abkühlung also noch rascher gewesen. In einer Reihe von acht nacheinander folgenden Bestimmungen war die mittlere Ruhelage der Galvanometernadel 635,7, die Abkühlung des Messingdrahtes durch eine Belastung von 1,5 kg verursachte im Mittel einen ersten Ausschlag von 9,1 mm nach kleineren Zahlen, und nach 13 Sec., oder zwei Schwingungen, war die mittlere Ruhelage 635,9.

Ein weiterer Beweis des schnellen Verschwindens der thermischen Effecte ist durch diesen Ausschlag von 9,1 mm selbst gegeben. Der erste Ausschlag, wie schon erwähnt, war 73 Scalentheile für 1°. Die durch 1,5 kg Belastung hervorgerufene Temperaturänderung betrug nach Edlund 0,225°, und dieser Temperaturunterschied, wenn er constant bliebe, würde einen ersten Ausschlag von 16,4 Scalentheilen verursacht haben. Thatsächlich war der Ausschlag nur 9,1 Scalentheile. Hieraus kann man auf das schnelle Verschwinden der thermischen Effecte schliessen.

In allen meinen Versuchen, sogar in den äussersten Fällen, fand ich stets, dass nach einer Belastung die Nadel einen gewissen Ausschlag angab, und sich dann ohne merkbare Zögerung in die frühere Ruhelage zurückzog. Auf diese Weise wurde es klar, dass nach meiner Beobachtungszeit 13 Sec. keine sichtbare Spur der Erkaltung blieb. Wenn ein Erkalten von $\frac{1}{30}^{\circ}$, genug, um eine Contraction von 0,005 mm in der

Länge des Drahtes zu bewirken, zurückgeblieben wäre, so würde das Galvanometer es angegeben haben.

Die Angabe des Galvanometers bestätigte sich, indem ich die allmähliche Contraction oder Verlängerung des Drahtes beobachtete, gleich nachdem ich den Draht befreit oder beschwert hatte. In den ersten 10 oder 12 Sec. trat eine Aenderung der Länge von z. B. 0,07 mm ein, dann in der darauf folgenden Minute eine weitere Aenderung von 0,01 mm. Die erste Aenderung würde man hauptsächlich den thermischen Effecten zuschreiben, die zweite der Nachwirkung. Da es kaum möglich ist, in weniger als 12 Sec. die Schale zu belasten und das Kathetometer genau einzustellen, so war es mir gleichgültig, in welcher kürzeren Zeit der Draht seine normale Temperatur wiedererlangte.

Hierbei mag erwähnt werden, dass Wertheim seine Messungen erst 5 oder 10 Min. nach der Belastung machte; er wartete, wie er sagt, bis die Lage der Marke fest stand. Mit anderen Worten, er that gerade, was er hätte vermeiden sollen, er liess seine Messungen von dem wirksamsten Theile der Nachwirkung beeinflussen. Miller dagegen ging im entgegengesetzten Sinne zu weit, indem er Messungen 2 Sec. nach der Belastung machte. Seine Resultate sind offenbar von Temperaturänderungen beeinflusst, welche er in einer späteren Abhandlung¹⁾ behandelt.

Die Nachwirkung.

Den Einfluss der Nachwirkung auf meine Resultate vollständig zu berechnen, würde natürlich sehr viel Zeit und Mühe gekostet haben. Erstens sind diese Phänomene bis jetzt hauptsächlich bei Torsion und Biegung untersucht worden, und die Gesetze bei Dehnung wenigstens nicht für Metalle bekannt. Ferner summiren sich bei uns verschiedenartige Nachwirkungen, und in diesem Falle wird die Sache viel verwickelter. Die Nachwirkung bei der Dehnung eines Kautschukfadens ist der Grösse der Dehnung ungefähr proportional.²⁾ Wahrscheinlich gilt diese Beziehung auch für Metalle, und wenn dies der

1) Miller, Wied. Ann. 20. p. 94. 1883.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 158. p. 360. 1876.

Fall ist, so wird die Nachwirkung für meine Frage ohnehin unwirksam, sobald man nur die Verlängerung jedesmal zur gleichen Zeit nach der Belastung beobachtet. Da nun ausserdem die Nachwirkung überhaupt bei meinen Versuchen sehr klein war, so werde ich in meine Resultate keine Correction wegen der Nachwirkung einführen.

