**X. Bestimmung der Elasticitätsconstanten
von Beryll und Bergkrystall;
von W. Voigt.**

(Aus Nr. 3 des Jahrgangs 1886 der Gött. Nachr. auszugsweise mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 14—15.)

(Fortsetzung von p. 501.)

2. Beobachtungen am Bergkrystall.

Die Formen des Quarzes gehören der trapezoëdrischen Tetartoëdrie an. Für dieselben ist die Existenz einer zweiseitigen dreizähligen Symmetrieaxe charakteristisch, alle übrigen Eigenschaften folgen aus dieser. Demgemäss gewinnt das elastische Potential dieselbe Form, wie für das rhomboëdrische holoëdrische System, und sind die im Vorstehenden abgeleiteten Formeln anzuwenden. Dass die elastischen Verhältnisse des Bergkrystalles die der rhomboëdrischen Krystallform entsprechende Unsymmetrie zeigen, ist bereits durch die Beobachtungen F. Savart's¹⁾ über die Klangfiguren auf Kreisscheiben, die aus diesem Material geschnitten waren, gezeigt worden.

Für meine Beobachtungen standen mir zunächst Stäbchen zur Verfügung, welche vor Jahren von Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. gefertigt und mir von dem Hrn. Besteller überlassen worden waren. Diese sind im Folgenden mit Nr. 1—14 bezeichnet; von ihnen gehört:

Nr. 5—8	der Gattung	(0°) an,
Nr. 1—3	„	„ (90° A I),
Nr. 9—11	„	„ (90° A II),
Nr. 12—14	„	„ (45°).

Nr. 4 fehlt. Hierbei bezeichnet, wie oben gesagt, die Anzahl Grade den Neigungswinkel der Längsrichtung gegen die Krystallaxe, die Bezeichnung A deutet an, dass die Breitenrichtung normal zur Krystallaxe liegt, der Zusatz I oder II, ob die Längsrichtung senkrecht zu einer Symmetrieebene

1) F. Savart, Pogg. Ann. 16. p. 206. 1829.

des rhomboëdrischen Systems oder aber ihr parallel ist. Bei der letzten Gattung (45°) war nicht angegeben, in welcher Meridianebene die Längsrichtung orientirt war; die Beobachtung hat gezeigt, dass dies entsprechend der Bezeichnung (-45°) stattfand, d. h. die Längsrichtung nahe senkrecht zu einer Rhomboëderfläche — R gestanden hat.

Dieses System Stäbchen genügte noch nicht zur Bestimmung aller Constanten und zur Prüfung der im Vorstehenden entwickelten Formeln. Ich habe daher durch Dr. Steeg und Reuter aus einem schönen grossen Krystall noch die folgenden 14 Stäbchen herstellen lassen:

Nr. 15—17	zur Gattung	(90° A I),
Nr. 18—20	„ „	(90° B I),
Nr. 21—24	„ „	(-45°),
Nr. 25—28	„ „	($+45^\circ$).

Diese Stäbchen waren vorzüglich geschliffen und polirt, aber leider nicht sehr genau orientirt, was die Beobachtungen und Berechnungen unbequem complicirt hat. Der Krystall hatte nämlich nicht genau parallele Säulenflächen, und die optische Untersuchung zeigte, dass dem entsprechend die optische Axe im Inneren des Krystalles von Stelle zu Stelle ihre Richtung ein wenig änderte. Eine grössere Zahl von Stäbchen ist dann, um die theoretischen Resultate des vorhergehenden Abschnittes anwenden und prüfen zu können, von Voigt und Hochgesang in Göttingen auf geringere Dicke abgeschliffen worden; in dieser zweiten Gestalt sind die Stäbchen durch den oberen Index neben ihrer ursprünglichen Bezeichnung (z. B. also durch 0° Nr. 5') unterschieden. Ihre Politur lässt theilweise zu wünschen übrig.

