Ueber die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems.

Von

E. BUSCHE in Bergedorf.

Die am Schlusse dieser Arbeit behandelte eigenartige Lösung des mathematischen Problems, das sich aus der seit Bachet de Méziriac bekannten Geschichte von 15 zu rettenden Christen und 15 zu opfern den Türken ableiten lässt, und das ich deshalb ein Bachet'sches Problem nenne, wurde mir von Herrn Schubert in Hamburg mitgetheilt, der sie später auch in seinen „Zwölf Geduldspielen“*) ohne Beweis veröffentlicht hat. Auf seine Veranlassung habe ich mich ebenfalls mit der Aufgabe beschäftigt und habe dabei eine einfache Lösung gefunden, mit deren Hülfe sich die Richtigkeit der merkwürdigen Schubert'schen Lösung beweisen lässt. Herr Schubert ist übrigens bei der Auffindung seiner Lösung von einer gewissen durch Induction erkannten Recursionsformel ausgegangen, die mit meiner Lösung im Grunde genommen identisch ist.

1.

Das von Herrn Schubert der Erzählung vom Schiffbruch der 15 Christen und 15 Türken entnommene Problem lässt sich in folgender Fassung aussprechen:

Eine beliebige Anzahl n von Punkten, die man sich etwa auf einer Kreisperipherie angeordnet denken möge, ist der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis n bezeichnet. Man zählt nun bei 1 anfangend und über n hinaus bei 1 fort-fahrend fortgesetzt bis d und scheidet jeden Punkt von der weiteren Abzählung aus, auf den einmal die Zahl d gefallen ist. Die zu beantwortende Frage ist dann: welches ist die Nummer v des Punktes, der als der e^{te} ausgeschieden wird?

Dabei kann $0 < d \leq n$ sein; die positive Zahl e ist natürlich $\leq n$.

*) Dieses für Nichtmathematiker zur Unterhaltung bestimmte Buch ist bei Dümmler in Berlin erschienen, 1895.

Meine Lösung dieser Frage beruht darauf, dass ich zuerst umgekehrt ν als bekannt und e als gesucht betrachte, und dass ich dabei von dem Punkt ν statt von dem Punkt n als Nullpunkt der Zählung ausgehe und von hier aus über $\nu - 1$, $\nu - 2$ u. s. w. rückwärts zähle, so dass, wenn $\nu - d > 0$ ist, der Punkt mit dieser Nummer zuerst ausgeschieden wird. Bei diesem Verfahren wird nämlich, weil ja anfänglich alle Punkte gleichberechtigt sind, der Nullpunkt n der eigentlich vorgeschriebenen Zählung nach ebenso viel Zählungen ausgeschieden werden wie der Punkt ν bei der ursprünglichen Abzählungsart. Die bei beiden Verfahren ausgeschiedenen Punkte sind natürlich im Allgemeinen von einander verschieden, aber die Configurationen, die diese Punkte in den beiden Fällen bilden, sind Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Durchmesser, der den Kreisbogen zwischen n und ν halbirt; n und ν sind bei dieser Spiegelung entsprechende Punkte. Es möge ferner vorausgesetzt werden, dass jedesmal, wenn ein Punkt ausgeschieden ist, die übrig gebliebenen Punkte von Neuem nummerirt werden und zwar so, dass der anfänglich mit n bezeichnete Punkt immer der Nullpunkt der Nummerirung bleibt. Dieser Punkt ist als mit 2 Nummern bezeichnet anzusehen, nämlich mit der bleibenden Nummer Null und mit der veränderlichen Nummer, die gleich der Anzahl der noch vorhandenen Punkte ist.

Wenn nun beim Rückwärtszählen der Punkt mit der Nummer Null zum ersten Mal überschritten wird, nachdem man μ -mal ($\mu \geq 0$) bis d gezählt hat, so dass also die μ Punkte $\nu - d, \nu - 2d, \dots, \nu - \mu d$ schon ausgeschieden und noch $n - \mu$ Punkte vorhanden sind, so hat der nach der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Zählung ausscheidende Punkt die (neue) Nummer $\nu - (\mu + 1)d + k(n - \mu)$, wo k die kleinste Zahl ist, die diesen Ausdruck positiv macht. Wenn $\nu - (\mu + 1)d = 0$ wäre, so würde die gesuchte Zahl e schon gefunden sein, nämlich $= \mu + 1$; anderenfalls fährt man fort, von der zuletzt gefundenen Nummer $d, 2d$ u. s. w. zu subtrahiren, bis die Differenz wieder negativ wird und ein Vielfaches der nun noch vorhandenen Anzahl von Punkten zu addiren ist. Wenn nach e -mal wiederholter Subtraction der Zahl d die Differenz gleich Null wird, so ist das Verfahren beendigt, das in der folgenden Vorschrift seinen Ausdruck findet:

