Ueber ein Theorem der analytischen Mechanik.

Von

A. Voss in München.

Bereits in den Fragmenten von Lagrange, welche in die von Herrn Bertrand besorgte Ausgabe der *Mécanique Analytique* aufgenommen sind*), findet sich die Bemerkung, dass die 3 Euler'schen Differentialgleichungen der Rotation eines starren Systems für ein beliebiges System materieller Punkte in unveränderter Form in Gültigkeit bleiben. Später hat Liouville,**) ohne dabei freilich diese Analogie hervortreten zu lassen, jene Gleichungen für diesen letzteren Fall abgeleitet; doch wird diese Verallgemeinerung selbst auf Poisson zurückgeführt, der in seiner Arbeit über die Variation der Constanten bereits einen speciellen Fall derselben angedeutet hatte. Des Weiteren finde ich nur in einer Arbeit von Frahm***) eine mit dem angeführten Satze in Verbindung stehende Notiz. Derselbe bemerkt, indem er eine von Herrn Kirchhoff†) unter Benutzung des Hamilton'schen Principes geführte Betrachtung verallgemeinert, dass die Differentialgleichungen der Rotation einer starren Mannigfaltigkeit um einen festen Punkt (ohne Einfluss von Kräften) ihrer Form nach ungeändert bleiben, auch wenn man die Coefficienten in der quadratischen Form, welche die lebendige Kraft darstellt, nicht constant, sondern als *willkürliche Functionen* der unabhängigen Variabelen voraussetzt, ohne dies Verhalten dort freilich in mechanischem Sinne zu deuten.

Das allgemeine Theorem, dass die sechs Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers in unveränderter Form auch für ein beliebiges System materieller Punkte bestehen bleiben, kann

*) *Mécanique Analytique*, 1855, tom. II, Fragments, p. 376. vgl. auch p. 212.

**) *Journal von Liouville*, Ser. II, tome 3. 1858, p. 6—20.

***) Ueber gewisse Differentialgleichungen, diese *Annalen* VIII, S. 35—39.

†) *Journal von Crelle*, Bd. 71, S. 241—246.

hiernach wohl nicht als eigentlich neu bezeichnet werden, dürfte aber gleichwohl nirgends in so bestimmter Form ausgesprochen und auch sonst weniger beachtet sein, als das Interesse, das sich schon in analytischer Hinsicht an dasselbe knüpft, verdienen möchte. Es sei mir daher gestattet, dasselbe in der Form darzulegen, dass die Systeme der Gleichungen, welche Herr Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mathematische Physik*) mit Hülfe des Hamilton'schen Principes entwickelt, als allgemein gültige vermöge einer ganz directen Transformation der Lagrange'schen Gleichungen (in ihrer ersten Form) nachgewiesen werden. Ich werde dabei ein Punktsystem voraussetzen, das sich in einer ebenen Mannigfaltigkeit von n Dimensionen befindet, welche auf ein System rechtwinkliger Coordinatenachsen $X_1 X_2 \dots X_n$ bezogen ist, da es für gewisse weiter gehende Anwendungen von Interesse ist, die allgemeine Form der Differentialgleichungen der Mechanik unabhängig von der Anzahl der Dimensionen zu kennen.

Die Coordinaten eines Systempunktes P seien $x_1 \dots x_n$, die zugehörige Masse m , die an demselben angreifenden Kraftcomponenten, einschliesslich der aus etwaigen Bedingungen herrührenden, seien $X_1 \dots X_n$ **.). Ferner sei

$$(1) \quad x_i = a_i + \sum_{k=1}^n c_{ik} \xi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wo a ein beliebiger Punkt des Systemes, die c_{ik} der Bequemlichkeit halber Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten mögen, so dass die ξ_k die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P in Bezug auf ein irgendwie bewegliches Orthogonalsystem sind, dessen Anfang in a liegt, und dessen Axen $\Xi_1, \dots, \Xi_n$, mit den Axen $X_1 \dots X_n$ des ursprünglichen festen Coordinatensystemes die Richtungscosinus c_{ik} bilden, zwischen denen die Bedingungen

$$(2) \quad \sum_i c_{is} c_{ik} = (sk),$$

$$\sum_i c_{si} c_{ki} = (sk),$$

bestehen, in denen das Symbol (sk) für verschiedene Indices s, k gleich Null, für $s = k$ aber gleich Eins zu setzen ist.

*) Dasselbst S. 57—62.