Die optische Untersuchung ergab vollständige Gleichartigkeit der Substanz, wie dies sich ja bei den Krystallen aus brasilianischem Geschiebe — und solche boten das Material — in ausgezeichneter Weise zu finden pflegt. Die Stäbchen Nr. 15—28 sind aus einem linksdrehenden Krystall geschnitten; ebenso zeigten linke Drehung Nr. 1—3, 9—14; es ist daher höchst wahrscheinlich, dass auch Nr. 5—8, die sich in dieser Hinsicht nicht wohl prüfen liessen, da sie mit

der Längsrichtung parallel der Axe liegen, die gleiche Eigenschaft besitzen.

Die Resultate der Beobachtungen sind im Folgenden für Bergkrystall in derselben Weise mitgetheilt wie früher für Beryll. Die bei der Berechnung der Constanten einzuführenden Dimensionen der Prismen sind an die Spitze gestellt, die Länge L in Millimetern, die Breite B und Dicke D in Theilen des Sphärometers ($= 1/992,7$ mm), und der Abstand A zwischen Spiegel und Scala in Millimetern, die Belastung P in Grammen, die Beobachtungstemperatur ϑ in Celsiusgraden zugefügt.

Biegungen.

Die Stäbchen Nr. 1 — 14 sind mit demselben Apparat beobachtet, wie die aus Beryll gefertigten, die angegebenen Werthe setzen also 0,000 249 mm als Einheit voraus. Für die neuen Stäbchen Nr. 15—28 war der Apparat etwas geändert, sodass seine Constante nunmehr 0,000 235 9 mm betrug.¹⁾ Nachträglich ist dann noch eine Reihe alter Stäbchen zur Controle mit dem neu eingerichteten Apparate beobachtet worden. Zur Unterscheidung sind die Mittelwerthe für η mit dem Index α oder n versehen.

Die Berechnung nach Formel (30) gibt den Werth E des Dehnungscoefficienten für die Richtung, in welcher die Längsaxe des betreffenden Prismas gegen die Krystallaxen orientirt ist, da aber die verschiedenen unter derselben Bezeichnung zusammengefassten Stäbchen verschiedene Abweichungen von den vorgeschriebenen Richtungen besitzen und diese — ungleich dem oben gezeigten Verhalten hexagonaler Krystalle — bei rhomboëdrischen Krystallen bedeutenden Einfluss üben, so sind die direct berechneten Resultate zunächst im allgemeinen noch nicht vergleichbar.

$$\begin{array}{llllll}
 0^0 \text{ Nr. 5. } & L = 54,4, & B = 4659, & D = 784,7, & P = 56, & \vartheta = 17,5, & \eta' = 2,7. \\
 & & & & \eta_\alpha = 385,0 & & E = 10\,230\,000. \\
 & L = 52,2^2), & P = 100, & \vartheta = 18,6, & \eta' = 2,6. & & \\
 & & & \eta_n = 632,0 & & & E = 10\,280\,000.
 \end{array}$$

1) Dabei waren die messingenen Lagerschneiden durch solche aus hartem Stahl ersetzt, um die Eindrückung zu verringern.

2) Bei dieser und der Beob. Nr. 8 $L = 52,2$ war die Belastung zufällig um

Nr. 6.	$L = 54,4$	$B = 4732$	$D = 791,2$	$P = 56$	$\vartheta = 18,1$	$\eta' = 2,7$	$E = 10\ 360\ 000$
			$\eta_a = 365,6$				
Nr. 7.	$L = 54,4$	$B = 5124,5$	$D = 810,8$	$P = 56$	$\vartheta = 16,4$	$\eta' = 2,5$	$E = 10\ 800\ 000$
			$\eta_a = 315,1$				
Nr. 8.	$L = 54,4$	$B = 4667$	$D = 807,5$	$P = 56$	$\vartheta = 16,7$	$\eta' = 2,7$	$E = 10\ 280\ 000$
			$\eta_a = 350,6$				
	$L = 52,2$	$P = 100$	$\vartheta = 18,1$	$\eta' = 2,6$			$E = 10\ 290\ 000$
			$\eta_n = 578,2$				
Nr. 6.	$L = 56,2$	$B = 4732$	$D = 465,0$	$P = 20$	$\vartheta = 16,4$	$\eta' = 0,5$	$E = 10\ 340\ 000$
			$\eta_n = 743,0$				
Nr. 7'.	$L = 56,2$	$B = 5124,5$	$D = 468,0$	$P = 20$	$\vartheta = 16,2$	$\eta' = 0,5$	$E = 10\ 850\ 000$
			$\eta_n = 673,0$				

