SUI PUNTI FOCALI NELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO.

N O T A

DEL DOTT. TOMMASO DEL BECCARO.

Negli Annali compilati dai Sigg. Terquem e Gerono (Juillet 1858) vennero enunciati in modo però inesatto ed incompleto, alcuni Teoremi del Sig. Heilermann intorno alle proprietà dei punti focali nelle superficie di secondo grado dotate di centro. La inesattezza dell'enunciato di alcuni di loro dipende poi dall'essere stato confuso il piano osculatore in un punto d'una linea di curvatura d'una superficie con quello condotto per la tangente alla linea e per la normale alla superficie: inoltre gli altri Teoremi fondamentali non hanno poi quella generalità che comportano. Laonde in questa Nota mi propongo di dimostrare i Teoremi del Sig. Heilermann, dando però all'enunciato d'alcuni di essi forma differente, di estenderli alle superficie di secondo grado prive di centro, ed in fine di esporre alcune nuove proprietà appartenenti a tali punti focali.

1.

Consideriamo i due seguenti sistemi di superficie di secondo grado ortogonali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 &= \Sigma_1 = 0 & \text{ove } c > b, \lambda > b > c \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} - 1 &= \Sigma_2 = 0 & \mu > b < c \\ \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} - 1 &= \Sigma_3 = 0 & \nu < b < c \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{\rho + a} + \frac{z^2}{\rho - a} - 4(x + \rho) &= S_1 = 0 & \rho > a \\ \frac{y^2}{\sigma + a} + \frac{z^2}{\sigma - a} - 4(x + \sigma) &= S_2 = 0 & \sigma < a \\ \frac{y^2}{\tau - a} + \frac{z^2}{\tau + a} + 4(x - \tau) &= S_3 = 0 & \tau > 0 \end{aligned} \right\} (S)$$

È noto come le curve d'intersezione delle superficie ortogonali sieno linee di curvatura appartenenti nel medesimo tempo alle due superficie di cui sono rispettivamente

le comuni intersezioni. Quindi per un punto dello spazio considerato come intersezione delle tre superficie di un sistema (Σ) , (S) passano tre linee di curvatura a due a due appartenenti a ciascuna superficie ed i piani normali ad esse hanno per equazioni

$$\left. \begin{aligned} N_{12} \dots \frac{x}{\lambda^2} \xi + \frac{y}{\lambda^2 - b^2} \eta + \frac{z}{\lambda^2 - c^2} \zeta - 1 &= 0, \text{ per } \Sigma_1 = 0 \Sigma_2 = 0 \\ N_{13} \dots \frac{x}{\mu^2} \xi + \frac{y}{\mu^2 - b^2} \eta + \frac{z}{\mu^2 - c^2} \zeta - 1 &= 0, \text{ per } \Sigma_1 = 0 \Sigma_3 = 0 \\ N_{23} \dots \frac{x}{\lambda^2} \xi + \frac{y}{\lambda^2 - b^2} \eta + \frac{z}{\lambda^2 - c^2} \zeta - 1 &= 0, \text{ per } \Sigma_2 = 0 \Sigma_3 = 0 \end{aligned} \right\} (\rho)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{12} \dots \frac{\xi}{\rho + \sigma + \tau} + \frac{(\rho + a)(a + \sigma)}{ay(\rho + \sigma + \tau)} \eta + \frac{(\rho - a)(a - \sigma)}{az(\rho + \sigma + \tau)} \zeta - 1 &= 0 \text{ per } S_1 = 0 \ S_2 = 0 \\ M_{13} \dots \frac{\xi}{\rho - \sigma - \tau} + \frac{(\rho + a)(\tau - a)}{ay(\tau + \sigma - \rho)} \eta + \frac{(\rho - a)(\tau + a)}{az(\rho - \tau - \sigma)} \zeta - 1 &= 0 \text{ per } S_1 = 0 \ S_3 = 0 \\ M_{23} \dots \frac{\xi}{\sigma - \tau - \rho} + \frac{(\sigma + a)(\tau - a)}{ay(\tau + \rho - \sigma)} \eta + \frac{(\rho - a)(\tau + a)}{az(\sigma - \tau - \rho)} \zeta - 1 &= 0 \text{ per } S_2 = 0 \ S_3 = 0 \end{aligned} \right\} (r)$$

avendo tenuto conto delle relazioni :

$$\begin{aligned} bcx &= \lambda \mu \nu ; \quad by \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - \nu^2} ; \\ cz \sqrt{c^2 - b^2} &= \sqrt{\lambda^2 - c^2} \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

pel primo sistema (Σ) , e

$$x = \tau - \rho - \sigma, \quad y = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\rho + a} \sqrt{a + \sigma} \sqrt{\tau - a}, \quad z = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\rho - a} \sqrt{a - \sigma} \sqrt{\tau + a}$$

pel secondo sistema (S).

Considerando i segmenti da ogni coppia di piani normali alle due linee di curvatura di una stessa superficie (Σ) , $[N_{12} \ N_{13}]$, $[N_{21} \ N_{23}]$, $[N_{31} \ N_{32}]$ tagliati sui suoi assi, i punti e che sono equidistanti dal centro comune delle superficie (Σ) e che dividono ogni segmento in rapporto armonico sono determinati dalle equazioni

$$x_1 = \pm \frac{bc}{\lambda}, \quad y_1 = \pm \frac{b \sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} \sqrt{-1}, \quad z_1 = \pm \frac{c \sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \text{ pei piani } [N_{12} \ N_{13}]$$

relativi alla superficie $\Sigma_1 = 0$ di parametro λ (2)

$$x_2 = \pm \frac{bc}{\mu}, y_2 = \pm \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \sqrt{-1}, z_2 = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} \sqrt{-1} \text{ pei piani } [N_{21} N_{23}]$$

relativi alla superficie $\sum_2 = 0$ di parametro μ (3)

$$x_3 = \pm \frac{bc}{\nu}, y_3 = \pm \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}, z_3 = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - \nu^2}} \sqrt{-1} \text{ pei piani } [N_{31} N_{32}]$$

relativi alla superficie $\sum_3 = 0$ di parametro ν (4).