Man schreibe die Zahlen $n, n - 1, n - 2, \dots$ neben einander hin und setze unter n die Zahl ν , unter $n - 1$ die Zahl $\nu - d$, unter $n - 2$ die Zahl $\nu - 2d$ u. s. w., indem man fortgesetzt d subtrahirt. Sobald eine der Differenzen negativ werden würde, füge man zu der vorhergehenden Zahl der unteren Reihe so oft die über ihr stehende Zahl hinzu, dass, wenn man nun das Subtrahiren fortsetzt, eine positive Zahl herauskommt, die höchstens gleich der

Zahl ist, unter die sie gehört. Dieses Verfahren führt schliesslich in der unteren Reihe zu der Zahl Null, und wenn die darüber stehende Zahl gleich $n - e$ ist, so ist e die gesuchte Zahl.

Beispiel. $n = 11$, $d = 9$, $v = 10$; e ergibt sich gleich 9.

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	1	2	2	1	6	3	4	3	0	

Die 6^{te} Zahl der unteren Reihe z. B. ist 6, weil $1 + 2 \cdot 7 - 9 = 6$ ist.

Nimmt man e als gegeben, v als gesucht an, so sieht man ohne Weiteres, dass das eben angegebene Verfahren, indem man es umkehrt, auch diese Aufgabe löst. Also:

Um die Nummer der Zahl zu finden, die aus n Zahlen durch Abzählen bis d als die e^{te} ausscheidet, schreibe man die Zahlen $n - e + 1$, $n - e + 2$, $\dots$, $n - 1$, n neben einander hin und setze unter $n - e + 1$ die Zahl d , unter $n - e + 2$ die Zahl $2d$ u. s. w., indem man fortgesetzt d addirt. Ergibt sich hierbei eine Zahl, die grösser als die darüber stehende Zahl sein würde, so subtrahire man diese letztere so oft, bis die hinzuschreibende Zahl höchstens gleich der darüberstehenden ist. Die Zahl, die hierbei unter n erscheint, ist die gesuchte Nummer.*)

Das angeführte Beispiel kann auch zur Erläuterung dieser Vorschrift dienen. Statt der Zahl $d = 9$ steht unter $n - e + 1 = 3$ die Zahl $9 - 2 \cdot 3 = 3$, statt $3 + 9 = 12$ unter 4 die Zahl $12 - 2 \cdot 4 = 4$ u. s. w.

2.

Mittelst dieser ersten Lösung des Bachet'schen Problems beweise ich nun zunächst eine andere, die mit der Schubert'schen Lösung in sehr engem Zusammenhange steht. Dabei benutze ich die folgende Bezeichnung: Ist α eine beliebige reelle Zahl, so möge $[a]$ die durch die Beziehungen

$$\alpha \leq [a] < \alpha + 1$$

definirte ganze Zahl sein. Ferner nenne ich, indem ich eine von Herrn Schubert gebrauchte Bezeichnung**) verallgemeinere, die folgende durch 3 reelle Zahlen a , s , q bestimmte Reihe von ganzen Zahlen

$$[a], [(s + [a])q], [(s + [(s + [a])q])q], \dots$$

*) Es ist sehr leicht einzusehen, wie diese Vorschrift abzuändern wäre, wenn nicht fortgesetzt bis d gezählt würde, sondern etwa erst bis d_1 , dann bis d_2 u. s. w. Dabei können auch einige der Zahlen d negativ sein, was ein Zählen in entgegengesetzter Richtung bedeuten würde; in diesem Falle ist das Verfahren ein wenig abzuändern, worauf ich aber nicht näher eingehen will.

**) S. Mittheilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg, Bd. III, H. 5, S. 223.

eine *Oberreihe* mit dem *Anfangsgliede* a , dem *Summanden* s und dem *Quotienten* q . Jedes Glied der Reihe geht aus dem vorhergehenden Gliede dadurch hervor, dass man zu diesem s addirt, die Summe mit q multiplicirt und darauf, wenn das Product nicht ganzzahlig ist, die nächst höhere ganze Zahl nimmt. Eine solche Oberreihe*) möge durch das Symbol (a, s, q) bezeichnet werden. Wenn a und s positiv und nicht beide gleich Null sind, und wenn $q > 1$ ist, so bilden die Glieder einer Oberreihe eine Reihe von beständig zunehmenden Zahlen, und auch die Differenz von zwei auf einander folgenden Gliedern nimmt niemals ab. Mit Rücksicht auf das Folgende ist noch zu bemerken, dass — wie leicht zu beweisen ist**) — kein von dem Anfangsgliede verschiedenes Glied der Oberreihe $\equiv 1 \pmod{d}$ sein kann, wenn $q = \frac{d}{d-1}$ ist.