Die Formel (29) für den Dehnungscoefficienten E zeigt, dass für eine unendlich kleine Abweichung der Längsaxe des Prismas aus der krystallographischen Hauptaxe $\delta E = 0$, d. h. zweiter Ordnung unendlich klein ist. Die Abweichungen der beobachteten Prismen von der vorgeschriebenen Richtung sind demnach bei der Gattung (0°) ohne merklichen Einfluss auf den Werth von E und E ; man erhält daher unmittelbar das

$$\text{Gesamtmittel } E_0 = 10\ 304\ 000, \quad E_0 = 9,705 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler } \pm 10000, \quad \pm 0,009,$$

-45° Nr. 21.	$L = 66,2$	$B = 5963$	$D = 853,5$	$P = 100$	$\vartheta = 17,4$	$\eta' = 2,8$	$E = 13\ 040\ 000$
			$\eta_n = 620,7$				
Nr. 22.	$L = 62,2$	$B = 5962$	$D = 846,7$	$P = 100$	$\vartheta = 17,2$	$\eta' = 2,6$	$E = 13\ 130\ 000$
			$\eta_n = 523,7$				
Nr. 23.	$L = 62,2$	$B = 5964$	$D = 850,1$	$P = 100$	$\vartheta = 17,2$	$\eta' = 2,6$	$E = 13\ 110\ 000$
			$\eta_n = 518,3$				
Nr. 24.	$L = 58,2$	$B = 5967$	$D = 847,5$	$P = 100$	$\vartheta = 17,4$	$\eta' = 2,6$	$E = 13\ 080\ 000$
			$\eta_n = 429,5$				

Weicht die Richtung der Längsaxe von der vorausgesetzten Lage: in der krystallographischen Symmetrieebene um -45° gegen die Hauptaxe geneigt (d. h. $\gamma = -\beta = 1/\sqrt{2}$, $\alpha = 0$) um $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ ab, so ergibt sich dadurch eine Aenderung des Dehnungscoefficienten E nach (29):

$$(\delta E)_{-45} = \sqrt{2} (s_{33} - s_{14} - s_{11}) \delta\gamma,$$

1 mm von der Mitte angebracht. Demgemäss ist, wie die Theorie ergibt, bei der Berechnung E um 0,0045 seines Werthes nach Formel (31) verkleinert worden.

oder falls man $\gamma = \cos(45^\circ + \delta\varphi)$ setzt:

$$(\delta E)_{-45} = + (s_{33} - s_{14} - s_{11}) \delta\varphi.$$

Die Abweichung aus der Meridianebene ist also ohne Einfluss.

Vorläufige Bestimmungen ergaben beim Bergkrystall hierfür:

$$(\delta E)_{-45} = - 0,89 \cdot 10^{-8} \cdot \delta\varphi,$$

also da $E = 1/E$ und E nahe $= 13,0 \cdot 10^6$ ist:

$$(\delta E)_{-45} = + 1,52 \cdot 10^{-6} \cdot \delta\varphi;$$

es ändert also eine Abweichung um einen Grad E nur etwa um 0,002 seines Werthes. Die mittlere Abweichung der obigen Stäbchen fand sich nach Messungen von Dr. Hennig und mir $+1,5^\circ$, es ist also, um die Werthe E auf -45° zu reduciren, bei allen $0,04 \cdot 10^6$ abzuziehen. So findet sich für:

Nr. 21	$E = 13\,000\,000,$
22	$= 13\,090\,000,$
23	$= 13\,070\,000,$
24	$= 13\,040\,000,$

$$\text{Gesamtmittel } E_{-45} = \underline{13\,050\,000}, \quad E_{-45} = 7,668 \cdot 10^{-8} \\ \text{wahrscheinlicher Fehler } \pm 9000, \quad \pm 0,0055.$$

$$+45^\circ \text{ Nr. 25. } L=50,2, \quad B=5999, \quad D=845,3, \quad P=100, \quad \vartheta=17,8, \quad \eta'=2,6. \\ \eta_n = 424,0 \quad E = 8\,520\,000.$$

$$\text{Nr. 26. } L=52,2, \quad B=6000, \quad D=840,7, \quad P=100, \quad \vartheta=18,0, \quad \eta'=2,6. \\ \eta_n = 484,2 \quad E = 8\,520\,000.$$

$$\text{Nr. 27. } L=52,2, \quad B=6000, \quad D=842,5, \quad P=100, \quad \vartheta=16,8, \quad \eta'=2,6. \\ \eta_n = 481,3 \quad E = 8\,520\,000.$$

$$\text{Nr. 28. } L=48,2, \quad B=6002, \quad D=842,3, \quad P=100, \quad \vartheta=17,0, \quad \eta'=2,6. \\ \eta_n = 378,6 \quad E = 8\,540\,000.$$

Für die Gattung $(+45^\circ)$ ergibt Formel (29) die einer Abweichung $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ von der vorgeschriebenen Orientierung ($\gamma = \beta = 1/\sqrt{2}$, $\alpha = 0$) des Prismas entsprechende Änderung von E :

$$\delta E = \sqrt{2} (s_{33} + s_{14} - s_{11}) \delta\gamma,$$

oder wenn man setzt:

$$\gamma = \cos(45^\circ + \delta\varphi), \quad \gamma = -(s_{33} + s_{14} - s_{11}) \delta\varphi, \quad = +7,26 \cdot 10^{-8} \cdot \delta\varphi,$$

also, da $E = 1/E$ und E nahe $= 8,5 \cdot 10^6$ ist:

$$\delta E = -5,11 \cdot 10^6 \cdot \delta\varphi.$$

Für die obigen Stäbchen Nr. 25 — 28 gab sich die Abweichung der Längsaxe von $+45^\circ$ durch eine grosse Anzahl von Messungen im Mittel gleich $-1,4^\circ$, es ist also von allen oben angegebenen Zahlen $0,12 \cdot 10^6$ in Abzug zu bringen, um den -45° entsprechenden Werth zu erhalten.

Hiernach wird für:

Nr. 25	$E = 8\,400\,000,$	
26	$= 8\,400\,000,$	
27	$= 8\,400\,000,$	
28	$= 8\,420\,000,$	
<hr/>		
Gesamtmittel	$E_{+45} = 8\,405\,000,$	$E_{+45} = 11,898$
wahrscheinlicher Fehler	$\pm 4000,$	$\pm 0,006.$

Der grosse Einfluss der Lage der Längsaxe bei dieser Gattung macht sie zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten weniger geeignet; bei einer Wiederholung wird man statt ihrer passend eine Richtung benutzen, in welcher E ein Maximum oder Minimum erreicht. Die hier vorliegenden Bestimmungen gestatten ihre Berechnung.

Die mit der Marke (45°) überkommenen Stäbchen Nr. 12 bis 14 lieferten resp.