Bei den grössten Spannungen las ich immer 13 Sec. nach der Belastung ab. Dies konnte bewirkt werden, indem ich das Kathetometer annähernd einstellte, ehe das Gewicht auf die Schale gelegt wurde. Sorgfältige Messungen ergaben, dass diese Vorsicht nur bei der Anwendung der schwersten Gewichte erforderlich war. Sonst zeigte sich kein Unterschied, ob die Einstellung in 13 Sec. oder einige Secunden später geschah. Die Messungen wurden, mit wenigen Ausnahmen, in Zeitintervallen von zwei Minuten ausgeführt. In dieser Zeit war die der Entlastung folgende Nachwirkung fast ganz verschwunden.

Um dies zu zeigen, können die Resultate zweier Versuchsreihen dienen, die auf p. 564 und 566 mitgetheilt werden.

Um jedoch zu bestimmen, in welcher kürzeren Zeit dies geschieht, wandte ich folgende Einrichtung an: Ein feiner biegsamer Leinenfaden wurde an der Gewichtsschale befestigt, und dann über eine unten am Boden befestigte Rolle geleitet. Der Faden wurde dann an die Axe eines Rades angebunden, und hierdurch konnte ich dem Drahte eine beliebige Spannung mittheilen. Um die relativen Einflüsse der Nachwirkung und der thermischen Effecte zu vergleichen, verfuhr ich folgendermaassen:

Mittelst des Fadens wurde dem Draht eine einer gewissen Belastung entsprechende Spannung mitgetheilt. Der Draht wurde etwa 13 Sec. gespannt, dann mittelst des Rades losgelassen. Während dieses Verfahrens war es nicht nothwendig, mein Auge von dem Fernrohr zu entfernen. Die Marke kam in ungefähr 1 Sec. ohne Schwingungen zur Ruhe und ungefähr 1 Sec. später war die Einstellung beendet. Dann maass ich mittelst der Mikrometerschraube von Kathetometer II die Aenderung der Lage der Marke in den folgenden 11 Sec., dann die weitere Aenderung von der 13. bis zur 30. Secunde. In dieser Zeit kam die Marke merklich zum früheren Nullpunkt zurück.

Die Resultate der Messungen mit dem Messingdraht sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Vorhergehende Spannung	Aenderung		Totale Aenderung
	von 2—13 sec	von 13—30 sec	
0,6 kg	0,035 mm	0,001 mm	0,036 mm
1,2 „	0,062 „	0,010 „	0,072 „
1,8 „	0,100 „	0,020 „	0,120 „

Die Zahlen in jeder Columne sind Mittelwerthe aus resp. 10, 20 und 8 Beobachtungen. Dass die in der zweiten Columne angegebenen Aenderungen zum grössten Theil von der Temperaturänderung des Drahtes und nicht von der Nachwirkung herrühren, lässt sich folgendermaassen beweisen:

Setzen wir in der schon erwähnten Gleichung nach Edlund statt A den Werth $1/682,7$, so bekommen wir:

$$\Delta t = \frac{1}{682,7} \frac{T \alpha}{w c} \Delta p.$$

In diesen Versuchen war $T=285^{\circ}$, $\alpha=0,0418$, $w=0,03528$ kg/m und $c=0,094$. Aus der Gleichung ergibt sich $\Delta t=0,15^{\circ}$, wenn $\Delta p=1$ kg. Für den 22,7 m langen Draht berechnet sich die Aenderung 0,409 mm für 1° , und 0,0614 mm, wenn $\Delta t=0,15^{\circ}$.

Also bei Entlastungen von 0,6, 1,2 und 1,8 kg sollten die durch Wärmeentwicklung im ersten Augenblick entstehenden Verlängerungen 0,037, 0,074 und 0,110 mm betragen.

Diese Zahlen kommen den in der zweiten Columne der obigen Tabelle angegebenen so nahe, wie das Verfahren erwarten lässt.

Aus dem Obigen geht hervor, dass die wegen der Nachwirkung nothwendige Correction sicherlich gering ist. Die durch die 1,2 kg Belastung hervorgebrachte Verlängerung betrug 43,55 mm, und die nach 13 Sec. stattfindende Aenderung von 0,01 mm ist hiergegen zu vernachlässigen.

Beobachtungsverfahren.

Bei allen Messungen war die Methode dieselbe. Nachdem ich die Lage der Marke auf dem Thermometerdraht beobachtet hatte, wurden zuerst die Fernrohre der beiden Kathetometer auf die Marke des Hauptdrahtes gerichtet und eingestellt.

Hierauf legte ich ein Gewicht von 0,2 kg auf die Schale. Die Senkung, welche die Marke dadurch erhielt, wurde durch Kathetometer I schnell beobachtet, und dann wurde das Gewicht sofort weggenommen. Zwei Minuten später wurde die etwaige Aenderung des Nullpunktes durch die Mikrometerschraube von Kathetometer II gemessen, und dasselbe Verfahren mit einem Gewichte von 0,4 kg wiederholt. In einigen Fällen wurde die Belastung bis zu 1,8 kg gesteigert.