Quindi considerando i segmenti da ogni coppia di piani $[M_{12} M_{13}]$, $[M_{21} M_{23}]$, $[M_{31} M_{32}]$ tagliati sull'asse delle x (asse comune ai paraboloidi S), i punti che dividono ciascun segmento in parti eguali sono dati da

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho && \text{pei piani } [M_{12} M_{13}] \text{ relativi alla superficie } S_1 = 0 \text{ di parametro } \rho \text{ (2')} \\ x_1 &= \sigma && \text{pei piani } [M_{21} M_{23}] \text{ relativi alla superficie } S_2 = 0 \text{ di parametro } \sigma \text{ (3')} \\ x_3 &= -\tau && \text{pei piani } [M_{31} M_{32}] \text{ relativi alla superficie } S_3 = 0 \text{ di parametro } \tau \text{ (4')}. \end{aligned}$$

Inoltre dalla forma delle equazioni (1) (1') risulta che ogni piano N_{12} (per es.) od M_{12} passa e per la normale alla superficie $\sum_1 = 0$ o $S_1 = 0$ e per la tangente condotta alla linea di curvatura ($\sum_1 = 0$ $\sum_2 = 0$) o ($S_1 = 0$ $S_2 = 0$) cosicchè ogni coppia dei piani N od M relativi ad una superficie coincide con quella formata dai piani delle sue sezioni normali principali.

Ed è parimenti noto dalla Teoria della curvatura delle superficie come gli ombilici di una superficie $\sum$ od S sieno i punti d'intersezione di questa colle curve (reali od immaginarie) limiti delle tre famiglie delle superficie ortogonali e perciò abbiano per coordinate :

$$\left. \begin{aligned} & \left[x=0, y = \pm \frac{b\sqrt{\lambda^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} \sqrt{-1}, z = \pm \frac{c\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} \right] \\ & \left[y=0, x = \pm \frac{b\lambda}{c}, z = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c} \right], \\ & \left[z=0, x = \pm \frac{c\lambda}{b}, y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - b^2}}{b} \sqrt{-1} \right] \end{aligned} \right\} \text{ ombilici di } \sum_1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[x=0, y = \pm \frac{b\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} \sqrt{-1}, z = \pm \frac{c\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{c^2 - b^2}} \right] \\ & \left[y=0, x = \pm \frac{b\mu}{c}, z = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c} \sqrt{-1} \right], \\ & \left[z=0, x = \pm \frac{c\mu}{b}, y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{b} \sqrt{-1} \right] \end{aligned} \right\} \text{ ombilici di } \sum_2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[x=0, y=\pm \frac{b\sqrt{b^2-v^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}, z=\pm \frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}\sqrt{-1} \right] \\ & \left[y=0, x=\pm \frac{bv}{c}, z=\pm \frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-v^2}\sqrt{-1}}{c} \right] \\ & \left[z=0, x=\pm \frac{cv}{b}, y=\pm \frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-v^2}}{b} \right] \end{aligned} \right\} \text{ ombilici di } \Sigma_3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} & [y=0, x=2a-\rho, z=2\sqrt{2a(\rho-a)}] \\ & [z=0, x=-(\rho+2a), y=2\sqrt{2a(\rho+a)}\sqrt{-1}] \end{aligned} \right\} \text{ ombilici di } S_1 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & [y=0, x=2a-\sigma, z=2\sqrt{2a(a-\sigma)}\sqrt{-1}] \\ & [z=0, x=-(\sigma+2a), y=2\sqrt{2a(\sigma+a)}\sqrt{-1}] \end{aligned} \right\} \text{ ombilici di } S_2 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & [y=0, x=2a+\tau, z=2\sqrt{2a(\tau+a)}\sqrt{-1}] \\ & [z=0, x=(2a-\tau), y=2\sqrt{2a(\tau-a)}] \end{aligned} \right\} \text{ ombilici di } S_3 = 0.$$

Dai quali valori risulta che essi giacciono quattro a quattro in ciascuno dei piani principali della superficie, e che le normali a questa in essi sono comprese nei medesimi piani. Per le espressioni (2) (3) (4); (2') (3') (4') alle equazioni di tali normali si può dare la forma :

$$\xi=0, \frac{\eta}{y_1} + \frac{\zeta}{z_1} - 1=0; \quad \eta=0, \frac{\xi}{x_1} + \frac{\zeta}{z_1} - 1=0; \quad \zeta=0, \frac{\xi}{x_1} + \frac{\eta}{y_1} - 1=0 \text{ normali a } \Sigma_1=0;$$

$$\xi=0, \frac{\eta}{y_2} + \frac{\zeta}{z_2} - 1=0; \quad \eta=0, \frac{\xi}{x_2} + \frac{\zeta}{z_2} - 1=0; \quad \zeta=0, \frac{\xi}{x_2} + \frac{\eta}{y_2} - 1=0 \text{ normali a } \Sigma_2=0;$$

$$\xi=0, \frac{\eta}{y_3} + \frac{\zeta}{z_3} - 1=0; \quad \eta=0, \frac{\xi}{x_3} + \frac{\zeta}{z_3} - 1=0; \quad \zeta=0, \frac{\xi}{x_3} + \frac{\eta}{y_3} - 1=0 \text{ normali a } \Sigma_3=0 \quad (5);$$

$$\xi \pm \frac{\sqrt{\rho+a}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1} \quad \eta=\rho, \zeta=0; \quad \xi \pm \frac{\sqrt{\rho-a}}{\sqrt{2a}} \quad \zeta=\rho, \eta=0 \text{ normali a } S_1=0,$$

$$\xi \pm \frac{\sqrt{\sigma+a}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1} \quad \eta=\sigma, \zeta=0; \quad \xi \pm \frac{\sqrt{a-\sigma}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1} \quad \zeta=\sigma, \eta=0 \text{ normali a } S_2=0, \quad e$$

$$\xi \pm \frac{\sqrt{\tau-a}}{\sqrt{2a}} \quad \eta=-\tau, \zeta=0; \quad \xi \pm \frac{\sqrt{\tau+a}}{\sqrt{2a}}\sqrt{-1} \quad \zeta=-\tau, \eta=0 \text{ normali a } S_3=0 \quad (5').$$

Laonde per le espressioni (2) (3) (4) (5) o (2') (3') (4') (5'), notando come ognuna

delle superficie Σ od S sia rappresentata col porre il suo parametro eguale ad una costante, si hanno i seguenti Teoremi :

Teorema 1° (1. 3. 10 di *Heilermann*) Si considerino le due linee di curvatura che si incrociano in un punto qualunque M di una superficie di secondo grado dotata di centro (Σ), ed avendo condotto ad esse nel punto comune i loro piani normali, si determinino i segmenti da questi intercettati sovra ogni asse della superficie allora :

1° i punti equidistanti dal centro e che dividono ogni segmento in rapporto armonico sono costanti, qualunque sia M .

