ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 3II.

Ueber die auf wiederholten Transformationen beruhende Berechnung der ultraelliptischen Transcendenten.

Von Herrn Professor *Richelot* in Königsberg.

Ich glaube es wird den Geometern nicht unlieb seyn, eine völlig neue, leichte und eigenthümliche Methode der Berechnung von einer Gattung Integralien kennen zu lernen, welche mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln gar nicht, oder nur auf äußerst beschwerlichen Wegen berechnet werden können. Die Integralien, welche ich meine, sind unter der Form

$$\int^{\varphi} \frac{(R \cos \varphi^2 + S \sin \varphi^2) d\varphi}{\sqrt{((1-c^2 \sin^2 \varphi^2)(1-l^2 \sin^2 \varphi^2)(1-m^2 \sin^2 \varphi^2))}}$$

begriffen, worin R und S beliebige Constanten, hingegen c, l, m ächte Brüche sind, die wir Moduln nennen, und welche ihrer Größe nach so aufeinander folgen:

$$c > l > m.$$

Die meiner Berechnungsmethode zum Grunde liegenden Transformationen des vorliegenden Integrals, dürften als eine nicht unwichtige Bereicherung der höhern Analysis das Interesse der Geometer in Anspruch zu nehmen geeignet sein. Ich werde aber hier nur die daraus abgeleiteten Rechnungsvorschriften mittheilen, welche zur Werthbestimmung des bestimmten Integrals:

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R \cos \varphi^2 + S \sin \varphi^2) d\varphi}{\sqrt{((1-c^2 \sin^2 \varphi^2)(1-l^2 \sin^2 \varphi^2)(1-m^2 \sin^2 \varphi^2))}}$$

dienen. Eine ausführlichere Darstellung, welche die den elliptischen Integralien zunächst stehenden bestimmten und unbestimmten ultraelliptischen oder *Abelschen* Integralien der ersten Ordnung umfaßt, wird binnen Kurzem in einem eigenen Werke erscheinen.

$$c^o = \frac{m, -c, l,}{m, + c, l,}, \quad l^o = \frac{(1-m,)(m, -c, l,)}{m, l c + \sqrt{(m,^2 - c,^2)(m,^2 - l,^2)}}, \quad m^o = \frac{m, l c - \sqrt{(m,^2 - c,^2)(m,^2 - l,^2)}}{(1+m,)(m, + c, l,)},$$

$$2\rho^o = \rho(1+m,) - \rho,, \quad 2\sigma^o = \sigma(1+m,) + \sigma,,$$

$$2\rho,, = (\rho, - (1-m,) \rho) c^o, \quad 2\sigma,, = (\sigma, + \sigma(1-m,)) c^o,$$

$$\nu^o = \frac{4}{(1+m,)(m, + c, l,)}.$$

Die Größen $\nu, \rho, \sigma, \rho,, \sigma,,$ haben das erste mal die Werthe:

$$\nu = 1, \quad \rho = 1, \quad \sigma = 0, \quad \rho, = 1, \quad \sigma, = 1.$$

Wenn man diesen Algorithmus fortsetzt und die neuen Größen durch oben hinzugefügte ^{oo} bezeichnet, so bilden die ächten Brüche c, c^o, c^{oo} etc. eine so rapid convergirende Reihe, daß

Das Wesen der von mir gefundenen Transformationen beruht in einer fortwährenden Verkleinerung der Moduln, wodurch es möglich wird, dieselben bald ganz zu vernachlässigen, in welchem Falle man den Werth des Integrals unmittelbar erhält. Dieselben Transformationen gewähren auch das Mittel die Moduln fortwährend zu vergrößern, wodurch man ebenfalls bald zu einer Grenze gelangt, für welche sich eine leichte Werthbestimmung des Integrals ergibt. Man schreitet so auf zwei entgegengesetzten Wegen zu denselben Resultaten, deren Uebereinstimmung eine schöne Bestätigung der Theorie durch sich selbst darbietet. Doch wird man, bei der numerischen Berechnung dieser Integrale, immer die erste Methode vorzuziehen haben, es sei denn, daß die Moduln von Anfang an schon sehr nahe an der Einheit liegen.

Die folgenden Algorithmen sind denjenigen nicht ganz unähnlich, deren man sich zur Berechnung der unbestimmten elliptischen Integralien der zweiten Gattung bedient. Die Mühe der Berechnung ist daher kaum merklich von derjenigen verschieden, welche die, in der *Gauß'schen* Abhandlung *Determinatio attractionis*, oder in *Legendre's* *traité des fonctions elliptiques* (Chapitre XXI), zu jenem Ende aufgestellten Algorithmen erfordern.

