5. *Zur Theorie der Kombinationstöne;* *von E. Waetzmann.*

Erklingen gleichzeitig zwei Primärtöne, so hört man außer ihnen und ihren Obertönen in der Regel noch eine ganze Reihe anderer Töne, die sogenannten Kombinationstöne. Dieselben existieren nur dann schon außerhalb des Ohres, wenn die Primärtöne einen gemeinsamen Entstehungsort haben; man sieht das daraus, daß sie nur in diesem Fall passend abgestimmte Resonatoren zum Mittönen bringen. Bei getrennten Erregungsstellen der Primärtöne lassen sich die Kombinationstöne im Luftraum außerhalb des Ohres nicht nachweisen, können also erst im Ohr selbst entstehen. Man pflegt sie deshalb als „subjektiv“ zu bezeichnen, im Gegensatz zu den erstgenannten „objektiven“ Kombinationstönen. Ich möchte die Bezeichnung „subjektiv“ und „objektiv“ ganz vermeiden, weil sie leicht zu Mißverständnissen führen kann, nämlich zu der Vorstellung, daß der Unterschied zwischen beiden Arten kein rein physikalischer sei.

Kombinationstöne, welche Resonatoren erregen können, kommen zustande in der mehrstimmigen Sirene, dem Harmonium und dem Appunschen Zungenkasten; natürlich auch noch überall da, wo dieselben Bedingungen herrschen wie in einem der genannten Instrumente. So erhielt ich sie z. B. an einer Klappentrompete, wo die einzelnen Töne durch schwingende Zungen verschiedener Eigenperiode hervorgebracht wurden. Besonders erwähnen möchte ich, daß hierbei die Kombinationstöne um so stärker waren, je stärker die Primärtöne angegeben wurden. Die für den Fall dieser Instrumente von Helmholtz gegebene Ableitung¹⁾ der Kombinationstöne wird wohl allgemein als richtig anerkannt.

1) H. v. Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage XVI.

Dagegen ist die für den Fall getrennter Primärtöne von Helmholtz aufgestellte Theorie¹⁾ vielfach angegriffen worden. Die Bedenken, die gegen sie geltend gemacht werden, hat meines Wissens L. Hermann²⁾ am schärfsten präzisirt. Die Theorie behauptet, Kombinationstöne müssen überall da entstehen, wo das von den beiden Primärtönen erregte Medium so heftige Schwingungen ausführt, daß die elastische Kraft nicht nur von der ersten, sondern auch von höheren Potenzen der Elongation abhängt. Die Schwingungsgleichung für einen Massenpunkt, auf den die beiden Primärtöne einwirken, lautet dann:

$$(1) \quad \frac{m}{d} \frac{d^2 x}{dt^2} + a x + b x^2 + f \sin p t + g \sin q t = 0.$$

Helmholtz integriert diese Gleichung, indem er

$$(2) \quad \begin{cases} x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots \\ f = \varepsilon f_1 \\ g = \varepsilon g_1 \end{cases}$$

setzt, und nun die mit gleichen Potenzen von ε multiplizierten Glieder einzeln gleich Null setzt. Hermann glaubt, daß diese Art der Integration zu Widersprüchen mit experimentellen Tatsachen führt. Er sagt nämlich, es werde dabei die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß in Gleichung (1) das Glied $b x^2$ im Vergleich mit den übrigen Gliedern so klein sei, daß es in erster Annäherung vernachlässigt werden könne. Daraus würde aber folgen, daß die Amplituden der Kombinationstöne verschwindend klein gegen die der Primärtöne seien. Dieses Resultat stehe im Widerspruch mit der leicht zu beobachtenden Tatsache, daß man unter Umständen bei verklingenden Primärtönen Differenztöne außerordentlich stark und deutlich hört.

Mir scheint die Grundlage des Hermannschen Einwandes, nämlich die Behauptung, daß in der Helmholtzschen Integration implicite die Voraussetzung stecke, $b x^2$ sei gegenüber den übrigen

1) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 49. p. 497. 1856. Tonempfindungen, Beilage XII.

2) L. Hermann, Pflügers Archiv 49. p. 499. 1891.