2° essi coincidono coi punti ove le normali alla superficie (Σ) negli ombilici corrispondenti (reali od immaginari) vanno ad incontrare gli assi.

Teorema 2° Si considerino le due linee di curvatura che s'incrociano in un punto qualunque M di una superficie di secondo grado priva di centro (S), ed avendo condotto ad esse nel punto comune i loro piani normali si determini il segmento da questi intercettato sovra l'asse della superficie, allora: 1° il punto che divide il segmento in parti eguali è costante, qualunque sia M , 2° esso coincide col punto ove le normali alla superficie negli ombilici tagliano l'asse della superficie.

2.

Disegnando col nome di *punti focali* tali punti fissi, se per la normale condotta in un punto qualunque M ad una superficie Σ e per ciascuno dei due punti focali giacenti sovra un asse si conducono due piani, questi formano coi piani delle sezioni normali principali in M o piani normali alle linee di curvatura di Σ incrociandosi in M un fascio armonico. Similmente se per la normale in un punto qualunque M ad una superficie S si conducono due piani, uno pel punto focale, l'altro parallelamente all'asse, questi formano sui piani normali alle linee di curvatura di S che s'incrociano in M un fascio armonico. Inoltre i piani delle sezioni normali principali essendo ortogonali essi bisecano gli angoli chiusi dagli altri due piani del fascio.

2° Le sfere che hanno il centro in un punto focale e per raggio la porzione della normale condotta alla superficie [(Σ) o (S)] nell'ombilico corrispondente compresa fra questa ed il punto focale, chiamansi *sfere focali*, le quali si dicono poi *conjugate* quando hanno per centri i punti focali di (Σ) o (S) posti sopra un medesimo asse. Se da un punto qualunque della superficie si conduce una tangente ad una delle sue sfere focali, la porzione di questa compresa fra il punto della superficie ed il punto di tangenza chiamasi *raggio focale*.

3.

Le coppie delle sfere focali conjugate per le superficie Σ , e le uniche sfere fo-

cali per le superficie S sono date dalle equazioni :

$$(\xi - \rho)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(\rho^2 - a^2) \quad \text{per } S_1 = 0,$$

$$(\xi - \sigma)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(\sigma^2 - a^2) \quad (7') \quad \text{per } S_2 = 0,$$

$$(\xi + \tau)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(\tau^2 - a^2) \quad (8') \quad \text{per } S_3 = 0,$$

ed

$$\left(\xi \mp \frac{bc}{\lambda}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}{\lambda^2};$$

$$\xi^2 + \left(\eta \mp \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} \sqrt{-1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - c^2)}{(\lambda^2 - b^2)};$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta \mp \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}\right)^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - b^2)}{(\lambda^2 - c^2)} \quad (6) \quad \text{per } \Sigma_1 = 0$$

$$\left(\xi \mp \frac{bc}{\mu}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = - \frac{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}{\mu^2};$$

$$\xi^2 + \left(\eta \mp \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \sqrt{-1}\right)^2 + \zeta^2 = - \frac{\mu^2(c^2 - \mu^2)}{(\mu^2 - b^2)};$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta \mp \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} \sqrt{-1}\right)^2 = - \frac{\mu^2(\mu^2 - b^2)}{(c^2 - \mu^2)} \quad (7) \quad \text{per } \Sigma_2 = 0$$

$$\left(\xi \mp \frac{bc}{\nu}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{\nu^2};$$

$$\xi^2 + \left(\eta \mp \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\nu^2(c^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)};$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta \mp \frac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - \nu^2}} \sqrt{-1}\right)^2 = \frac{\nu^2(b^2 - \nu^2)}{c^2 - \nu^2} \quad (8) \quad \text{per } \Sigma_3 = 0.$$

Ed i raggi focali condotti da un punto qualunque di una superficie alle sue sfere focali sono in coordinate ellittiche :

$$\psi_1^2 = (\mu \mp \nu)^2; \quad \psi_2^2 = [\sqrt{\mu^2 - b^2} \mp \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]^2,$$

$$\psi_3^2 = - [\sqrt{c^2 - \mu^2} \mp \sqrt{c^2 - \nu^2}]^2 \quad \text{per } \Sigma_1;$$

$$\varphi_1^2 = (\lambda \mp \nu)^2; \quad \varphi_2^2 = [\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]^2,$$

$$\varphi_3^2 = [\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]^2 \quad \text{per } \Sigma_2;$$

*

$$\chi_1^2 = (\lambda \mp \mu)^2, \quad \chi_2^2 = [\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{\mu^2 - b^2}]^2,$$

$$\chi_3^2 = [\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{-1}]^2 \text{ per } \Sigma_3 = 0 \quad (9)$$

nelle quali deve prendersi il segno — per la prima sfera focale ed il segno + per la rimanente: e da

$$\omega_1 = \tau + \sigma \text{ per } S_1, \quad \omega_2 = \tau + \rho \text{ per } S_2, \quad \omega_3 = \sigma - \rho \text{ per } S_3 \quad (9').$$