Mittelst der Mikrometerschraube von Kathetometer II habe ich etwaige Aenderungen des Nullpunktes bis auf 0,005 mm messen können. Von dieser Seite her waren nur geringe Fehler möglich, weil fast ohne Ausnahme das allmähliche Sinken der Marke infolge der Temperatur und anderer Ursachen die Schraube immer nach derselben Richtung zu drehen gestattete.

Am Ende jeder Beobachtungsreihe wurde der Nullpunkt wieder durch beide Kathetometer beobachtet. Der Unterschied in den Angaben der zwei Instrumente war durchschnittlich weniger als 0,005 mm. Schliesslich wurde, um die zufällige Temperaturänderung zu eliminiren, die Marke auf dem Thermometerdraht beobachtet.

Versuche mit Messingdraht.

Als Beispiel des eben besprochenen Beobachtungsverfahrens gebe ich folgende Messungsreihe:

April 25. 10^h 5^m. Thermometerdraht 540,71.
Temperatur 9,5°.

Mehrbelastung	Zeit	Kath. I	Kath. II	Verlängerung
0 kg	10 ^h 08 ^m	548,96 mm		
0,2 "	09	41,84 "	0,15 mm	7,12 mm
0,4 "	11	34,70 "	" "	14,26 "
0,6 "	13	27,46 "	" "	21,50 "
0,8 "	15	20,18 "	" "	28,78 "
1,0 "	17	12,81 "	0,14 "	36,14 "
1,2 "	19	5,39 "	" "	43,56 "
1,4 "	21	497,885 "	" "	51,065 "
1,6 "	23	90,26 "	0,135 "	58,685 "
1,8 "	25	82,60 "	0,125 "	66,335 "
0 "	27	548,92 "	0,105 "	

10^h 30^m. Thermometerdraht 540,68.

Die Senkung des Nullpunktes während dieser Messungen war nach Kathetometer I 0,04 mm und nach Kathetometer II 0,045 mm. Der Thermometerdraht, welcher dem untersuchten Drahte gleich war, verlängerte sich in dieser Zeit um 0,03 mm. Die Temperaturzunahme war also ziemlich stark, etwa zweimal grösser als gewöhnlich. Die obige Tabelle, und andere ähnliche, deuten an, wie schon auf p. 563 erwähnt, dass bei einer Mehrbelastung von 1,8 kg die Nachwirkung anfängt merklich zu werden. Ich habe diese letzte Verlängerung bloss angegeben, aber nicht in Rechnung gezogen. Die Anfangsbelastung plus 1,8 kg betrug beinahe die Hälfte des Bruchgewichtes.

Zusammenstellung von zehn Messungsreihen.

kg	mm										mm
	7,10	7,13	7,12	7,11	7,105	7,12	7,11	7,11	7,12	7,09	7,111
0,2	14,25	14,265	14,26	14,28	14,285	14,27	14,265	14,27	14,28	14,27	14,269
0,4	21,47	21,50	21,50	21,50	21,485	21,495	21,49	21,475	21,49	21,49	21,489
0,6	28,76	28,775	28,78	28,77	28,75	28,785	28,77	28,77	28,79	28,77	28,772
0,8	36,11	36,125	36,14	36,145	36,115	36,13	36,13	36,11	36,12	36,12	36,124
1,0	43,53	43,57	43,56	43,55	43,555	¹⁾	43,57	43,55	43,545	43,56	43,554
1,2	51,05	51,07	51,065	51,07	51,065	51,06	51,065	51,09	51,055	51,08	51,067
1,4	58,66	58,71	58,685	58,71	58,66	58,69	58,675	58,68	58,69	58,675	58,683
1,6	66,33	66,355	66,335	66,36	66,32	66,35	66,31	66,32	66,34	66,32	66,334
1,8											

Noch weitere zehn Messungsreihen wurden ausgeführt. Das Mittel aus allen enthält die folgende Tabelle unter *x* beob.

<i>p</i>	<i>x</i> beob.	<i>x</i> ber.	beob. — ber.
0,2 kg	7,111 mm	7,110 mm	+ 0,001 mm
0,4 "	14,272 "	14,271 "	+ 1 "
0,6 "	21,488 "	21,488 "	± 0 "
0,8 "	28,770 "	28,770 "	± 0 "
1,0 "	36,119 "	36,122 "	— 3 "
1,2 "	43,554 "	43,554 "	± 0 "
1,4 "	51,076 "	51,071 "	+ 5 "
1,6 "	58,679 "	58,681 "	— 2 "
1,8 "	66,341 "	—	—

Mittlere Temperatur 9°.