Ich setze der Kürze wegen hier und in der Folge:

$$\sqrt{1-c^2} = c,, \quad \sqrt{1-l^2} = l,, \quad \sqrt{1-m^2} = m,,$$

und berechne die Größen:

$$c^o, l^o, m^o, \nu^o, \rho^o, \sigma^o, \rho,,^o, \sigma,,^o,$$

durch folgende Formeln:

jedes Glied derselben kleiner wird als das Quadrat des vorhergehenden. Ein gleiches geschieht entweder von Anfang an, oder nach einigen Operationen mit den beiden andern Moduln. Außerdem nähern sich die Verhältnisse $\frac{c}{l}, \frac{c^o}{l^o} \dots$

sehr schnell der Einheit und die Producte:

$$\begin{matrix} \nu^0 \rho^0, & \nu^0 \nu^{00} \rho^{00}, & \dots & (\nu^0 \nu^{00} \dots) \rho^{00} \dots \\ \nu^0 \sigma^0, & \nu^0 \nu^{00} \sigma^{00}, & \dots & (\nu^0 \nu^{00} \dots) \sigma^{00} \dots \end{matrix}$$

bestimmen endlichen Grenzen, welche wir durch P und Σ bezeichnen wollen. Der Werth des vorliegenden Integrals endlich ergibt sich hiedurch:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R \cos \varphi^2 + S \sin \varphi^2) d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin \varphi^2)(1-l^2 \sin \varphi^2)(1-m^2 \sin \varphi^2)}} = (PR + \Sigma S) \frac{\pi}{2}$$

Ich füge die sich leicht ergebenden Gleichungen:

$$c_i^0 = \frac{2\sqrt{\left(\frac{c_i l_i}{m_i}\right)}}{1 + \frac{c_i l_i}{m_i}}, \quad \sqrt{\left(1 - \frac{l_i^2 m_i^2}{c_i^2}\right)} = \frac{2\sqrt{m_i}}{1 + m_i},$$

$$m_i^0 : \frac{c_i^0}{l_i^0} = \frac{2\sqrt{m_i}}{(1+m_i)} : \frac{2\sqrt{\left(\frac{c_i}{l_i}\right)}}{\left(1 + \frac{c_i}{l_i}\right)}$$

hinzu, welche zeigen, daß die Bestimmung des dritten Moduls zuletzt mit der des arithmetisch geometrischen Mittels zusammenfällt, während die andern beiden ein ähnliches evidenten Gesetz befolgen.

Man setzt zweitens das vorliegende Integral unter die Form:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P - Q \sin \varphi^2) d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin \varphi^2)(1-l^2 \sin \varphi^2)(1-m^2 \sin \varphi^2)}}$$

und berechnet die Größen:

$$c_i', l_i', m_i', \quad n', p', q', p_i', q_i',$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P - Q \sin \varphi^2) d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin \varphi^2)(1-l^2 \sin \varphi^2)(1-m^2 \sin \varphi^2)}} = \frac{\Pi, P - K, Q}{2^h} \left(\log. \text{nat.} \frac{2l_i^{(h)}}{c_i^{(h)}} \right) + \frac{\Pi P + K Q}{2^h} \left(\log. \text{nat.} \frac{2}{l_i^{(h)}} \right)$$

Es sei: $c = \sin 75^\circ$, $l = \sin 54^\circ$, $m = \sin 25^\circ$ so erhält man folgende Rechnungsergebnisse:

$\log c = 9,9849438$	$\log c^0 = 9,8528084$	$\log c^{00} = 9,4811130$	$\log c^{000} = 8,677756$	$\log c^{0000} = 7,055 = \log b^{0000} \log \nu^{0000} = 0,0000003$
$\log l = 9,9079576$	$\log l^0 = 9,8115569$	$\log l^{00} = 9,4774550$	$\log l^{000} = 8,677739$	$\log \nu^{0000} = 0,0004926$
$\log m = 9,6259483$	$\log m^0 = 8,7327621$	$\log m^{00} = 6,8677572$	$\log m^{000} = 3,133$	$\log \rho^{0000} = 9,4255456$
	$\log \nu^0 = 0,2972016$	$\log \nu^{00} = 0,1158204$	$\log \nu^{000} = 0,0202024$	$\log \sigma^{0000} = 9,8484569$
	$\log \rho^0 = 9,6562457$	$\log \rho^{00} = 9,4644565$	$\log \rho^{000} = 9,4264912$	$\log \rho^{0000} = 3,819$
	$\log \sigma^0 = 9,6989700$	$\log \sigma^{00} = 9,8310818$	$\log \sigma^{000} = 9,8480606$	$\log \sigma^{0000} = 3,863$
	$\log p^0 = 9,5090541$	$\log p^{00} = 8,688245$	$\log p^{000} = 7,06497$	
	$\log \sigma^0 = 9,5517784$	$\log \sigma^{00} = 8,732751$	$\log \sigma^{000} = 7,10948$	
		$\log P = 9,8592624$	$\log \Sigma = 0,2821744$	