Chiamati *piani direttori* i piani polari d'un punto focale appartenente ad una delle tre superficie Σ od S relativamente alle due rimanenti, avremo:

$$\xi = \pm \frac{\mu^2}{x_1}, \quad \eta = \pm \frac{(\mu^2 - b^2)}{y_1}, \quad \zeta = \pm \frac{(c^2 - \mu^2)}{z_1}; \quad \xi = \pm \frac{\nu^2}{x_1}, \quad \eta = \mp \frac{(b^2 - \nu^2)}{y_1},$$

$$\zeta = \pm \frac{(c^2 - \nu^2)}{z_1} \text{ pei punti focali di } \Sigma_1 \text{ relativamente a } \Sigma_2; \text{ a } \Sigma_3$$

$$\xi = \pm \frac{\lambda^2}{x_2}, \quad \eta = \pm \frac{(\lambda^2 - b^2)}{y_2}, \quad \zeta = \pm \frac{(\lambda^2 - c^2)}{z_2}; \quad \xi = \pm \frac{\nu^2}{x_2}, \quad \eta = \mp \frac{(b^2 - \nu^2)}{y_2},$$

$$\zeta = \mp \frac{(c^2 - \nu^2)}{z_2} \text{ pei punti focali di } \Sigma_2 \text{ relativamente a } \Sigma_1; \text{ a } \Sigma_3$$

$$\xi = \pm \frac{\lambda^2}{x_3}, \quad \eta = \pm \frac{\lambda^2 - b^2}{y_3}, \quad \zeta = \pm \frac{(\lambda^2 - c^2)}{z_3}; \quad \xi = \pm \frac{\mu^2}{x_3}, \quad \eta = \pm \frac{\mu^2 - b^2}{y_3},$$

$$\zeta = \mp \frac{c^2 - \mu^2}{z_3} \text{ pei punti focali di } \Sigma_3 \text{ relativamente a } \Sigma_1; \text{ a } \Sigma_2$$

$$\xi = -(\rho + 2\sigma); \quad \xi = (2\sigma - \rho) \text{ pel punto focale di } S_1 \text{ rispetto a } S_2; \text{ a } S_3,$$

$$\xi = -(\sigma + 2\rho); \quad \xi = (2\tau - \sigma) \text{ pel punto focale di } S_2 \text{ rispetto a } S_1; \text{ a } S_3 \text{ e}$$

$$\xi = -(2\rho - \tau); \quad \xi = -(2\sigma - \tau) \text{ pel punto focale di } S_3 \text{ rispetto a } S_1; \text{ a } S_2.$$

Ora le distanze di un punto qualunque $M(xyz)$ di una delle superficie Σ od S ai suoi piani direttori espresse in coordinate ellittiche sono:

$$p_1^2 = \frac{\mu^2}{x_1^2} \psi_1^2, \quad p_2^2 = \frac{\nu^2}{x_1^2} \psi_1^2; \quad q_1^2 = \frac{\mu^2 - b^2}{y_1^2} \psi_2^2, \quad q_2^2 = \frac{\nu^2 - b^2}{y_1^2} \psi_2^2;$$

$$r_1^2 = \frac{\mu^2 - c^2}{z_1^2} \psi_3^2, \quad r_2^2 = \frac{\nu^2 - c^2}{z_1^2} \psi_3^2 \text{ per un punto di } \Sigma_1 \quad (10);$$

$$p_1'^2 = \frac{\lambda^2}{x_2^2} \varphi_1^2, \quad p_2'^2 = \frac{\nu^2}{x_2^2} \varphi_1^2; \quad q_1'^2 = \frac{\lambda^2 - b^2}{y_2^2} \varphi_2^2, \quad q_2'^2 = \frac{\nu^2 - b^2}{y_2^2} \varphi_2^2;$$

$$r_1'^2 = \frac{\lambda^2 - c^2}{z_2^2} \varphi_3^2, \quad r_2'^2 = \frac{\nu^2 - c^2}{z_2^2} \varphi_3^2 \text{ per un punto di } \Sigma_2 \quad (11);$$

$$p_1'^2 = \frac{\lambda^2}{x_3^2} \chi_1^2, \quad p_2'^2 = \frac{\mu^2}{x_3^2} \chi_1^2; \quad q_2''^2 = \frac{\lambda^2 - b^2}{y_3^2} \chi_2^2, \quad q_1''^2 = \frac{\mu^2 - b^2}{y_3^2} \chi_2^2;$$

$$r_1''^2 = \frac{\lambda^2 - c^2}{z_3^2} \chi_3^2, \quad r_2''^2 = \frac{\mu^2 - c^2}{z_3^2} \chi_3^2 \text{ per un punto di } \Sigma_3 \quad (12):$$

$$\varpi_1 = \omega_1, \quad \varpi'_1 = -\omega_1 \text{ per un punto di } S_1,$$

$$\varpi_2 = \omega_2, \quad \varpi'_2 = -\omega_2 \text{ per un punto di } S_2,$$

$$\varpi_3 = \omega_3, \quad \varpi'_3 = -\omega_3 \text{ per un punto di } S_3 \quad (10').$$

4.

Dalle espressioni (10) (11) (12) (11') si ricavano i rapporti

$$\frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{\mu^2}{\nu^2}, \quad \frac{p_1'^2}{p_2'^2} = \frac{\lambda^2}{\nu^2}, \quad \frac{p_1''^2}{p_2''^2} = \frac{\lambda^2}{\mu^2}; \quad \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{\mu^2 - b^2}{\nu^2 - b^2}, \quad \frac{q_1'^2}{q_2'^2} = \frac{\lambda^2 - b^2}{\nu^2 - b^2}, \quad \frac{q_1''^2}{q_2''^2} = \frac{\lambda^2 - b^2}{\mu^2 - b^2};$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\mu^2 - c^2}{\nu^2 - c^2}, \quad \frac{r_1'^2}{r_2'^2} = \frac{\lambda^2 - c^2}{\nu^2 - c^2}, \quad \frac{r_1''^2}{r_2''^2} = \frac{\lambda^2 - c^2}{\mu^2 - c^2}; \quad \frac{\varpi_1}{\varpi'_1} = -1, \quad \frac{\varpi_2}{\varpi'_2} = -1, \quad \frac{\varpi_3}{\varpi'_3} = 1,$$

donde derivano i seguenti Teoremi.

Teorema 3°: Considerando il punto focale (reale od immaginario) F appartenente ad una superficie di secondo grado dotata di centro (Σ_1) ed i suoi piani direttori D_1, D_2 , cioè i piani polari di F relativamente alle superficie $(\Sigma_2), (\Sigma_3)$, il rapporto delle distanze di un punto qualunque M di (Σ_1) intersezione di $(\Sigma_1), (\Sigma_2), (\Sigma_3)$ dai piani D_1, D_2 eguaglia quello sussistente fra gli assi di (Σ_2) e di (Σ_3) su cui giace F .