Gliedern der Gleichung (1) verschwindend klein, nicht richtig zu sein. Hermann verlangt zu viel, wenn er fordert, die Helmholtzsche Reihe solle, trotzdem man doch bei einem bestimmten Gliede abbrechen muß, die volle Grundgleichung befriedigen. Wenn die Reihe z. B. mit dem dritten Gliede abgebrochen wird, so kann sie nur der Differentialgleichung ohne Vernachlässigung genügen, welche durch Addition der drei ersten Gleichungen, in welche die Grundgleichung zerfällt, entsteht, also der Gleichung:

$$m \left(\frac{d^2(\varepsilon x_1)}{dt^2} + \frac{d^2(\varepsilon^2 x_2)}{dt^2} + \frac{d^2(\varepsilon^3 x_3)}{dt^2} \right) + a(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) \\ = -\varepsilon f_1 \sin p t - \varepsilon g_1 \sin q t - b \varepsilon^2 x_1^2 - 2 b \varepsilon^3 x_1 x_2,$$

nicht aber der Grundgleichung selber. Damit ist durchaus nicht gesagt, daß Glieder mit höheren Potenzen von x gegen solche mit niederen vernachlässigt werden müssen. Übrigens möchte ich bemerken, daß jeder weitere Beweis gegen die Helmholtzsche Ableitung überflüssig wäre, wenn sie wirklich diese Voraussetzung enthielte. Dann wäre nämlich in Wirklichkeit die Grundgleichung nicht vom zweiten Grade, sondern linear. Eine lineare Differentialgleichung ergibt aber stets ungestörte Superposition der Grundperioden; es lassen sich aus ihr also nie Kombinationstöne herleiten.

Ein Bedenken mathematischer Art liegt gegen die Helmholtzsche Theorie allerdings insofern vor, als der Konvergenzbeweis für die zur Integration benutzte Reihe fehlt. Man darf wohl aber rückwärts aus der im großen ganzen guten Übereinstimmung der theoretisch gefundenen Resultate mit dem Experiment schließen, daß Helmholtz im Rechte war, wenn er sich über diese mathematische Schwierigkeit hinwegsetzte. Übrigens berührt die Frage nach der Konvergenz die Hermannsche Argumentation nicht.

Als inkorrekt muß man auch folgenden Punkt in der Helmholtzschen Ableitung bezeichnen: In der Grundgleichung für die Schwingungsbewegung des Massenpunktes m fehlt das Dämpfungsglied, d. h. der Dämpfungsfaktor ist gleich Null angenommen. Trotzdem werden die Glieder mit dem Eigenton des Massenpunktes vernachlässigt, d. h., es wird eine ziemlich starke Dämpfung angenommen. Diese Inkorrektheit läßt sich

aber leicht beseitigen, denn die Gleichung ist auch dann noch ohne weiteres nach der Helmholtzschen Methode integrierbar, wenn ein Dämpfungsglied $k(dx/dt)$ eingefügt wird.¹⁾ Man erhält dann für x_1 und x_2 folgende Werte:

$$\begin{aligned} x_1 = & A e^{-\frac{k t}{2 m}} \sin \left(t \sqrt{\frac{a}{m} - \frac{k^2}{4 m^2}} + c \right) \\ & + \frac{f_1}{m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - p^2 \right)^2 + p^2 \frac{k^2}{m^2}}} \sin (p t - \chi) \\ & + \frac{g_1}{m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - q^2 \right)^2 + q^2 \frac{k^2}{m^2}}} \sin (q t - \psi), \end{aligned}$$

wo χ gegeben ist durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{p k}{m \left(\frac{a}{m} - p^2 \right)}$$

und ψ durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{q k}{m \left(\frac{a}{m} - q^2 \right)}.$$

Hier darf nun wirklich das erste Glied der rechten Seite gleich Null gesetzt werden, da infolge der Dämpfung der Eigenton des schwingenden Massenpunktes schnell verschwindet. Setzt man noch

$$\frac{f_1}{m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - p^2 \right)^2 + p^2 \frac{k^2}{m^2}}} = \varrho$$

und

$$\frac{g_1}{m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - q^2 \right)^2 + q^2 \frac{k^2}{m^2}}} = \sigma,$$

so erhält man:

$$x_1 = \varrho \sin (p t - \chi) + \sigma \sin (q t - \psi),$$

wo ϱ und σ Amplituden, χ und ψ Phasenkonstanten bedeuten.

1) Wie mir Hr. Prof. E. R. Neumann in Marburg mitteilt, hat er diese Korrektur schon früher angebracht, ohne sie jedoch zu veröffentlichen.