Hieraus ergibt sich der Werth des gesuchten Integrals:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R \cos \varphi^2 + S \sin \varphi^2) d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin \varphi^2)(1-l^2 \sin \varphi^2)(1-m^2 \sin \varphi^2)}} = R(1,136011) + S(3,008114)$$

Dasselbe Beispiel nach der zweiten Methode behandelt, giebt:

$\log m_i = 9,9572757$	$\log m_i^1 = 9,6786471$	$\log m_i^{11} = 9,0117272$	$\log m_i^{111} = 7,7107228$	$\log m_i^{1111} = 5,1201880 = \log l_i^{1111}$
$\log l_i = 9,7692187$	$\log l_i^1 = 9,5779651$	$\log l_i^{11} = 8,9975674$	$\log l_i^{111} = 7,7104896$	$\log e_i^{1111} = 0,5594208 - 18$
$\log c_i = 9,4129962$	$\log c_i^1 = 8,3395401$	$\log c_i^{11} = 6,0912836$	$\log c_i^{111} = 0,5807404 - 9$	$\log n_i^{1111} = 0,0000056$
	$\log n_i^1 = 0,1919412$	$\log n_i^{11} = 0,0426275$	$\log n_i^{111} = 0,0022253$	$\log p_i^{1111} = 9,5584127$
	$\log p_i^1 = 9,6839138$	$\log p_i^{11} = 9,5654752$	$\log p_i^{111} = 9,5584309$	$\log q_i^{1111} = 9,7961384$
	$\log q_i^1 = 9,6989700$	$\log q_i^{11} = 9,7918491$	$\log q_i^{111} = 9,7961276$	$\log p_i^{1111} = 0,3018913 - 10$
	$\log p_i^{111} = 9,3625609$	$\log p_i^{1111} = 8,0730456$	$\log p_i^{11111} = 5,4827333$	$\log q_i^{11111} = 0,3173825 - 10$
	$\log q_i^{1111} = 9,3776171$	$\log q_i^{11111} = 8,0885315$	$\log q_i^{111111} = 5,4982245$	
		$\log \Pi = 9,7952123$	$\log K = 0,0329380$	
		$\log \Pi_i = 0,2983149$	$\log K_i = 0,3138061$	

durch Formeln, welche man aus den obigen erhält, sobald man überall die Größen:

$$c, l, m, \nu, \rho, \sigma, p, q,$$

respective mit den Größen:

$$m_i, l_i, c_i, n, p, q, p_i, q_i,$$

vertauscht. Indem sich hier bei Wiederholung der Operationen die Moduln der Einheit nähern, befolgen die Complemente derselben dieselben Gesetze wie oben. Ich bemerke hiebei, daß in der Reihe

$$c_i, c_i', c_i'', \text{ etc.}$$

zuletzt jedes Glied bis auf zu vernachlässigende Größen gleich dem vierten Theile des Quadrats des vorhergehenden, in den Reihen

$$\begin{matrix} l_i, & l_i', & l_i'', \dots \\ m_i, & m_i', & m_i'', \dots \end{matrix}$$

hingegen zuletzt jedes Glied nur der Hälfte des Quadrats des vorhergehenden gleich wird. Die Produkte

$$\begin{matrix} (n' p'), & (n' n'' p'') \dots (n' n'' \dots p'' \dots) \\ (n' q'), & (n' n'' q'') \dots (n' n'' \dots q'' \dots) \\ \left(\frac{n' p_i'}{l_i' m_i'}\right), & \left(n' n'' \frac{p''}{l_i'' m_i''}\right) \dots \left(n' n'' \dots \frac{p''}{l_i'' m_i''} \dots\right) \\ \left(\frac{n' q_i'}{l_i' m_i'}\right), & \left(n' n'' \frac{q''}{l_i'' m_i''}\right) \dots \left(n' n'' \dots \frac{q''}{l_i'' m_i''} \dots\right) \end{matrix}$$

nähern sich bestimmten endlichen Grenzen, welche wir durch Π, K, Π_i, K_i respective bezeichnen wollen. Die hiezu nöthige Anzahl von Operationen $= h$ gesetzt, erhalten wir den Werth des vorliegenden Integrals:

Es ergibt sich hieraus der Werth desselben Integrals:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(P - Q \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)(1 - l^2 \sin^2 \varphi)(1 - m^2 \sin^2 \varphi)}} = P(4,144126) - Q 3,008114.$$

Da nun $P = R$ und $Q = R - S$ ist, so zeigt sich die Uebereinstimmung beider Resultate bis zur letzten Decimalstelle.

Königsberg, den 1^{sten} Juni 1836.

E. Richelot.

Beobachtung der Sonnenfinsterniß vom 15^{ten} Mai 1836 in Altona.