1) Es wurde keine Messung gemacht. Wenn ich gewartet hätte, bis die Marke zu Ruhe gekommen wäre, würde die Nachwirkung zu stark eingetreten sein.

Querschnitt des Drahtes 0,0627 mm²

Länge „ „ 22700 mm

Dichtigkeit „ „ 8,42

Anfangsbelastung 0,665 kg

p ist die Mehrbelastung, x die Dehnung.

Die Resultate meiner Messungen durch eine Gleichung von der Form: $x = ap + bp^2 + cp^3$ ausgedrückt, erhielt ich:

$$x = 35,4385 p + 0,5353 p^2 + 0,1487 p^3.$$

Die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Constanten a , b und c in diesem Falle, sowie in den anderen, wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt.

Aus den durch 1,4 kg Belastung hervorgebrachten Verlängerungen, die in der Tabelle auf p. 565 angegeben sind, berechnen sich der mittlere Fehler der einzelnen Messungen 0,011, und der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerthes 0,0024 mm. 2 Minuten nach der Be- und Entlastung war die durchschnittliche Senkung des Nullpunktes 0,009 mm.

Die Anfangsbelastung, bestehend aus Rahmen, Schale, Dämpfer und der Hälfte des Gewichtes des Drahtes betrug 0,665 kg. Dies war wahrscheinlich zweimal so viel, als wirklich nothwendig war, um den Draht gerade zu halten. Später wurde ein leichter Rahmen angewendet.

Versuche mit Kupferdraht.

Die folgende ist eine von zehn am 23. Mai ausgeführten Messungsreihen:

4^h 7^m. Thermometerdraht 540,70.

Mehrbelastung	Zeit	Kath. I	Kath. II	Verlängerung
0 kg	4 ^h 09 ^m	554,82 mm		
0,2 „	10	49,29 „	0,15 mm	5,53 mm
0,4 „	12	43,73 „	„ „	11,09 „
0,6 „	14	38,14 „	„ „	16,68 „
0,8 „	16	32,51 „	„ „	22,31 „
1,0 „	18	26,84 „	0,14 „	27,97 „
1,2 „	20	21,14 „	0,13 „	33,66 „
0 „	22	554,795 „	0,12 „	—
Senkung des Nullpunktes:		0,025	0,03 mm	

4^h 27^m. Thermometerdraht 540,70.

4^h 33^m, am Anfange der nächsten Beobachtungsreihe, war der Nullpunkt wegen der Nachwirkung um 0,015 mm gestiegen. Dies war gewöhnlich der Fall zwischen je zwei Beobachtungsreihen. Der Einfluss der Nachwirkung bei Kupfer, obschon etwas grösser als bei den anderen Metallen, war recht stark genug, um die Messungen zu beeinträchtigen.

An diesem Tage war die Temperatur nicht constant. Die gesammte gleichmässig verlaufende Aenderung in der Länge des Thermometerdrahtes zwischen 2^h 50^m und 5^h 23^m betrug 0,02 mm.

Die folgende Tabelle gibt die Resultate von acht nacheinander folgenden, am 23. Mai ausgeführten Messungsreihen mit Kupferdraht. Die Verlängerung des Thermometerdrahtes während der Messungen betrug 0,12 mm.

p kg									Mittel mm
0,2	5,535	5,535	5,54	5,53	5,53	5,53	5,53	5,535	5,533
0,4	11,085	11,08	11,10	11,085	11,09	11,09	11,09	11,095	11,090
0,6	16,675	16,675	16,685	16,685	16,685	16,68	16,67	16,68	16,680
0,8	22,31	22,305	22,31	22,31	22,30	22,31	22,31	22,31	22,308
1,0	27,97	27,94	27,98	27,985	27,95	27,97	27,94	27,945	27,960
1,2	33,665	33,65	33,72	33,685	33,67	33,66	33,64	33,62	33,664

Die folgende Tabelle gibt Mittelwerthe von 16 Messungsreihen mit Kupferdraht:

p	x beob.	x ber.	beob. — ber.
0,2 kg	5,531 mm	5,529 mm	+ 0,002 mm
0,4 „	11,084 „	11,086 „	— 2 „
0,6 „	16,671 „	16,673 „	— 2 „
0,8 „	22,298 „	22,294 „	+ 4 „
1,0 „	27,949 „	27,951 „	— 2 „
1,2 „	33,646 „	33,646 „	± 0 „

Mittlere Temperatur

13,5°

Dichtigkeit des Drahtes

8,99

Querschnitt „ „

0,0641 mm²

Länge „ „

22,69 m

Anfangsbelastung

0,192 kg.