Mit diesem Werte von x_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 x_2 = & -\frac{b}{2a}(q^2 + \sigma^2) + \frac{b q^2 \cos(2 p t - \chi')}{2 m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - 4 p^2\right)^2 + 4 p^2 \frac{k^2}{m^2}}} \\
 & + \frac{b \sigma^2 \cos(2 q t - \psi')}{2 m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - 4 q^2\right)^2 + 4 q^2 \frac{k^2}{m^2}}} \\
 & - \frac{b q \sigma \cos((p - q) t - \chi'')}{m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - (p - q)^2\right)^2 + (p - q)^2 \frac{k^2}{m^2}}} \\
 & + \frac{b q \sigma \cos((p + q) t - \psi'')}{m \sqrt{\left(\frac{a}{m} - (p + q)^2\right)^2 + (p + q)^2 \frac{k^2}{m^2}}},
 \end{aligned}$$

worin χ' , ψ' , χ'' und ψ'' Phasenkonstanten sind.

Die hier gefundenen Ausdrücke unterscheiden sich von den Helmholtzschen nur dadurch, daß die Faktoren, welche die Amplituden bedeuten, komplizierter geworden sind.¹⁾

Die Tatsache, daß man Kombinations-, wenigstens Differenz-töne unter Umständen auch bei schwächster Primärtongebung ausgezeichnet hören kann, ist noch nicht notwendig ein Widerspruch gegen die Helmholtzsche Theorie. Nach ihr sind die Amplituden der Kombinationstöne proportional dem Produkt der Amplituden der Primärtöne, womit aber noch nicht gesagt ist, daß, wenn letztere klein sind, die ersteren kleine Größen höherer Ordnung sind. Es könnte ja noch die Proportionalitätskonstante eine wesentliche Rolle spielen. In ihr stecken die Konstanten a und b , d. h. die elastischen Eigenschaften des schwingenden Massenpunktes; diese können natürlich stark variieren. Das besagt aber, zwei Primärtöne von bestimmter Intensität bringen vielleicht in einem Körper, auf den sie beide einwirken, nur recht schwache Kombinationstöne hervor, während sie — bei gleicher Intensität — einen anderen elastischen Körper zu Schwingungen erregen, in denen die Kombinationstöne mit verhältnismäßig großen Amplituden vertreten sind. Nach der Theorie darf man nur verlangen, daß bei ein und demselben

1) In der an anderer Stelle vom Verf. gegebenen Ableitung finden sich einige Vorzeichenfehler, bzw. Inkorrektheiten im Ausdruck, die eventuell zu Mißverständnissen führen könnten.

schwingenden Medium mit wachsenden Amplituden der Primärtöne die Amplituden der Kombinationstöne in stärkerem Maße ansteigen. Soweit meine Erfahrung reicht, scheint diese Forderung auch stets erfüllt zu werden. Daß Kombinationstöne unter Umständen gerade bei verklingenden Primärtönen besonders gut zu hören sind, zuweilen so stark, daß sie die Primärtöne überdecken, wie man in der Literatur mehrfach angegeben findet, ist mit dieser Forderung wohl vereinbar.

Ausführlicher hat sich mit der Frage nach der Stärke der Kombinationstöne F. Krüger¹⁾ beschäftigt. Er gibt an, niemals einen Kombinationston beobachtet zu haben, der an Stärke den Primärtönen gleich oder nahe gekommen wäre. Bei einigen Beobachtungen, die ich mit einem Satz Königscher Stimmgabeln von 1024 bis 4096 Schwingungen anstellte, hörte ich den Differenzton erster Ordnung zuweilen aber auch so laut, daß ich Mühe hatte, die Primärtöne aus dem Gesamtklange deutlich herauszuhören. Dieser Fall trat aber gerade nur bei sehr starken Primärtönen ein. Es wurden auch tiefere Stimmgabeln auf Resonanzkästen (128 bis 900 Schwingungen) als Primärtonquellen benutzt. Hierbei traten allerdings bei ganz geringer Intensität der Primärtöne die Differenztöne zuweilen überraschend deutlich hervor. Trotzdem braucht nicht einmal ihre *physiologische* Intensität ebenso groß oder gar größer gewesen zu sein als bei lauten Primärtönen. Wie ich nämlich in zahlreichen Fällen konstatierte, wurden sie von ungeübten Beobachtern in der Regel nicht gehört, während diese bei starken Primärtönen auch die Differenztöne sofort auf das deutlichste hörten. Mir scheint die Bemerkung F. Krügers, daß, wie Helmholtz die relative Stärke der Kombinationstöne unterschätzte, sie neuerdings meistens überschätzt wird, vollkommen richtig zu sein.