45° Nr. 12. $L=54,4, B=5443, D=776,3, P=56, \vartheta=16,8, \eta'=10,3.$

$$\eta_a = 277,0, \quad E = 12\,950\,000.$$

Nr. 13. $L=50,4, B=4504, D=816,4, P=56, \vartheta=17,9, \eta'=10,8.$

$$\eta_a = 227,4, \quad E = 13\,180\,000.$$

Nr. 14. $L=54,4, B=4497, D=822,5, P=56, \vartheta=18,3, \eta'=10,8.$

$$\eta_a = 277,5, \quad E = 13\,160\,000.$$

Die optische Untersuchung ergab bei Nr. 12 die Abweichung $\delta\varphi = -1,5^\circ$, bei Nr. 13 und 14 $\delta\varphi = +1^\circ$, der mittlere Werth der obigen Zahlen für $E = 1\,309\,000$ müsste also nahe für 45° gelten. Man bemerkt, dass er dem oben für die Gattung (-45°) erhaltenen sehr nahe kommt; doch war bei den Beobachtungen der Apparat nicht ganz in Ordnung und die Grösse der Eindrückung der Lagerschneiden nur zu schätzen. Ich werde die erhaltenen drei Werthe für Nr. 12—14 daher von der Berechnung der Constanten ausschliessen.

90° A I. Nr. 1. $L=54,4, B=5446, D=850,4, P=56,0, \vartheta=18,5, \eta'=2,3.$

$$\eta_a = 338,6 \quad E = 7\,810\,000.$$

Nr. 2. $L=54,4, B=5438, D=876,0, P=56,0, \vartheta=17,9, \eta'=2,3.$

$$\eta_a = 310,3 \quad E = 7\,810\,000.$$

Nr. 3.	$L=54,4$, $B=5460$, $D=844,5$, $P=56,0$, $\vartheta=18,3$, $\eta'=2,3$.	
	$\eta_a=341,9$	$E=7\ 870\ 000$.
	$L=50,2$, $P=100$, $\vartheta=17,4$, $\eta'=2,6$.	
	$\eta_n=505,0$	$E=7\ 880\ 000$.
Nr. 15.	$L=50,2$, $B=6002$, $D=842,8$, $\vartheta=16,6$, $\eta'=2,6$.	
	$\eta_n=462,2$	$E=7\ 880\ 000$.
	$L=52,2^1$, $P=100$, $\vartheta=16,8$.	
	$\eta_n=516,6$	$E=7\ 880\ 000$.
90° A II. Nr. 9.	$L=52,4$, $B=5069$, $D=859,1$, $P=56$, $\vartheta=16,0$, $\eta'=2,5$.	
	$\eta_a=312,3$	$E=7\ 890\ 000$.
	$L=50,2$, $P=100$, $\vartheta=17$, $\eta'=2,6$.	
	$\eta_n=513,3$	$E=7\ 930\ 000$.
Nr. 10.	$L=52,4$, $B=5090$, $D=877,8$, $P=56$, $\vartheta=16,8$, $\eta'=2,5$.	
	$\eta_a=287,9$	$E=8\ 020\ 000$.
	$L=50,2$, $P=100$, $\vartheta=17,2$, $\eta'=2,6$.	
	$\eta_n=475,8$	$E=8\ 010\ 000$.
Nr. 11.	$L=54,4$, $B=5118$, $D=821,0$, $P=56$, $\vartheta=16,0$, $\eta'=10,8^2$	
	$\eta_a=401,3$	$E=7\ 950\ 000$.
90° B I. Nr. 18.	$L=48,2$, $B=6022$, $D=846,6$, $P=100$, $\vartheta=16,4$, $\eta'=2,6$.	
	$\eta_n=404,5$	$E=7\ 840\ 000$.

Diese Werthe sind nun zunächst durch Correction wegen der Abweichung der Stäbchen von der vorgeschriebenen Orientirung vergleichbar zu machen. Formel (29) ergibt für die Gattung:

$$\begin{aligned} &90^\circ \text{ A I. } (\alpha = \beta_1 = \gamma_2 = 1), \quad \delta E = 0, \\ &\text{für } 90^\circ \text{ A II. } (\alpha_1 = \beta = \gamma_2 = 1), \quad \delta E = -2s_{14}\delta\gamma, \\ &\text{für } 90^\circ \text{ B I. } (\alpha = \beta_2 = \gamma_1 = 1), \quad \delta E = 0. \end{aligned}$$

Die Stäbchen der ersten und letzten Gattung sind also für die Bestimmung von E am günstigsten.