Die Zahlen der dritten Columnne wurden nach der Gleichung berechnet:

$$x = 27,578 p + 0,3193 p^2 + 0,0538 p^3.$$

Die Anfangsbelastung betrug 0,192 kg. 0,15 kg genügte, um den Draht zu strecken, 0,10 kg noch nicht.

Versuche mit Stahldraht.

Folgende Tabelle stellt die Mittelwerthe von 20 Beobachtungsreihen dar:

p	x beob.	x ber.	beob. — ber.
0,2 kg	7,078 mm	7,077 mm	+ 0,001 mm
0,4 "	14,196 "	14,197 "	— 1 "
0,6 "	21,358 "	21,358 "	± 0 "
0,8 "	28,558 "	28,558 "	± 0 "
1,0 "	35,792 "	35,793 "	— 1 "

Mittlere Temperatur 13°

Dichtigkeit des Drahtes 7,74

Querschnitt " " 0,03263 mm²

Länge " " 22,70 m

Anfangsbelastung 0,491 kg.

Die Zahlen wurden nach der Formel berechnet:

$$x = 35,2725p + 0,5725p^2 - 0,0525p^3.$$

Als Beweis für die Geringfügigkeit der Nachwirkung mag erwähnt werden, dass in zehn nacheinander folgenden Messungsreihen die durch die Maximalbelastung verursachte Dehnung in keinem Falle mehr als 0,0225 mm von dem Mittelwerthe abwich. 2 Minuten nach der Be- und Entlastung befand sich die Marke durchschnittlich 0,01 mm tiefer, als gerade vor der Belastung.

Versuche mit Silberdraht.

Folgende Tabelle stellt das mittlere Resultat von acht Messungsreihen dar:

p	x beob.	x ber.	beob. — ber.
0,2 kg	7,898 mm	7,896 mm	+ 0,002 mm
0,4 "	15,820 "	15,822 "	— 2 "
0,6 "	23,775 "	23,776 "	— 1 "
0,8 "	31,758 "	31,756 "	+ 2 "
1,0 "	39,762 "	39,762 "	± 0 "

Mittlere Temperatur 14°

Dichtigkeit des Drahtes 10,00

Querschnitt des Drahtes	0,0687 mm ²
Länge " "	22,69 m
Anfangsbelastung	0,593 kg.

Die Zahlen wurden nach der Gleichung berechnet:

$$x = 39,4030 p + 0,3905 p^2 - 0,0313 p^3.$$

Dieser Draht war nicht so frei von Krümmungen, wie die anderen. Infolgedessen war es nöthig, mit einer verhältnissmässig grossen Anfangsbelastung zu beginnen.

Der Einfluss der Nachwirkung war in der Regel so gering, dass er nicht gemessen werden konnte. Nach jeder Entlastung kehrte die Marke schnell zum Nullpunkte zurück, und das allmähliche Sinken des Nullpunktes erklärte sich fast allein aus einer langsamen Temperaturerhöhung im Beobachtungsraume.

Berechnung des wahren Elasticitätsmoduls.

Aus den mitgetheilten Resultaten geht hervor, dass der Elasticitätsmodul in jedem Falle eine Function der Spannung ist. Aus der Gleichung:

$$x = ap + bp^2 + cp^3,$$

welche den Zusammenhang zwischen Dehnung und Belastung angibt, erhält man:

$$\frac{dx}{dp} = a + 2bp + 3cp^2.$$

Hieraus kann man den Modul für jede beliebige Spannung berechnen.

Die fast vollkommene Uebereinstimmung der Beobachtung mit der Rechnung von einer geringen Anfangsbelastung an, macht es höchst wahrscheinlich, dass man die Gleichung rückwärts bis zur Nullbelastung anwenden darf. So werden wir im Stande sein, den wahren Elasticitätsmodul zu bestimmen, den Modul des Körpers, ehe er irgend einer Deformation unterworfen worden ist.

Um diesen wahren Modul zu bestimmen, verfahren wir auf folgende Weise:

Sei X_0 die Verlängerung durch die Anfangsbelastung P_0 .¹⁾

1) Für P_0 wird das Gewicht des Rahmens mit Schale und Dämpfer, vermehrt um das halbe Gewicht des Drahtes (höchstens 0,008 kg) gesetzt.

Sei X die Verlängerung durch das Gesamtgewicht $P_0 + p$.
Dann ist die beobachtete Verlängerung $x = X - X_0$.

Sei: (1) $X = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3$,
also: (2) $X_0 = \alpha P_0 + \beta P_0^2 + \gamma P_0^3$.