Corollario. Per le relazioni

$$\frac{p_1^2 p_2'^2 p_1''^2}{p_2^2 p_1'^2 p_2''^2} = \frac{\mu^2 \nu^2 \lambda^2}{\nu^2 \lambda^2 \mu^2} = 1, \quad \frac{q_1^2 q_2'^2 q_1''^2}{q_2^2 q_1'^2 q_2''^2} = 1, \text{ ec.}$$

abbiamo pure: Si considerino le tre superficie ortogonali $(\Sigma_1), (\Sigma_2), (\Sigma_3)$ che determinano un punto qualunque M , e sieno F_1, F_2, F_3 i punti focali di esse giacenti sopra gli assi delle medesime coincidenti in direzione, sieno D'_2, D'_3 i piani direttori di F_1 ; $D_1^{(2)}, D_3^{(2)}$ i piani direttori di F_2 , e $D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ i piani direttori di F_3 , il prodotto delle distanze di M dai tre piani $D'_2, D_3^{(2)}, D_1^{(3)}$ eguaglia quello delle distanze di M dai tre rimanenti $D'_3, D_1^{(2)}, D_2^{(3)}$.

Teorema 4°: Considerando il punto focale f_1 di una superficie di secondo grado priva di centro (S) , ed i suoi piani direttori d_1, d_2 , le distanze di un punto qualunque di (S) da essi sono eguali e contrarie in direzione.

5.

Divisa la distanza di due punti focali coniugati F_1, F_2 di una delle superficie $(\Sigma), (\Sigma_1)$ per l'asse su cui essi giacciono appartenente però ad una delle due rimanenti superficie ortogonali (Σ_2) , il rapporto così ottenuto chiamasi eccentricità della linea di curvatura determinata da (Σ_2) sopra (Σ_1) relativamente ai punti focali considerati F_1, F_2 . Ora dalle espressioni (10) (11) (12), e per l'equazioni in coordinate ellittiche di una linea di curvatura si deduce il:

Teorema 5° Per ogni punto M di una linea di curvatura di una delle superficie $\Sigma (\Sigma_1)$ determinata su questa da una delle due rimanenti, (Σ_2) , il raggio focale condotto ad una delle due sfere focali conjugate (centri F_1, F_2) diviso per la distanza del punto M dal piano direttore, piano polare del centro della sfera considerata relativamente a (Σ_2) dà un quoziente costante ed eguale alla eccentricità della linea di curvatura relativamente ai punti focali F_1, F_2 . Questo Teorema comprende il 7° di Heillermann.

Per le superficie (S) a causa delle relazioni (10') sussiste pure il seguente :

Teorema 6° Per ogni punto M di una linea di curvatura di una delle superficie $S (S_1)$, determinata su questa da una delle due rimanenti (S_2) , il raggio focale condotto alla sfera focale diviso per la distanza del punto M dal piano direttore dà per quoziente l'unità.

6.

I raggi focali condotti da un punto qualunque di una superficie Σ ad ogni coppia di sfere focali conjugate hanno i valori :

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \mu - \nu, \psi''_1 = \mu + \nu, \psi'_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}, \\ \psi''_2 &= \sqrt{\mu^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}, \psi'_3 = [\sqrt{c^2 - \nu^2} - \sqrt{c^2 - \mu^2}] \sqrt{-1}, \\ \psi''_3 &= [\sqrt{c^2 - \nu^2} + \sqrt{c^2 - \mu^2}] \sqrt{-1} \text{ per le sfere focali di } \Sigma_1; \\ \varphi'_1 &= \lambda - \nu, \varphi''_1 = \lambda + \nu, \varphi'_2 = \sqrt{\lambda^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}, \\ \varphi''_2 &= \sqrt{\lambda^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}, \varphi'_3 = \sqrt{\lambda^2 - c^2} - \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{-1}, \\ \varphi''_3 &= \sqrt{\lambda^2 - c^2} + \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{-1} \text{ per le sfere focali di } \Sigma_2; \\ \chi'_1 &= \lambda - \mu, \chi''_1 = \lambda + \mu, \chi'_2 = \sqrt{\lambda^2 - b^2} - \sqrt{\mu^2 - b^2}, \\ \chi''_2 &= \sqrt{\lambda^2 - b^2} + \sqrt{\mu^2 - b^2}, \chi'_3 = \sqrt{\lambda^2 - c^2} - \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{-1}, \\ \chi''_3 &= \sqrt{\lambda^2 - c^2} + \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{-1} \text{ per le sfere focali di } \Sigma_3 \quad (13). \end{aligned}$$

Questi unitamente alle equazioni delle linee di curvatura conducano al seguente :

Teorema 7° Per tutti i punti di una linea di curvatura di una superficie di secondo grado dotata di centro Σ , e secondo che essa è determinata dall'una o dall'altra delle superficie ortogonali e di specie diversa la somma o la differenza dei raggi focali condotti a due sfere focali conjugate è costante ed eguaglia l'asse (reale od immaginario) della superficie che determina la linea di curvatura asse che contiene i centri delle due sfere focali considerate. Questo comprende il Teorema 8° di *Heilermann*.

Prendendo il prodotto dei raggi delle tre coppie di sfere conjugate appartenenti ad una superficie Σ si ottiene il seguente:

Teorema 8° Il prodotto dei raggi delle tre coppie di sfere focali conjugate relative ad una superficie Σ eguaglia il prodotto dei suoi tre semi-assi.

7.