Nun gilt folgender Satz:

Die Nummer v des Punktes, der aus n Zahlen durch Abzählen bis d als der e^{te} ausscheidet, ist gleich dem Ueberschuss von $de + 1$ über das letzte Glied der Oberreihe $(1, n - e, \frac{d}{d-1})$, das noch kleiner als $de + 1$ ist.

Um hiernach das vorige Beispiel zu behandeln, ist die Oberreihe $(1, 2, \frac{9}{8})$ zu bilden. Sie ist

$$1, \left[3 \cdot \frac{9}{8}\right] = 4, \left[6 \cdot \frac{9}{8}\right] = 7, 11, 15, 20, 25, 31, 38, 45, 53, 62, 72, 84, \dots$$

Da $de + 1 = 9 \cdot 9 + 1 = 82$ ist, so ist 72 das grösste Glied der Oberreihe, das noch kleiner als $de + 1$ ist, und die Differenz $82 - 72 = 10$ giebt die gesuchte Zahl v .

Das Beispiel lässt erkennen, dass man mittelst der Oberreihe nicht nur das Endresultat der ersten Lösung erhält, sondern auch die sämtlichen Glieder der bei dieser Lösung zu bildenden unteren Reihe. Die Glieder der Oberreihe liefern nämlich der Reihe nach gerade die Summe aller Zahlen der oben stehenden Reihe, die man bei der Befolgung der ersten Vorschrift nach und nach subtrahiren muss, um die Glieder der unteren Reihe zu berechnen; nur wird diese Summe mittelst der Oberreihe immer gerade um 1 zu gross gefunden. So ist das 2^{te} Glied der Oberreihe in dem behandelten Falle gleich 4, und bei der ersten Lösung ist zuerst 3 zu subtrahiren, das 3^{te} Glied der Oberreihe ist 7 und andererseits ist nochmals 3, also im ganzen 6 zu subtrahiren u. s. w. Da man nun die erste Vorschrift auch auf das unter $n - e$ stehende Glied 0 der unteren Reihe ausdehnen kann,

*) Damit eine Oberreihe nicht mit der oberen Reihe der ersten Lösung wechselt werde, will ich diese immer als die oben stehende Reihe bezeichnen.

**) a. a. O. S. 225.

wobei, da ja $0 \leq n - e$ ist, immer 0 zu subtrahiren ist, und da das 1^{te} Glied der Oberreihe immer gleich 1 ist, so gilt die angegebene Beziehung zwischen den Gliedern der Oberreihe und der Summe der bei der ersten Vorschrift zu subtrahirenden Zahlen für das erste Glied der Oberreihe ganz allgemein, und die Gültigkeit dieser Beziehung für alle Glieder kann durch vollständige Induction nachgewiesen werden.

Es möge zu diesem Zwecke angenommen werden, dass man bei der Befolgung der ersten Vorschrift bis zu dem Gliede $n - e + \lambda$ der oben stehenden Reihe, wo $\lambda \geq 1$ ist, gekommen sei, und es möge ferner *erstens* vorausgesetzt werden, dass man, um die unter $n - e + \lambda$ stehende Zahl zu erhalten, von dem um d vermehrten vorhergehenden Gliede der unteren Reihe die Zahl $n - e + \lambda$ bereits 0-mal oder 1-mal oder öfter subtrahirt habe, ohne dass aber die Differenz schon $\leq n - e + \lambda$ geworden wäre. Man muss also, wenn man nun in der Befolgung der ersten Vorschrift fortfährt, die Zahl $n - e + \lambda$ nochmals subtrahiren. Die bisher berechnete Zahl kann gleich $d\lambda - (t-1)$ gesetzt werden, da man d schon λ -mal addirt hat; $t-1$ ist dann die Summe aller bis dahin subtrahirten Glieder der oben stehenden Reihe. Wenn nun die angegebene Beziehung zu der Oberreihe $(1, n-e, \frac{d}{d-1})$ besteht, so ist t ein Glied dieser Oberreihe, und es ist jetzt zu zeigen, dass das nächste Glied t' der Oberreihe gerade um $n - e + \lambda$ grösser ist als t .