Vor allem aber ist es ja überhaupt vollkommen unzulässig, aus der Intensitätsempfindung rückwärts auf die *physikalische* Intensität der Töne zu schließen, die doch allein für die Beantwortung der Frage, ob die Theorie die Erscheinungen richtig wiedergibt, in Betracht kommt. Selbst wenn man also eventuell Kombinationstöne bei schwachen Primärtönen besser

1) F. Krüger, Wundts Philos. Studien 16. p. 307—379 und p. 568 bis 664. 1900; 17. p. 185—309. 1901.

hört als bei starken, ist das noch kein Beweis gegen das Helmholtzsche Resultat. Denn man weiß nicht, wie die physiologische oder richtiger vielleicht psychologische Intensität eines Tones von seiner physikalischen abhängt, zumal in Zusammenklängen, wo die gegenseitige Überdeckung und Verschmelzung eine große Rolle spielt. Sind beide Primärtöne sehr hoch, so wird im allgemeinen der viel tiefere Differenzton erster Ordnung auch bei kleiner Amplitude neben den Primärtönen gut zu hören sein. Tiefe Töne werden durch hohe nämlich fast gar nicht überdeckt, während das Umgekehrte sehr stark der Fall ist. Besonders frappant tritt diese Tatsache übrigens bei zwei Tönen hervor, von denen der eine die Oktave des anderen ist, weil hier noch die sogenannte Verschmelzung hinzukommt. Wird die höhere Oktave sehr leise angegeben im Verhältnis zur tiefen, so ist sie aus dem Zusammenklänge überhaupt nicht herauszuhören, während die tiefe auch bei schwächster Tongebung stets sehr deutlich zu erkennen ist. Noch komplizierter wird der Vorgang, wenn man es mit mehr als zwei Grundtönen zu tun hat. Aus einem Dreiklang z. B. ist in der Regel der mittlere Ton am schwersten herauszuhören, wenn alle drei annähernd gleich stark sind, wovon ich mich durch zahlreiche Versuche auch mit anderen Versuchspersonen überzeugt habe. Wenn z. B. der Versuchsperson die Aufgabe gestellt wurde, die Reihenfolge der Intensitäten der drei Töne anzugeben, so wurde fast durchweg als stärkster Ton der tiefste genannt, dann der höchste und an letzter Stelle der mittlere. Eine unmusikalische Person war ferner nicht imstande, die Tonhöhe des mittleren Tones richtig anzugeben, während sie die der beiden äußeren Töne vollständig richtig angab. Jedenfalls scheint es mir hiernach unberechtigt zu sein, die Helmholtzsche Theorie auf Grund von Urteilen, welche das Ohr über die Stärke der Kombinations-töne abgibt, zurückzuweisen.

Der zweite Punkt, den Hermann für bedenklich hält, ist die von der Theorie geforderte unsymmetrische Elastizität des schwingenden Mediums. Weil die Kombinationstöne bei getrennten Primärtonquellen im Außenraum bisher nicht nachgewiesen werden konnten, verlegte schon Helmholtz ihre Entstehung in das Ohr, vornehmlich in das Trommelfell und

das Hammer-Amboßgelenk. Hermann macht hiergegen geltend, daß eine Unsymmetrie in den Schwingungsamplituden des Trommelfelles oder des Hammer-Amboßgelenkes erst bei sehr großen Amplituden eintreten könnte, während man die Kombinationstöne doch auch bei sehr geringer Intensität der Primärtöne vorzüglich höre; ferner höre man Kombinationstöne auch dann, wenn beide Ohren fest mit Watte verstopft sind, obwohl hierdurch gerade das Trommelfell in seinen Schwingungen stark behindert würde. Preyer¹⁾ gibt allerdings an, daß bei zugestopften Ohren Kombinationstöne nicht zu hören seien. Jedoch konnte ich sie in den meisten Fällen auch vorzüglich hören. Sie schienen mir beim Zustopfen der Ohren um so mehr geschwächt zu werden, je höher die Primärtöne sind. In einigen Fällen konnte ich hier Kombinationstöne überhaupt nicht hören, obwohl sie, wenn die Ohren nicht verstopft waren, ganz besonders stark zu hören waren. Vielleicht ist die sonst kaum verständliche Angabe Preyers damit zu erklären, daß er sehr hohe Primärtöne zu seinen Versuchen gewählt hat.