**) Unter der Voraussetzung, dass die zwischen zwei Punkten wirkenden inneren Kräfte gleich aber entgegengesetzt nach der Verbindungslinie gerichtet sind, kann man, wie weiter unten erhellt, von diesen absehen.

Es ist dann*)

$$(3) \quad x_i' = a_i' + \sum_k c_{ik}' \xi_k + \sum_k c_{ik} \xi_k',$$

$$(4) \quad \sum_i x_i c_{is} = v_s + \xi_s,$$

$$\sum_i x_i' c_{is} = u_s + p_s + \xi_s',$$

wenn zur Abkürzung

$$(5) \quad v_s = \sum_i a_i c_{is}, \quad u_s = \sum_i a_i' c_{is}, \quad p_s = \sum_k r_{sk} \xi_k,$$

gesetzt wird. Für die „Rotationscomponenten“ r_{sk} in Bezug auf die Axen Ξ bestehen dabei die Gleichungen

$$(6) \quad r_{sk} = -r_{ks} = \sum_i c_{is} c_{ik}',$$

$$r_{ss} = 0,$$

$$c_{is}' = \sum_m r_{ms} c_{im}.$$

Die lebendige Kraft T des Systemes ist nach (4) ausgedrückt durch

$$(7) \quad 2T = \sum_s \sum m x_s'^2 = \sum_s \sum m (u_s + p_s + \xi_s')^2,$$

wo das erste Summenzeichen ohne Index sich auf die Anzahl der Punkte bezieht, aus denen das System besteht. Hieraus folgt

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial u_s} = \sum m (u_s + p_s + \xi_s'),$$

$$\frac{\partial T}{\partial r_{sk}} = \sum m [\xi_k (u_s + p_s + \xi_s') - \xi_s (u_k + p_k + \xi_k')].$$

Diejenigen Differentialgleichungen nun, welche den Massenmittelpunkts- und Flächensätzen entsprechen, werden durch die Gleichung

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \sum m \begin{vmatrix} v_{11} & , & v_{12} & , & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & , & v_{22} & , & \dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n-2,1} & , & v_{n-2,2} & , & \dots & v_{n-2,n} \\ x_1 + w_1 & , & x_2 + w_2 & , & \dots & x_n + w_n \\ x_1' & , & x_2' & , & \dots & x_n' \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} v_{11} & , & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & , & \dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n-2,1} & , & \dots & v_{n-2,n} \\ x_1 + w_1 & , & \dots & x_n + w_n \\ X_1 & , & \dots & X_n \end{vmatrix}$$

*) Differentialquotienten nach der Zeit t sind durch einen Strich bezeichnet, so dass allgemein $\frac{dx}{dt} = x'$.

ausgedrückt, falls die Grössen v_{ik} , w_i willkürliche Constanten bedeuten. Multiplicirt man die linke Seite von (9) mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{n1} \\ c_{1n} & c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

und zwar in der durch die beiden Factoren angegebenen Folge, so bleiben die Grössen v_{ik} , w_i zufolge der Gleichungen (2) ungeändert, während an Stelle der x_k , x'_k nach (4) die Ausdrücke

$$\sum_i \xi_i c_{ik} + \sum_i v_i c_{ki},$$

$$\sum_i (u_i + p_i + \xi_i') c_{ki},$$

treten. Unter Benutzung von (8) erhält man nun unmittelbar aus (9) durch Vergleichung der Coefficienten der w_i

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial T}{\partial u_k} c_{rk} = \sum X_r, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

und hieraus durch Multiplication mit den c_{rs} , und Summation über r , wenn für $\sum_r X_r$ zur Abkürzung Ξ_r gesetzt wird,

$$(Ia) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u_s} \right) + \sum_k \frac{\partial T}{\partial u_k} r_{sk} = \sum_r \Xi_r c_{rs}, \quad s = 1, 2 \dots n.$$