Setzt man

$$t = d(\lambda - 1) + r,$$

so ist

$$\begin{aligned} t' &= \left[(n - e + t) \frac{d}{d-1} \right] = \left[(n - e + d(\lambda - 1) + r) \frac{d}{d-1} \right] \\ &= n - e + d(\lambda - 1) + r + \left[\frac{n - e + d(\lambda - 1) + r}{d-1} \right] \\ &= n - e + d(\lambda - 1) + r + \lambda - 1 + \left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d-1} \right]. \end{aligned}$$

Es ist mithin

$$t' - t = n - e + \lambda - 1 + \left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d-1} \right].$$

Nun war vorausgesetzt, dass

$$d\lambda + 1 - t = d + 1 - r > n - e + \lambda$$

wäre. Daraus folgt

$$r < d + 1 - n + e - \lambda.$$

Andererseits ist sicher

$$d + 1 - r \leq n - e + \lambda - 1 + d,$$

denn $d\lambda + 1 - t$ ist aus dem unter $n - e + \lambda - 1$ stehenden Gliede der unteren Reihe, das $\leq n - e + \lambda - 1$ ist, dadurch hervorgegangen,

dass man d addirt und vielleicht noch $n - e + \lambda$ einmal oder öfter subtrahirt hat. Deshalb ist

$$r \geq -n + e - \lambda + 2.$$

Es zeigt sich also, dass der Zähler des letzten Klammerausdruckes ≥ 1 und $< d$ ist; der Klammerausdruck ist also $= 1$ und

$$t' - t = n - e + \lambda.$$

Hieraus geht hervor, dass das auf t folgende Glied der Oberreihe die richtige Grösse hat, und dass man also das unter $n - e + \lambda$ schreibende Glied der unteren Reihe auch mittelst der Oberreihe findet, indem man ihr grösstes Glied, dass noch $< d\lambda + 1$ ist, von dieser Zahl subtrahirt. Denn wenn etwa

$$d\lambda + 1 - t^{(e)} \leq n - e + \lambda$$

würde, und man bestimmte nun das nächste Glied $t^{(e+1)}$ der Oberreihe, so wäre $t^{(e+1)} - t^{(e)} > n - e + \lambda$, da das zu $t^{(e)}$ gehörige $r^{(e)} \geq d + 1 - n + e - \lambda$ sein würde. Die Differenz $d\lambda + 1 - t^{(e+1)}$ würde also negativ sein.

Nun möge *zweitens* vorausgesetzt werden, dass das mit Hilfe des Gliedes t der Oberreihe noch richtig zu bestimmende Glied $d\lambda + 1 - t$ der unteren Reihe schon kleiner als die darüber stehende Zahl $n - e + \lambda$ oder gleich dieser Zahl sei. Es möge ferner angenommen werden, dass man bei weiterer Befolgung der ersten Vorschrift noch $\sigma \geq 0$ Glieder der unteren Reihe bilden könne, ehe man wieder ein Glied der oben stehenden Reihe zu subtrahiren hätte, so dass also unter

$$n - e + \lambda, n - e + \lambda + 1, \dots, n - e + \lambda + \sigma$$

die Zahlen

$$d\lambda + 1 - t, \quad d(\lambda + 1) + 1 - t, \quad \dots, d(\lambda + \sigma) + 1 - t$$

zu setzen wären, dass dann aber das folgende Glied

$$d(\lambda + \sigma + 1) + 1 - t > n - e + \lambda + \sigma + 1$$

würde, so dass diese letztere Zahl wieder zu subtrahiren wäre. Es ist dann zu zeigen, dass das auf t folgende Glied t' der Oberreihe gerade um $n - e + \lambda + \sigma + 1$ grösser ist als t . Setzt man wieder

$$t = d(\lambda - 1) + r$$

und also

$$t' - t = n - e + \lambda - 1 + \left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d - 1} \right],$$

so ist

$$d(\lambda + \sigma + 1) + 1 - t = (\sigma + 2)d + 1 - r > n - e + \lambda + \sigma + 1$$

und

$$d(\lambda + \sigma) + 1 - t = (\sigma + 1)d + 1 - r \leq n - e + \lambda + \sigma.$$

Folglich ist

$$(\sigma + 2)d - n + e - \lambda - \sigma > r \geq (\sigma + 1)d - n + e - \lambda - \sigma + 1.$$

Der Zähler des Klammersausdruckes ist demnach $\geq (\sigma + 1)(d - 1) + 1$ und $< (\sigma + 2)(d - 1) + 1$, der Klammersausdruck ist mithin $= \sigma + 2$ und

$$t' - t = n - e + \lambda + \sigma + 1.$$

Da man ferner sofort sieht, dass, wenn nicht etwa, bei $\sigma = 0$, der schon erledigte erste Fall wieder eintritt, das auf t' folgende Glied der Oberreihe schon zu gross ist, um von $d(\lambda + \sigma + 1) + 1$ subtrahirt etwas Positives zu ergeben, so ist bewiesen, dass auch in diesem Falle die Lösung mittelst der Oberreihe mit der ersten Lösung in Uebereinstimmung bleibt. Damit ist der Beweis für die Richtigkeit der zweiten Lösung geführt.