Mir scheinen die eben besprochenen Versuche, ebenso wie die anderweitig festgestellte Tatsache, daß auch Personen ohne Trommelfell Kombinationstöne zu hören vermögen, gegen den Grundgedanken der Helmholtzschen Theorie nichts zu beweisen. Daß Helmholtz gerade das Trommelfell als Entstehungsort angibt, ist nur von sekundärer Bedeutung. Es können ebensogut irgendwelche Teile des inneren Ohres dafür in Betracht kommen; z. B. darf man kaum annehmen, daß das Labyrinthwasser bei der Einwirkung von tiefen Tönen, wobei es als Ganzes schwingt, symmetrische Schwingungen ausführt. Daß ich bei sehr hohen Primärtönen die Kombinationstöne mit zugestopften Ohren nur schwer oder gar nicht vernehmen konnte, läßt sich vielleicht so deuten, daß für sehr hohe Töne die Bewegung des Labyrinthwassers und anderer eventuell in Betracht kommender Teile sich schon der molekularen Bewegung nähert, wo von Unsymmetrie der Schwingungen dann nicht mehr die Rede sein kann.

Die Annahme einer unsymmetrischen Elastizität des schwingenden Mediums scheint mir nicht nur unbedenklich,

1) W. Preyer, Wied. Ann. 38. p. 131. 1889.

sondern zur Erklärung mancher Erscheinungen direkt notwendig zu sein. Bei unsymmetrisch elastischen Körpern genügen schon sehr kleine Amplituden, um höheren Potenzen der Elongation Einfluß auf die rücktreibende Kraft zu verschaffen. Somit wird hierdurch die vorhin entwickelte Ansicht gestützt, daß zur Entstehung der von Helmholtz theoretisch erschlossenen Kombinationstöne durchaus keine großen Amplituden der Primärtöne erforderlich sind. Woher kommt es nun aber, daß es noch nicht gelungen ist, Kombinationstöne bei getrennten Primärtonquellen direkt im Luftraum nachzuweisen, auch nicht bei sehr starken Primärtönen? Die relative Kleinheit der Amplituden im Verhältnis zu der ganzen schwingenden Luftmasse scheint mir zur Erklärung dieser Tatsache nicht recht auszureichen. Denn auch wenn eine abgeschlossene Luftmasse zu starken Schwingungen erregt wurde, indem zwei laut tönende Stimmgabeln auf Resonanzkästen in einem kleinen Kasten zum Tönen gebracht wurden, in welchen durch eine Öffnung ein Resonator eingeführt war, sprach derselbe nicht an. Ebenso wurden vergeblich entsprechende Versuche in Glockentürmen, ganz in der Nähe der Glocken, wo die Luftschwingungen äußerst stark sind, angestellt. Hier setzt nun sehr erwünscht die von der Theorie geforderte unsymmetrische Elastizität des schwingenden Mediums ein. Die Luftschwingungen scheinen in sehr weitem Maße symmetrisch vor sich zu gehen; daher die vergeblichen Bemühungen, im Luftraum selber den Kombinationstönen entsprechende Schwingungen nachzuweisen, wenn die Primärtöne voneinander getrennt sind.

In neuerer Zeit ist es auch verschiedentlich gelungen, positiv zu zeigen, daß in unsymmetrisch schwingenden Körpern Kombinations-, wenigstens Differenztöne entstehen, wenn die Körper gleichzeitig durch zwei Töne zu Schwingungen erregt werden. Empfindliche Flammen¹⁾, Membranen²⁾ und der Flammenbogen einer singenden Bogenlampe³⁾, sie alle ergeben Differenztöne, die Resonatoren zum Mittönen bringen. Es wäre interessant, wenn man entsprechende Versuche mit leisen

1) Belas u. Barrett, Sc. Proc. Roy. Dublin Soc. N. S. 10. June 1905.

2) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. 17. p. 572. 1905; E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 20. p. 837. 1906.

3) E. Waetzmann, Physik. Zeitschr. 10. p. 346. 1907.

Primärtönen an genau symmetrisch schwingenden Membranen anstellen könnte; es dürfte aber nicht leicht sein, ganz homogene, wirklich symmetrisch elastische Membranen herzustellen.