Den Anfang beobachtete ich 2^h 43' 50" 8 m. Zt.

das Ende 5 21 23,2 —

Beide Momente, wie ich glaube, so scharf als diese Erscheinungen sich beobachten lassen. Die Luft war während der ganzen Verfinsternung, obgleich gegen das Ende etwas neblig, sehr ruhig, und die Bilder blieben immer scharf begränzt.

Den Morgen des 15^{ten} Mais und einige Zeit des Nachmittags verwannte ich dazu um die hauptsächlichsten Flecken auf der Sonne an einem 12zolligen Aequatoreal von *Ertel* zu bestimmen. Herr Dr. *Peters* hat daraus berechnet,

AR. des Fleckens $a = \text{AR. } \odot \text{ Mittelp. } -16' 40'' \text{ um } 23^{\text{h}} 3' \text{ Mai } 14$

b	—12 30	23 3
c'	— 3 32	23 4
f	— 2 36	23 1
Mitte d. Gruppe d	— 2 8	23 7
l	+16 43	23 8
e	— 1 57	23 4
g	— 0 43	23 4
h	— 0 13	23 4
k^3	+ 2 9	23 4
k^4	+ 2 34	23 4
k^5	+ 2 40	23 4
k^1	+ 1 44	23 4
k^2	+ 1 56	23 4
i^1	+ 0 45	23 4
i^2	+ 1 33	23 4

Bei den auf e folgenden Flecken ist der Rectascensionsunterschied von e genommen und deshalb die Zeit angesetzt, wo e gegen den Sonnenrand bestimmt ward.

Decl. von $a = \text{Decl. d. nördl. } \odot \text{ Rds } -16' 43'' \text{ um } 1^{\text{h}} 23' \text{ Mai } 15$

b	—14 5	1 23 —
c'	—12 39	1 23 —
f	— 8 32	23 50 Mai 14
d größter Flecken	—11 3	23 50 —
l	—15 54	0 57 Mai 15
e	—10 14	23 50 Mai 14
g	—10 34	23 50 —
h	—10 12	23 50 —
k^3	— 5 41	23 50 —
k^4	— 8 17	23 50 —
i^1	— 8 0	23 50 —
i^2	— 8 0	23 50 —

a, b , sind einzelne Flecke.

c' ein doppelter Fleck aus einer Gruppe, die noch einen fast eben so großen c^2 enthält und mehrere kleine, unter denen die von Dr. *Peters* beobachteten z, y , sind.

d eine Gruppe mit 3 größeren Flecken, und ein paar klei-

neren. Am Aequatoreal ist die AR. der Mitte der drei größeren bestimmt, und nachher die Declination des größten Fleckens.

e einzelner Fleck, ziemlich groß.

f eine Gruppe, die den größten Flecken, der auf der Sonne war, enthielt, und mehrere kleinere.

g ein kleiner Fleck.

h von derselben Größe mit mehreren kleinern. g und h gehören eigentlich zu derselben länglichten Gruppe.

i^1, i^2, i^3 gehören zu einer Gruppe die noch mehrere kleinere enthält. i^2 ist der größte.

k^1, k^2, k^3, k^4, k^5 gehören zu einer Gruppe die noch mehrere kleinere enthält. k^4 ist der größte.

Bei allen Flecken (ausgenommen d) ist der Punkt den ich als Schwerpunkt der Figur schätzte bestimmt.

Bei der Berechnung hat Herr Dr. *Peters* keine Rücksicht auf Refraction genommen.

Eintritte der Flecken.

Auch bei diesen Eintritten ist der scheinbare Schwerpunkt der Figur des Fleckens genommen.

	Mittl. Zt.	
a	2 ^h 52' 48" 8	die Min. bei dieser Beob. ist un-
b	—59 22,3	22 ^h 8 <i>Georg Repsold</i> . (gewißs.)
c^1	3 20 52,4	
größter Fleck c^2	—21 32,4	
d. Gruppe ... d	—25 32,4	
e	—27 53,9	
g	—29 58,9	
f	—30 5,4	
i^1	—36 34,4	
i^2	—38 29,4	
i^3	—42 48,4	
k^3	—45 24,4	21,9 <i>Georg Repsold</i> .
k^5	—45 —	33,9 —
x	—49 48,9	47,4 —

x ist ein kleiner nicht am Aequatoreal bestimmter Fleck. Herr *Georg Repsold* war bei mir, und beobachtete einige Flecken.

Den Austritt der Flecken konnte ich nicht beobachten, da ich noch nicht ganz von einer Unpäßlichkeit hergestellt war, und grade um die Zeit etwas ausruhen mußte, um das Ende der Finsterniß erhalten zu können.

Ich beobachtete nur den Austr. von b um 4^h 14' 41" m. Zt.