Gl. (2) subtrahirt von (1) ergibt:

$$(3) \quad x = (-\alpha P_0 - \beta P_0^2 - \gamma P_0^3) + \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3.$$

Die Resultate der Messungen wurden dargestellt unter der Form:

$$(4) \quad \begin{cases} x = a(P - P_0) + b(P - P_0)^2 + c(P - P_0)^3 \\ = (-\alpha P_0 + b P_0^2 - c P_0^3) + (a - 2b P_0 + 3c P_0^2) P \\ \quad + (b - 3c P_0) P^2 + c P^3. \end{cases}$$

Wenn wir die Coefficienten von gleichen Potenzen der Variablen P in den beiden Ausdrücken für x in (3) und (4) gleichsetzen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha &= a - 2b P_0 + 3c P_0^2, \\ \beta &= b - 3c P_0, \\ \gamma &= c. \end{aligned}$$

Die Gl. (1), welche das Verhältniss zwischen Dehnung und Belastung angibt, wenn man mit Nullbelastung anfängt, wird dann z. B. bei dem Stahldraht:

$$X = 34,672 P + 0,6498 P^2 - 0,0525 P^3$$

und $\left(\frac{dX}{dP}\right)_{P=0} = 34,672$.

Der Elasticitätsmodul für eine unendlich kleine Belastung wird:

$$E = \frac{l}{q} \cdot \frac{dP}{dX},$$

wo l die Drahtlänge und q der Querschnitt ist. Also in diesem Falle:

$$E = \frac{22683}{0,03263} \cdot \frac{1}{34,672} = 20050.$$

Die Länge des ungespannten Drahtes l ergibt sich aus Gl. (2).

Die Gleichungen, welche das Verhältniss zwischen Verlängerung und Belastung angeben, wenn man mit Nullbelastung anfängt, sind folgende:

S t a h l.

$$X = 34,672 P + 0,6498 P^2 - 0,0525 P^3.$$

Messing.

$$X = 34,924 P + 0,2386 P^2 + 0,1487 P^3.$$

Silber.

$$X = 38,907 P + 0,4462 P^2 - 0,0313 P^3.$$

Kupfer.

$$X = 27,461 P + 0,2883 P^2 + 0,0538 P^3.$$

Die Dichtigkeiten, die Querschnitte und die durch die obige Methode berechneten Moduln in kg-Gew./mm² sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	<i>d</i>	<i>q</i>	<i>E</i>	<i>E</i> I.	<i>E</i> II.
		mm ²			
Stahl	7,74	0,03263	20050	19430	19230
Messing	8,42	0,0627	10370	9820	9450
Silber	10,00	0,0687	8490	8300	8250
Kupfer	8,99	0,0641	12890	12620	12420

Um die Abhängigkeit des Elasticitätsmoduls von der Spannung noch deutlicher zu zeigen, füge ich zwei Columnen hinzu. Die vorletzte gibt den Modul, welchen man erhält, wenn man die von der grössten Mehrbelastung hervorgebrachte Dehnung in Rechnung zieht. Die letzte, wenn man nur die von den letzten 0,2 kg verursachte Zunahme der Dehnung betrachtet. Wie man sieht, ist der wahre Werth des Elasticitätsmoduls des Messingdrahtes beinahe 10 Proc. grösser als der in der letzten Columnne angegebene.

Der Einfluss der Quercontraction.

Wenn ein Draht so verlängert wird, dass jede Längeneinheit um δ zunimmt, so wird der Querschnitt, wenn derselbe ursprünglich Q_0 betrug, gleich:

$$Q_0 (1 - 2\mu \delta).$$

Der Werth von μ ändert sich angeblich bei den verschiedenen Körpern von 0 bis 0,5. Angenommen, μ habe bei Stahl den Werth 0,294, wie Kirchhoff angibt, so finden wir, dass in den Versuchen mit Stahldraht für die Belastung 1 kg, bei welcher $\delta = 35,8/22700 = 0,0016$ ist, der Querschnitt = $Q_0 (1 - 0,0,94)$ ist.

Wenn wir den Elasticitätsmodul auf diesen verkleinerten

Querschnitt beziehen wollten, so würden die Coëfficienten unserer Gleichung eine merkliche Aenderung erfahren. Doch pflegt man dies nicht zu thun, sondern auf den Zustand des unbelasteten Drahtes zu beziehen.

Ausserdem ist ja der Zahlenwerth von μ nicht sicher bekannt, ja man weiss nicht einmal, ob μ für einen Körper constant ist.

Dickere Drähte.