Le tangenti condotte in $M(x y z)$ punto d'intersezione delle tre superficie ortogonali Σ alle tre linee di curvatura che in esso s'incrociano hanno per equazioni :

$$\xi = - \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \lambda \mu \sqrt{c^2 - v^2}}{b v \sqrt{\lambda^2 - c^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}} \zeta + \frac{c \lambda \mu}{b v},$$

$$\eta = \frac{c \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - v^2}}{b \sqrt{\lambda^2 - c^2} \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{b^2 - v^2}} \zeta - \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - b^2}}{b \sqrt{c^2 - v^2}}, \quad T_{12} \text{ tangente alla linea}$$

di curvatura $\Sigma_1 = 0 \quad \Sigma_2 = 0$;

$$\xi = - \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \lambda v \sqrt{c^2 - \mu^2}}{b \mu \sqrt{\lambda^2 - c^2} \sqrt{c^2 - v^2}} \zeta + \frac{c \lambda v}{b \mu},$$

$$\eta = \frac{c \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{b^2 - v^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}}{b \sqrt{\lambda^2 - c^2} \sqrt{c^2 - v^2} \sqrt{\mu^2 - b^2}} \zeta + \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{b^2 - v^2}}{b \sqrt{\mu^2 - b^2}}, \quad T_{13} \text{ tangente alla linea}$$

di curvatura $\Sigma_1 = 0 \quad \Sigma_3 = 0$;

$$\xi = - \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \mu v \sqrt{\lambda^2 - c^2}}{b \lambda \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - v^2}} \zeta + \frac{c \mu v}{b \lambda},$$

$$\eta = \frac{c \sqrt{\lambda^2 - c^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - v^2}}{b \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - v^2}} \zeta + \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - v^2}}{b \sqrt{\lambda^2 - b^2}}, \quad T_{23} \text{ tangente alla linea}$$

di curvatura $\Sigma_2 = 0 \quad \Sigma_3 = 0$.

Designando ora con $\Delta_1 \Delta'_1$ i semi-diametri di Σ_1 paralleli alle tangenti T_{12} , T_{13} , con $\Delta_2 \Delta'_2$ i semi-diametri Σ_2 paralleli alle tangenti T_{12} , T_{23} con $\Delta_3 \Delta'_3$ i semi-diametri di Σ_3 paralleli a T_{13} , T_{23} abbiamo

$$\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \nu^2}, \Delta'_1 = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}; \quad \Delta_2 = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, \Delta'_2 = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{-1};$$

$$\Delta_3 = \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \sqrt{-1}, \Delta'_3 = \sqrt{\lambda^2 - \nu^2} \sqrt{-1} \quad (14) \text{ e per le (13);}$$

$$\Delta_1^2 = \varphi'_1 \varphi''_1 = \varphi'_2 \varphi''_2 = \varphi'_3 \varphi''_3 = \left(\frac{\frac{1}{2} \Delta'_3}{\sqrt{-1}} \right)^2, \quad \Delta_2^2 = \left(\frac{\Delta_3}{\sqrt{-1}} \right)^2 = \psi'_1 \psi''_1 = \psi'_2 \psi''_2 = \psi'_3 \psi''_3,$$

$$\Delta_2'^2 = \left(\frac{\Delta'_2}{\sqrt{-1}} \right)^2 = \chi'_1 \chi''_1 = \chi'_2 \chi''_2 = \chi'_3 \chi''_3 \quad (15);$$

dalle quali si deduce il seguente :

Teorema 9°. Consideriamo la tangente (T_{12}) condotta in un punto qualunque M ad una linea di curvatura di una delle superficie Σ (Σ_1) determinatavi da una delle due rimanenti, (Σ_2), i raggi focali ad una coppia qualunque di sfere focali conjugate di quest'ultima superficie (Σ_2) danno un prodotto eguale al quadrato del semi-diametro della prima superficie (Σ_1), (diviso per $(\sqrt{-1})^2$ se immaginario) parallelo alla tangente considerata T_{12} .

8.

Considerando il punto qualunque M intersezione delle tre superficie S ed i piani tangenti a ciascuna di queste, le perpendicolari abbassate dall'origine delle coordinate su di loro hanno in coordinate ellittiche le espressioni :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{2\sqrt{\rho + \tau}\sqrt{\rho - \sigma}} \text{ perpendicolare sul piano tangente a } S_1, \\ \beta_2 &= \frac{\sqrt{a^2 - \sigma^2}}{2\sqrt{\sigma + \tau}\sqrt{\rho - \sigma}} \text{ perpendicolare sul piano tangente a } S_2, \\ \beta_3 &= \frac{\sqrt{\tau^2 - a^2}}{2\sqrt{\rho + \tau}\sqrt{\tau + \sigma}} \text{ perpendicolare sul piano tangente a } S_3 \quad (11'). \end{aligned}$$

Inoltre avremo ancora :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\sqrt{\rho + \tau}\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho - \sigma}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\rho - \sigma}\sqrt{\rho^2 - \sigma^2}}{\sqrt{\rho + \tau}} \text{ normali abbassate dai punti focali di } \\ &\quad S_2, S_3 \text{ sul piano tangente a } S_1, \\ \gamma'_1 &= \frac{\sqrt{\tau + \sigma}\sqrt{a^2 - \sigma^2}}{\sqrt{\rho - \sigma}}, \quad \gamma'_2 = \frac{\sqrt{\rho - \sigma}\sqrt{a^2 - \sigma^2}}{\sqrt{\tau + \sigma}} \text{ normali abbassate dai punti focali di } \\ &\quad S_1, S_3 \text{ sul piano tangente a } S_2, \end{aligned}$$

$$\gamma_1'' = \frac{\sqrt{\tau+\sigma}\sqrt{\tau^2-a^2}}{\sqrt{\rho+\tau}}, \quad \gamma_2'' = \frac{\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau^2-a^2}}{\sqrt{\tau+\sigma}} \text{ normali abbassate dai punti focali di}$$

S_1 e di S_2 sul piano tangente a S_3 (12').

Per le (11'), le (9') e l'equazioni in coordinate ellittiche delle linee di curvatura delle superficie S , si ha il seguente Teorema:

Teorema 10° Se si prende per origine il punto di mezzo della distanza che separa i fochi delle sezioni principali nelle superficie S , considerando una linea di curvatura di S_1 determinatavi da S_2 , la perpendicolare abbassata dall'origine sul piano tangente a S_1 in un punto qualunque di essa M moltiplicata per la radice quadrata del raggio focale di M relativo alla sfera focale di S_2 dà un prodotto costante, qualunque sia M . - Questo è analogo al bel Teorema di *Joachimsthal* sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado dotate di centro. Per le (12') si ha ancora

Teorema 11° Considerando una linea di curvatura di S_1 determinatavi da S_2 , la perpendicolare abbassata dal punto focale F_2 di S_2 sul piano tangente a S_1 in un punto qualunque M di essa divisa per la radice quadrata del raggio focale di M relativo alla sfera focale di S_2 è costante qualunque sia M .