Die Summationstöne außerhalb des Ohres nachzuweisen, ist bedeutend schwieriger. Abgesehen von ihrer geringen Stärke, welche jede Art der Beobachtung sehr schwierig macht, gibt es zunächst noch gar keinen Beweis, daß ihnen wirklich eine selbständige Bedeutung neben den Differenztönen höherer Ordnung zukommt. Man kann sich den Ton von der Schwingungszahl $p + q$ zustande kommend denken durch Addition von p und q , aber auch als Differenzton zwischen z. B. $2p$ und $p - q$. Mit der in der oben zitierten Arbeit beschriebenen Versuchsanordnung, mit Hilfe deren ich eine dem Differenzton erster Ordnung entsprechende Komponente in der Schwingung einer von zwei Primärtönen gleichzeitig erregten Seifenlamelle nachgewiesen habe, gelingt es leicht, auch eine solche Komponente nachzuweisen, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen der Primärtöne ist. Um zu entscheiden, ob diese Komponente nicht einem Differenzton höherer Ordnung entspricht, dessen Schwingungszahl gleich $p + q$ ist, könnte man daran denken, nach dem Vorschlage K. L. Schaefers¹⁾ sämtliche in Betracht kommenden Obertöne der beiden Primärtöne der Reihe nach durch Interferenz zu vernichten. Das dürfte aber experimentell sehr schwierig sein. Bei meinen Versuchen benutzte ich als Primärtonquellen Königsche Stimmgabeln; diese erregten entsprechend abgestimmte Luftresonatoren und diese ihrerseits wieder gleichabgestimmte Luftresonatoren. So konnte in einiger Entfernung von den Tonquellen gearbeitet werden, wo die Primärtöne noch genügend stark, ihre Obertöne aber zum mindesten sehr schwach waren, da sie in den Resonatoren nicht mitverstärkt werden. Die auf die Seifenlamelle auftreffenden Primärtöne konnten deshalb mit einiger Wahrscheinlichkeit als praktisch obertonfrei angesehen werden. Weitere Versuche, die Obertöne mit größerer Sicherheit zu beseitigen, wurden nicht angestellt, weil ich auf folgendes prinzipielle Bedenken stieß: Selbst wenn es auf irgendeine Weise ge-

1) K. L. Schaefer, Nagels Handbuch d. Physiol. des Menschen 3. p. 525.

lingen sollte, vollkommen obertonfreie Primärtöne herzustellen und nachzuweisen, daß in der Schwingungsform eines von zwei solchen Primärtönen erregten Körpers eine Komponente enthalten ist, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen der Primärtöne ist, so wäre damit die besprochene Frage doch noch nicht entschieden. Wird nämlich ein Körper durch einen obertonfreien Primärton zu Schwingungen von endlicher Größe erregt, so hängt die elastische Kraft, die den Körper in seine Gleichgewichtslage zurücktreibt, nicht nur von der ersten, sondern auch von höheren Potenzen der Elongation ab; d. h. aber, es entstehen jetzt Obertöne in dem Körper. Deshalb wird sich die obige Frage mit den bisher bekannten Methoden schwerlich vollkommen einwandfrei entscheiden lassen.

Für die Helmholtzsche Theorie scheint sie mir aber auch belanglos zu sein. Diese entscheidet nicht, wie der Ton von der Schwingungszahl $p + q$ zustande kommt; ob er aus den Primärtönen selber entsteht, oder aus einem Oberton und einem Differenzton. Sie fordert doch wohl nur, daß eben ein Ton von dieser Schwingungszahl entsteht, ohne daß mathematisch schon etwas darüber ausgesagt wird, *wie* er physikalisch zustande kommt. An sich bleibt die Frage natürlich bestehen, nur darf nicht so ohne weiteres behauptet werden, es wäre ein Widerspruch gegen die Helmholtzsche Theorie, wenn die sogenannten Summationstöne keine selbständige Existenz neben den Differenztönen höherer Ordnung hätten.

Ein Bedenken sehr weitgehender Art, welches man gegen die Helmholtzsche Theorie geltend machen könnte, ist das, daß sie ja nur für einen diskreten Massenpunkt abgeleitet ist, und daß für einen Körper, der ein System von Massenpunkten darstellt, die Verhältnisse sich doch ganz anders gestalten können. Wir werden trotzdem gut tun, an der Helmholtzschen Ableitung festzuhalten, bis wirklich unwiderlegliche Beweise gegen sie erbracht sind. Im großen ganzen scheint sie mir die experimentellen Ergebnisse in befriedigender Weise wiederzugeben, wenn auch nicht geleugnet werden soll, daß gewisse Schwierigkeiten vorliegen.

Breslau, Physik. Institut, August 1907.

(Eingegangen 13. August 1907.)