Um sicher zu sein, dass die von mir beschriebenen Phänomene nicht auf dünne Drähte beschränkt sind, wurden sorgfältige Messungen mit dickeren Drähten unternommen, bei denen in einigen Fällen Belastungen bis zu 18 kg angewendet wurden. Ohne Ausnahme wurden ähnliche Resultate erzielt. Die Gründe jedoch, weshalb ich die Anwendung von dünnen Drähten vorzog, sind erstens, weil bei diesen die thermischen Effecte schneller verschwinden, zweitens, weil die Be- und Entlastung schneller ausgeführt werden kann, und hierbei die Nachwirkung vollständiger beseitigt wird.

Frühere Beobachter.

Da diese Arbeit Resultate ergeben hat, welche von denen früherer Autoren abweichen, so ist es wünschenswerth, nach einer Erklärung für den Widerspruch zu suchen. Es ist offenbar, dass das Vorhandensein von Krümmungen und Knicken in dem Draht x/p einen zu grossen Werth geben würde, der bei dem Geradwerden des Drahtes allmählich abnimmt. Auf diesen Umstand ist offenbar Stradling's Bemerkung¹⁾ zurückzuführen, aus welcher ein Anwachsen des Elasticitätsmoduls mit steigender Belastung hervorgehen würde, und wahrscheinlich auch die Thatsache, dass Wertheim bei angelassenem Platin²⁾ den Modul mit der Belastung beständig zunehmend fand.

Ferner kann das fast allgemeine Resultat der bisherigen Beobachter, dass x/p nahe eine Constante ist, auf ähnliche Weise erklärt werden. Die Verminderung des Elasticitäts-

1) Stradling, Wied. Ann. 41. p. 332. 1890.

2) Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. 2. p. 46. 1848.

moduls würde für sich x/p grösser machen, während das allmähliche Geradwerden des Drahtes den Modul scheinbar verkleinern würde. Das Zusammenwirken dieser beiden Einflüsse würde also den Erfolg haben können, dass x/p innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler einen constanten Werth aufweist.

Besprechung der Resultate.

Was auch das Wesen der Elasticitätskraft sein mag, ob sie eine ursprüngliche Eigenschaft der Materie ist, oder eine abgeleitete Eigenschaft, welche etwa auf eine Rotation der Atome zurückzuführen ist, so ist die Thatsache durch Wertheim¹⁾ festgestellt worden, dass zwischen der Elasticität und der Dichtigkeit eines Körpers eine nahe Beziehung besteht.

Folgerung I seiner Arbeit behauptet: „Der Elasticitätscoefficient ist nicht constant für ein und dasselbe Metall; alle Umstände, welche die Dichtigkeit erhöhen, machen ihn grösser, und so umgekehrt.“ Diese Worte gestatten eine Consequenz, welche Wertheim selbst übersehen zu haben scheint, denn Folgerung VII zeigt, dass er eine Aenderung des Elasticitätsmoduls erwartete, erst nachdem die Dichtigkeit des Körpers sich permanent geändert hatte. Wertheim bewies, dass die Dichtigkeit eines Drahtes vor einem Versuche sich nur unbedeutend von seiner Dichtigkeit nach dem Zerreißen unterscheidet. Er schliesst daher, dass in ein und demselben Drahte, sogar wenn er in verschiedenen Gleichgewichtszuständen ist, der Elasticitätsmodul sich nur sehr wenig ändern kann. Indessen ist es doch wahrscheinlich, dass, obschon wegen der Quercontraction die Aenderung der Dichtigkeit gering ist, der mittlere Molecularabstand in der Richtung, in welcher die Spannung wirkt, bedeutender zunimmt. Und es ist wahrscheinlich, dass man die Aenderung des Elasticitätsmoduls weniger der Aenderung der Dichtigkeit des als ein Ganzes betrachteten Körpers zuschreiben sollte, als dieser Aenderung des Molecularabstandes in der Spannungsrichtung. Nach Wertheim's eigener Annahme z. B. wäre in ein und demselben Metall:

$$\text{Elasticitätsmodul} \times a^3 = \text{const.},$$

wo a der mittlere Molecularabstand ist.

1) Wertheim, l. c. p. 69.

Hieraus würde eine Zunahme von a eine verhältnissmässig siebenmal grössere Aenderung des Elasticitätsmoduls veranlassen, welche also bei der Dehnung eines Drahtes recht merklich werden kann. Nach meinen Messungen müsste allerdings eine viel höhere Potenz als die siebente angenommen werden.