Für (90° A II.) erhält man, wenn man $\gamma = \cos \varphi$ setzt, unter Rücksicht auf den durch vorläufige Bestimmung erhaltenen Werth:

$$\begin{aligned} s_{14} &= -4,24 \cdot 10^{-8} \\ \delta E &= -8,48 \cdot 10^{-8} \cdot \delta \varphi, \end{aligned}$$

1) Um 1 mm vom Mittelpunkt belastet, demgemäss corrigirt.

2) Wie sich nachträglich herausstellte, waren die Lagerschneiden bei dieser Beobachtung lose, die deshalb nothwendige Correction ist in η enthalten und nur näherungsweise richtig. Eine Wiederholung der Beobachtung war nicht möglich, da das Stäbchen bei Entdeckung des Fehlers schon dünner geschliffen war.

also da $E = 1/E$ und E nahe $= 7,85 \cdot 10^6$ ist:

$$\delta E = + 5,20 \cdot 10^6 \cdot \delta \varphi.$$

Die optische Untersuchung liess für $\delta \varphi$ die folgenden absoluten Werthe erkennen:

für Nr. 9 $\delta \varphi = 1^\circ$, Nr. 10 $\delta \varphi = 1,5^\circ$, Nr. 11 $\delta \varphi = 1^\circ$.

In welchem Sinne diese Abweichungen lagen, war nicht mehr festzustellen, die vorstehenden Werthe E für (90° A I.) und (90° B I.) lassen aber erkennen, dass sie positiv zu rechnen sein werden. Die Correctionen würden demgemäss sein:

für Nr. 9 $\delta E = - 0,09 \cdot 10^6$, Nr. 10 $\delta E = - 0,14 \cdot 10^6$,
Nr. 11 $\delta E = - 0,09 \cdot 10^6$.

Hiernach erhält man schliesslich die folgende Zusammenstellung:

	Nr. 1	2	3		15	
90° A I. $10^{-4} E =$	781	781	787	788	788	788
	Nr. 9		10		11	18
90° A II. $10^{-4} E =$	780	784	788	787	786	90° B I. 784
Gesamtmittel $E =$	785,3,		$E = 12,734 \cdot 10^{-8}$			
wahrscheinlicher Fehler	$\pm 7000,$		$\pm 0,011.$			

Die Uebereinstimmung der unter verschiedenen Umständen an demselben Stäbchen gefundenen Werthe zeigt, dass die Ursachen der Abweichungen hauptsächlich in den Dimensionsbestimmungen und in Inhomogenitäten der Substanz zu suchen sind, nicht in den Biegungsbeobachtungen.

Die Gleichheit der Werthe von E für die drei Gattungen (90° A I.), (90° A II.) und (90° B I.) gibt eine Bestätigung der Theorie (s. hierzu Formel 37).

Anmerkung. Der Ueberblick über die Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 in den verschiedenen Beobachtungstafeln ergibt, dass die Reibung in den Axen bei den letzten (durch η_n charakterisirten) Beobachtungen bedeutend grösser war, als bei den früheren (mit η_a bezeichneten); sie war in der That während der Benutzung des Apparates stetig gestiegen. Es sind deshalb für weitere Beobachtungen Abänderungen des Apparates begonnen, um die gleitende Reibung durch rollende zu ersetzen; dieser naheliegende Ausweg bietet nur deshalb Schwierigkeiten, weil dadurch die Stabilität der äusserst leichten

drehbaren Theile ganz minimal wird, und dem durch besondere Maassregeln begegnet werden muss.