Vergleicht man dagegen die Coefficienten gleicher Verbindungen der v_{ik} , so erhält man ebenso unmittelbar

$$(II) \quad \frac{d}{dt} \sum_{jk} \left(v_j \frac{\partial T}{\partial u_k} - v_k \frac{\partial T}{\partial u_j} + \frac{\partial T}{\partial r_{kj}} \right) c_{rj} c_{sk} = \sum (x_r X_s - x_s X_r);$$

$$r, s = 1, 2 \dots n,$$

in welchen Gleichungen die rechte Seite zur Abkürzung gleich

$$M_{rs} = -M_{sr}$$

gesetzt werden mag. Denkt man sich links in (II) die Differentiation nach t ausgeführt, multiplicirt dann mit $c_{rt} c_{s\sigma}$ und summirt nach r, s und beachtet, dass nach (6)

$$(10) \quad \sum_{rs} c_{rt} c_{s\sigma} \frac{d}{dt} (c_{rj} c_{sk}) = r_{\sigma j}(\sigma k) + r_{\sigma k}(jt),$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \frac{d}{dt} \left(v_t \frac{\partial T}{\partial u_\sigma} - v_\sigma \frac{\partial T}{\partial u_t} + \frac{\partial T}{\partial r_{\sigma t}} \right) + \sum_j \left(r_{tj} \frac{\partial T}{\partial r_{\sigma j}} - r_{\sigma j} \frac{\partial T}{\partial r_{tj}} \right) \\
 & + \sum_j \left\{ r_{tj} \left(v_j \frac{\partial T}{\partial u_\sigma} - v_\sigma \frac{\partial T}{\partial u_j} \right) - r_{\sigma j} \left(v_j \frac{\partial T}{\partial u_t} - v_t \frac{\partial T}{\partial u_j} \right) \right\} \\
 & = \sum_{r,s} M_{rs} c_{rt} c_{s\sigma} = \sum_{r,s} M_{rs} (c_{rt} c_{s\sigma} - c_{st} c_{r\sigma}); \\
 & t, \sigma = 1, 2 \dots n.
 \end{aligned}$$

Diese Formel gestattet noch eine weitere Vereinfachung. Aus der Gleichung (5)

$$v_s = \sum_i a_i c_{is}$$

folgt nämlich mit Hülfe von (6)

$$(12) \quad \frac{dv_s}{dt} = u_s + \sum_m r_{ms} v_m.$$

Führt man die Differentiation im ersten Terme links von (11) aus, und setzt statt der Differentialquotienten der partiellen Differentialquotienten von T ihre Werthe aus (Ia) ein, so entsteht:

$$\begin{aligned}
 (IIa) \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial r_{\sigma t}} \right) + \sum_j \left(r_{tj} \frac{\partial T}{\partial r_{\sigma j}} - r_{\sigma j} \frac{\partial T}{\partial r_{tj}} \right) + u_t \frac{\partial T}{\partial u_\sigma} - u_\sigma \frac{\partial T}{\partial u_t} \\
 & = \sum_{r,s} M_{rs} (c_{rt} c_{s\sigma} - c_{rt} c_{r\sigma}) + \sum_r \Xi_r (c_{rt} v_\sigma - c_{rs} v_t); \\
 & \sigma, t = 1, 2 \dots n,
 \end{aligned}$$

wo nun rechter Hand die „*Momente*“ der Kräfte in Bezug auf das bewegliche Axensystem stehen.*)

Die Sätze (I), (Ia), (II), (IIa) entsprechen völlig den Gleichungen der Bewegung eines starren Körpers, wie sie Herr Kirchhoff a. a. O. S. 61 entwickelt; die inneren Kräfte treten in ihnen überhaupt nicht auf. Eine Ausdehnung derselben für die Rotation einer starren, keinen Kräften unterworfenen, Mannigfaltigkeit um einen Punkt hat bereits Frahm gegeben.

Der von letzterem im Anschluss an Herrn Kirchhoff's oben genannte Abhandlungen eingeschlagene Weg, welcher auf algebraischen Umformungen und dem Hamilton'schen Principe beruht, lässt sich aber, wie gezeigt, durch die einfache in (9) zum Ausdrucke gebrachte Methode so abkürzen, dass fast jede Rechnung überflüssig wird. Für

*) Nur für 3 Dimensionen, in welchem Falle die zweireihigen Unterdeterminanten der c_{ik} diesen selbst gleich werden, können daher die Momente in Bezug auf verschiedene Axen durch Projection aus einander abgeleitet werden.

den gewöhnlichen Fall von 3 Dimensionen kann man noch einfacher verfahren. Es genügt dann, in (9) mit der Substitutionsdeterminante Δ selbst zu multipliciren; man erhält dann *unmittelbar* die transformirten Gleichungen. Dieser Weg, den anzudeuten hier genügen wird, dürfte sich empfehlen, wenn es sich darum handelt, die Differentialgleichungen der Bewegung des starren Körpers durch rein analytische Transformation aus dem d'Alembert'schen Principe abzuleiten.

München, 16. Juni 1886.