Wenn es allgemein wahr ist, dass, bei der Zunahme des mittleren Molecularabstandes, der Elasticitätsmodul nach einem bestimmten Gesetz abnimmt, so sollte sich ergeben, dass in denjenigen Metallen, bei welchen die thermischen Ausdehnungscoefficienten die grössten sind, die Abnahme des Elasticitätsmoduls mit der Temperatur am schnellsten stattfindet. Dass dies thatsächlich der Fall ist, ist schon von Miller¹⁾ und Katzenelsohn²⁾ erwähnt worden. Eine weitere Consequenz würde sein, dass, weil bei höheren Temperaturen der Wärmeausdehnungscoefficient grösser wird, die Geschwindigkeit der Abnahme des Moduls hier grösser sein sollte, als bei niederen Temperaturen. Dass dies auch der Fall ist, beweisen die Messungen von F. Kohlrausch und Loomis³⁾, und Pisati.⁴⁾ Ferner würde, wenn ein Körper wie Kautschuk einen negativen thermischen Ausdehnungscoefficient hat, daraus folgen, dass bei Zunahme der Temperatur der Elasticitätsmodul auch zunehmen sollte. Eine eben solche Zunahme des Moduls des Kautschuks hat Miller⁵⁾ beobachtet. Diese Thatsachen und die Resultate meiner Versuche rechtfertigen den Schluss, dass in jedem Falle der Elasticitätsmodul eines Körpers eine Function des Molecularabstandes ist, und dass jede Ursache, sei sie Wärme oder mechanische Kraft, welche diesen Molecularabstand vergrössert, eine Verkleinerung des Elasticitätsmoduls zur Folge hat.

Diese Beziehung, hier zum erstenmal allgemein ausgesprochen, hat meines Wissens keine Ausnahme, welche sich nicht durch Beobachtungsfehler erklären lässt.

Es ist von Interesse, zu bemerken, dass in vielen Fällen die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Stande ist, aus den von

1) Miller, Beibl. 11. p. 211. 1887.

2) Katzenelsohn, Beibl. 12. p. 307. 1888.

3) F. Kohlrausch u. Loomis, Pogg. Ann. 141. p. 498. 1870.

4) Pisati, Beibl. 1. p. 305. 1877.

5) Miller, l. c.

Wertheim gemachten Messungen ähnliche Resultate wie die meinigen abzuleiten. Die folgenden Werthe des Elasticitätsmoduls bei reinem Gold (Wertheim, l. c. p. 30) und reinem Silber (p. 45) zeigen ohne weiteres eine deutliche Abnahme bei steigender Belastung.

<i>P</i>	Gold	Silber	<i>P</i>	Gold	Silber
3 kg	7030	—	7 kg	5340	6476
4 „	6391	—	8 „	5291	7555
5 „	5021	7701	9 „	4972	7213
6 „	5492	7578	10 „	5140	7123

In anderen Fällen, z. B. in den Messungen mit Kupfer (p. 35) und Silber (p. 31), wo nebeneinander stehende Werthe oft um 10 Proc. verschieden sind, müsste die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden.

In den schon vorhin erwähnten Messungen mit angelassenem Platin kann die umgekehrte Tendenz wahrscheinlich durch eine Krümmung des Drahtes erklärt werden.

Ob in der Biegungsmethode eine Abhängigkeit zwischen dem Elasticitätsmodul und der Belastung wahrgenommen werden kann, habe ich nicht untersucht. Weil aber die Compression über der mittleren Schicht der Ausdehnung unter derselben gleich ist, und folglich keine, oder höchstens eine sehr geringe Dichtigkeitsänderung stattfindet, ist es wahrscheinlich, dass in diesem Falle keine Aenderung des Elasticitätsmoduls beobachtet werden kann.

Einige Beziehungen der von mir gefundenen Ergänzung des Dehnungsgesetzes zu sonstigen Gesetzen und andere im Verlaufe meiner Versuche beobachtete Phänomene werde ich bei einer anderen Gelegenheit besprechen.

Folgerungen.

I. Das gewöhnlich angenommene Verlängerungsgesetz $x = \alpha P$, wonach die Dehnung eines Drahtes x der Belastung P proportional sein soll, ist nur eine Annäherung.

II. Das Verhältniss zwischen Dehnung und Belastung lässt sich durch eine Gleichung folgender Form ausdrücken:

$$X = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3.$$

III. Der Elasticitätsmodul des nicht deformirten Körpers berechnet sich mit Hülfe der Gleichung:

$$\left(\frac{dX}{dP}\right)_{P=0} = \alpha.$$

IV. Die auf diese Weise berechneten wahren Elasticitätsmoduln können bis 10 Proc. grösser sein, als die auf gewöhnlichem Wege ermittelten. Es wird daher nothwendig sein, physikalische Constanten, die von dem Elasticitätsmodul abhängen, neu zu berechnen.

Physikal. Inst. der Univ. Strassburg, den 11. Juli 1891.