3.

Die Schubert'sche Lösung lautet folgendermassen:

Die Nummer ν des Punktes, der aus n Punkten durch Abzählen bis d als der e^{te} ausscheidet, ist gleich dem Ueberschuss von $dn + 1$ über das grösste Glied der Oberreihe $(d(n - e) + 1, 0, \frac{d}{d-1})$, das noch kleiner als $dn + 1$ ist.

Das wiederholt benutzte Beispiel möge auch nach dieser Methode behandelt werden. Dazu ist die Oberreihe $(9 \cdot 2 + 1, 0, \frac{9}{8}) = (19, 0, \frac{9}{8})$ zu bilden. Ihre ersten Glieder sind:

$$19, \left[19 \cdot \frac{9}{8}\right] = 22, \left[22 \cdot \frac{9}{8}\right] = 25, 29, 33, 38, 43, 49, 56, 63, 71, 80, 90, 102, \dots$$

Da $dn + 1 = 9 \cdot 11 + 1 = 100$ ist, so ist $\nu = 100 - 90 = 10$.

Um die Richtigkeit dieser Lösung nachzuweisen, zeige ich, dass irgend ein Glied der Oberreihe $(d(n - e) + 1, 0, \frac{d}{d-1})$ gerade um $d(n - e)$ grösser ist als das entsprechende Glied der Oberreihe $(1, n - e, \frac{d}{d-1})$. Für die beiden Anfangsglieder gilt diese Beziehung. Angenommen nun, sie bestände auch noch für die beiden beliebigen entsprechenden Glieder T und t der beiden Reihen, es wäre also

$$T = d(n - e) + t,$$

dann lässt sich zeigen, dass dieselbe Beziehung auch noch für die beiden folgenden Glieder T' und t' gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} T' &= \left[T \cdot \frac{d}{d-1}\right] = \left[(d(n - e) + t) \cdot \frac{d}{d-1}\right] \\ &= \left[(d-1)(n - e) \cdot \frac{d}{d-1} + (n - e + t) \cdot \frac{d}{d-1}\right] \\ &= d(n - e) + \left[(n - e + t) \cdot \frac{d}{d-1}\right] = d(n - e) + t'. \end{aligned}$$

Wegen dieser damit als allgemeingültig erwiesenen Beziehung zwischen den beiden Oberreihen ist nun immer

$$dn + 1 - T = dn + 1 - d(n - e) - t = de + 1 - t,$$

und damit ist die Schubert'sche Lösung auf die vorige zurückgeführt und ihre Richtigkeit bewiesen.

Die zweite Lösung ist offenbar nur eine Modification des Schubert'schen Verfahrens, aus dem ich sie auch ursprünglich abgeleitet habe. Bei der zweiten Lösung hat man im Allgemeinen mit kleineren Zahlen zu rechnen als bei der dritten, aber dieser Vortheil wird reichlich dadurch aufgewogen, dass man bei der dritten Lösung eine Oberreihe mit dem Summanden Null, also eine möglichst einfache Oberreihe zu berechnen hat. Wenn n nicht sehr gross ist, führt übrigens die erste Lösung wohl am schnellsten zum Ziele, bei sehr grossem n aber verdient die Schubert'sche Methode auch bei der practischen Anwendung den Vorzug, besonders dann, wenn d einen verhältnissmässig kleinen Werth hat. Die höheren Glieder einer Oberreihe wachsen nämlich ungefähr ebenso wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit demselben Quotienten.

Anmerkung. Ich habe das hier behandelte Problem nach Bachet benannt, weil es dadurch am besten als ein „problème plaisant et délectable qui se fait par les nombres“ gekennzeichnet wird. Aus Herrn M. Cantor's Geschichte der Mathematik sehe ich, dass es schon von Cardano den Namen „Josephsspiel“ erhalten hat. Herr Cantor erwähnt das Spiel auf den Seiten 332, 460, 700, 701 des 2^{ten} und auf Seite 14 des 3^{ten} Bandes seiner Vorlesungen.