Teorema 12° Considerando il piano tangente in un punto qualunque M di una delle superficie S , (S_3) le perpendicolari abbassate su questo dai punti focali delle due rimanenti superficie (S_1) (S_2) che passano per M danno un prodotto costante.

9.

Considerando il punto qualunque M intersezione delle tre superficie Σ ed i piani tangenti a ciascuna di queste le perpendicolari abbassate dal centro comune su di loro hanno in coordinate ellittiche le espressioni :

$$P_1 = \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}} \text{ normale abbassata dal centro sul piano tangente a } \Sigma_1,$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{\mu^2(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}} \text{ normale abbassata dal centro sul piano tangente a } \Sigma_2,$$

$$P_3 = \frac{\sqrt{\nu^2(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\lambda^2-\nu^2}} \text{ normale abbassata dal centro sul piano tangente a } \Sigma_3 \quad (16).$$

Inoltre avremo :

$$\delta_{11} = \frac{(\lambda \mp \nu)}{\lambda} P_1, \quad \varepsilon_{11} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} P_1, \quad \eta_{11} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}},$$

$$\delta_{21} = \frac{(\lambda \mp \mu)}{\lambda} P_1, \quad \varepsilon_{21} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{\mu^2 - b^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} P_1, \quad \eta_{21} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} P_1,$$

per le normali abbassate dai punti focali di Σ_2 di Σ_3 sul piano tangente a Σ_1 ;

$$\delta_{12} = \frac{(\mu \mp \nu)}{\mu} P_2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{[\sqrt{\mu^2 - b^2} \mp \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} P_2, \quad \eta_{12} = \frac{[\sqrt{c^2 - \nu^2} \pm \sqrt{c^2 - \mu^2}]}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} P_2;$$

$$\delta_{22} = \frac{(\lambda \mp \mu)}{\mu} P_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{\mu^2 - b^2}]}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} P_2, \quad \eta_{22} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{-1}} P_2$$

per le normali abbassate dai punti focali di Σ_1 , Σ_3 sul piano tangente a Σ_2 ;

$$\delta_{13} = \frac{(\mu \mp \nu)}{\nu} P_3, \quad \varepsilon_{13} = \frac{[\sqrt{\mu^2 - b^2} \mp \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}} P_3, \quad \eta_{13} = \frac{[\sqrt{c^2 - \nu^2} \pm \sqrt{c^2 - \mu^2}]}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} P_3;$$

$$\delta_{23} = \frac{(\lambda \mp \nu)}{\nu} P_3, \quad \varepsilon_{23} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - b^2} \mp \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{-1}} P_3, \quad \eta_{23} = \frac{[\sqrt{\lambda^2 - c^2} \mp \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{-1}]}{\sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{-1}} P_3$$

normali abbassate dei punti focali di Σ_1 , Σ_2 sul piano tangente a Σ_3 (17).

Per le equazioni (15) (16) e per quelle relative alle linee di curvatura si ha il seguente teorema:

Teorema 13° Considerando una linea di curvatura di Σ_1 determinatavi da Σ_2 , la perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente a Σ_1 in un punto qualunque M di essa moltiplicata per la radice quadrata del prodotto dei raggi focali relativi ad una coppia di sfere focali conjugate di Σ_2 è costante qualunque sia M. — Questo è il Teorema di *Joachimsthal* enunciato in un nuovo modo. Quindi dalle relazioni (17) si deducono parimenti i seguenti teoremi:

Teorema 14° Considerando una linea di curvatura di Σ_1 determinatavi da Σ_2 ed il piano tangente a Σ_1 in un punto qualunque della medesima M, il rapporto delle perpendicolari abbassate su di questo da una coppia di punti focali conjugati della superficie Σ_2 eguaglia il rapporto sussistente frai raggi focali condotti da M alla coppia delle sfere focali conjugate di Σ_2 che hanno i punti focali considerati per centri.

Teorema 15° Considerando una linea di curvatura di Σ_1 determinatavi da Σ_2 ed il piano tangente a Σ_1 in un punto qualunque della medesima, M, il prodotto delle perpendicolari abbassate su di queste da una coppia di punti focali conjugati di Σ_2 è costante, qualunque M.

10.

Dalle espressioni (17') si ottiene

$$\delta'_{11} + \delta''_{11} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon''_{11} = \eta'_{11} + \eta''_{11} = \delta'_{21} + \delta''_{21} = \varepsilon'_{21} + \varepsilon''_{21} = \eta'_{21} + \eta''_{21} = 2P_1,$$

$$\delta'_{12} + \delta''_{12} = \varepsilon'_{12} + \varepsilon''_{12} = \eta'_{12} + \eta''_{12} = \delta'_{22} + \delta''_{22} = \text{ec.} = 2P_2,$$

$$\delta'_{13} + \delta''_{13} = \varepsilon'_{13} + \varepsilon''_{13} = \eta'_{13} + \eta''_{13} = \delta'_{23} + \delta''_{23} = \text{ec.} = 2P_2,$$

e perciò

$$\frac{\sqrt{\delta'_{11} \delta''_{11}}}{\sqrt{\varphi'_{11} \varphi''_{11}}} = \frac{\frac{1}{2}(\delta'_{11} + \delta''_{11})}{\frac{1}{2}(\varphi'_{11} + \varphi''_{11})}, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon'_{11} \varepsilon''_{11}}}{\sqrt{\varphi'_{12} \varphi''_{12}}} = \frac{\frac{1}{2}(\varepsilon'_{11} + \varepsilon''_{11})}{\frac{1}{2}(\varphi'_{12} + \varphi''_{12})}, \quad \frac{\sqrt{\eta'_{11} \eta''_{11}}}{\sqrt{\varphi'_{13} \varphi''_{13}}} = \frac{\frac{1}{2}(\eta'_{11} + \eta''_{11})}{\frac{1}{2}(\varphi'_{13} + \varphi''_{13})} \text{ ec. :}$$

donde

Teorema 16°. Considerando una linea di curvatura di Σ_1 determinatavi da Σ_2 ed il piano tangente a Σ_1 in un punto qualunque M della medesima, se su di questo si abbassano le perpendicolari da una coppia di punti focali coniugati di Σ_2 , F'_2 , F''_2 e se da M si conducono i raggi focali alla coppia di sfere focali conjugate di Σ_2 aventi per centri F'_2 , F''_2 , le medie aritmetiche dei raggi focali e delle perpendicolari saranno proporzionali alle medie geometriche di queste medesime linee.

Se in un punto qualunque M intersezione delle superficie Σ od S si conducono le normali a ciascuna di queste, le porzioni delle medesime comprese fra il punto M ed i punti ove tagliano i piani principali delle superficie a cui appartengono sono espresse in coordinate ellittiche da:

$$N_{11} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2 - b^2)}} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{\lambda^2 - \nu^2}, \quad N_{21} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2 - c^2)}} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{\lambda^2 - \nu^2},$$

$$N_{31} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{\lambda^2 - c^2}} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{\lambda^2 - \nu^2} \quad \text{per la normale a } \Sigma_1 \text{ rispetto ai piani} \\ \zeta = 0; \eta = 0; \xi = 0$$

$$N_{12} = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - b^2)}} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, \quad N_{22} = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - c^2)}} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - \nu^2},$$

$$N_{32} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2}} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \quad \text{per la normale a } \Sigma_2 \text{ rispetto ai piani} \\ \zeta = 0; \eta = 0; \xi = 0$$

$$N_{31} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{v^2(v^2 - b^2)}} \sqrt{\mu^2 - v^2} \sqrt{\lambda^2 - v^2}, \quad N_{32} = \frac{\sqrt{b^2 - v^2}}{\sqrt{v^2(c^2 - v^2)}} \sqrt{\mu^2 - v^2} \sqrt{\lambda^2 - v^2},$$

$$N_{33} = \frac{v}{\sqrt{b^2 - v^2} \sqrt{c^2 - v^2}} \sqrt{\mu^2 - v^2} \sqrt{\lambda^2 - v^2} \quad \text{per la normale a } S_3 \text{ rispetto ai piani}$$

$$\zeta = 0; \eta = 0; \xi = 0:$$

$$n_{11} = \frac{2\sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}\sqrt{\rho-a}}{\sqrt{\rho+a}}, \quad n_{21} = \frac{2\sqrt{\rho+a}}{\sqrt{\rho-a}} \sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\rho-\sigma};$$

$$n_{12} = \frac{2\sqrt{a-\sigma}}{\sqrt{a+\sigma}} \sqrt{\sigma+\tau}\sqrt{\rho-\sigma}, \quad n_{22} = \frac{2\sqrt{a+\sigma}}{\sqrt{a-\sigma}} \sqrt{\sigma+\tau}\sqrt{\rho-\sigma};$$

$$n_{13} = \frac{2\sqrt{\tau+a}}{\sqrt{\tau-a}} \sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau+\sigma}, \quad n_{23} = \frac{2\sqrt{\tau-a}}{\sqrt{\tau+a}} \sqrt{\rho+\tau}\sqrt{\tau+\sigma}$$

per le normali alle superficie S_1, S_2, S_3 rispetto ai piani $\zeta=0, \eta=0$. Laonde si ha:

Teorema 17° Se in un punto qualunque M della linea di curvatura appartenente alla superficie (Σ_1) determinatavi da (Σ_2) si conduca una normale a Σ_2 la porzione di questa compresa fra il punto M ed il punto ove taglia uno dei piani principali della superficie Σ_2 divisa per la radice quadrata del prodotto dei raggi focali condotti da M ad una delle coppie delle sfere focali conjugate di Σ_2 è costante qualunque sia M .

Teorema 18° Se in un punto qualunque M della linea di curvatura appartenente alla superficie (S_1) determinatavi da (S_2) si conduce una normale a (S_2) la porzione di questa compresa fra il punto M ed il punto ove taglia uno dei piani principali della superficie S_2 divisa per la radice quadrata del raggio focale condotto da M alla sfera focale di S_2 è costante.

Posto

$$R_{11} = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)}}{\lambda}, \quad R_{21} = \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2 - c^2)}}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}, \quad R_{31} = \frac{\sqrt{\lambda^2(\lambda^2 - b^2)}}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}$$

raggi delle sfere (6) focali di Σ_1 ,

$$R_{12} = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\mu}, \quad R_{22} = \frac{\sqrt{\mu^2(c^2 - \mu^2)}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}, \quad R_{32} = \frac{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - b^2)}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}},$$

i quali moltiplicati per $\sqrt{-1}$ danno i raggi delle sfere focali di Σ_2 ,

$$R_{13} = \frac{\sqrt{b^2 - v^2} \sqrt{c^2 - v^2}}{v}, \quad R_{23} = \frac{\sqrt{v^2(c^2 - v^2)}}{\sqrt{b^2 - v^2}}, \quad R_{33} = \frac{\sqrt{v^2(b^2 - v^2)}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

raggi delle sfere focali di Σ_3 , ed

$$r_1 = 2\sqrt{\rho^2 - a^2}, \quad r_2 = 2\sqrt{a^2 - \sigma^2}, \quad r_3 = 2\sqrt{\tau^2 - a^2}, \quad r_1, r_2\sqrt{-1}, r_3$$

raggi focali delle sfere focali di S_1, S_2, S_3 ; abbiamo le relazioni :

$$\frac{R_{31} N_{11}}{R_{32} N_{12}} = \frac{\sqrt{\phi'_3 \phi''_3}}{\sqrt{\psi'_3 \psi''_3}}, \quad \frac{R_{21} N_{21}}{R_{22} N_{22}} = \frac{\sqrt{\phi'_2 \phi''_2}}{\sqrt{\psi'_2 \psi''_2}}, \quad \frac{N_{31} R_{11}}{N_{32} R_{12}} = \frac{\sqrt{\phi'_1 \phi''_1}}{\sqrt{\psi'_1 \psi''_1}} \text{ ec.}$$

$$\frac{n_{11} r_1}{n_{12} r_2} = \frac{\rho - a}{a - \sigma} \cdot \frac{\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1}}, \quad \text{ec.}$$

dalle quali si ricaverebbero nuovi Teoremi.