Drillungen:

0° Nr. 5.	$L = 40,2$,	$B = 4664$,	$D = 784,5$,	$E = 5163$,	$\vartheta = 18$.
		$\sigma_{20} = 88,55$.			
0° Nr. 6.	$L = 41,18$,	$B = 4733$,	$D = 791,5$,	$E = 5163$,	$\vartheta = 16,7$.
		$\sigma_{20} = 86,35$.			
0° Nr. 7.	$L = 41,3$,	$B = 5127$,	$D = 811,0$,	$E = 5163$,	$\vartheta = ?$
		$\sigma_{20} = 75,30$.			
0° Nr. 8.	$L = 30,68$,	$B = 4671$,	$D = 807,9$,	$E = 5163$,	$\vartheta = 17,5$.
		$\sigma_{20} = 79,80$.			
0° Nr. 5'.	$L = 41,95$,	$B = 466,4$,	$D = 480,9$,	$E = 5163$,	$\vartheta = 17$.
		$\sigma_3 = 95,35$.			
0° Nr. 6'.	$L = 41,45$,	$B = 4735$,	$D = 466,4$,	$E = 5163$,	$\vartheta = 17,8$.
		$\sigma_6 = 101,5$.			
0° Nr. 7'.	$L = 42,55$,	$B = 5127$,	$D = 467,8$,	$E = 5163$,	$\vartheta = 18,2$.
		$\sigma_6 = 96,30$.			

Diese Beobachtungen sind nun nach Formel (33) zur Berechnung der beiden Unbekannten T und f zu benutzen. Wir bilden aus:

$$(49) \quad \tau = \frac{3 N L T}{D^3 B} - \frac{D}{B} f \tau$$

die Hauptgleichungen, indem wir die vier auf die Stäbchen Nr. 5, 6, 7, 8 und die drei auf Nr. 5', 6', 7' bezüglichen Formeln addiren. Freilich ist dabei die verschiedene Abweichung der Orientirungen der Stäbchen von der vorausgesetzten nicht berücksichtigt; dieselbe lässt sich hier aber auch nur unvollkommen in Rechnung ziehen, da der Meridian, in welchem die Längsaxen aus der Krystallaxe abweichen, und die Orientirungen der Nebenaxen an den Stäbchen durch directe Beobachtung nachträglich nicht bestimmbar sind.

Die Rechnung ergibt:

$$T = 20,08 \cdot 10^{-8}, \quad T = 4\,978\,000, \quad f = 0,6345,$$

und wenn man rückwärts den erhaltenen Werth f in die Gleichung (33) einsetzt, finden sich die Werthe:

Nr. 5	6	7	8	5'	6'	7'
$T = 20,09$	19,95	20,33	20,00	19,97	19,99	20,29.

Die Uebereinstimmung ist sehr bedeutend; dass Nr. 7 und das daraus durch Dünnerschleifen erhaltene Nr. 7' einen

übereinstimmend grossen Werth ergibt, zeigt, dass diese Abweichungen nicht in Beobachtungsfehlern, sondern in mangelhafter Orientirung der Prismen begründet sind.

Es ist bemerkenswerth, dass der Werth von f demjenigen sehr nahe liegt, der sich für dieselbe Gattung Stäbchen bei dem hexagonalen System ergibt, wo rings um die Hauptaxe vollkommene Symmetrie stattfindet; die Theorie gibt dort $f = -0,636$. Hiernach kann man wenigstens beim Bergkrystall für die Torsion eines Prismas um die krystallographische Hauptaxe die einfache Formel (10) für $T = T'$ anwenden, wie sie auch für unkrystallinische Medien gilt. Es wäre ein bedeutender Vortheil, wenn sich dies allgemein bei rhomboëdrischen Krystallen bewähren sollte.

Der erhaltene Werth von T_0 und T'_0 ist nun noch so weit als möglich wegen der Orientirung der benutzten Prismen zu corrigiren, was nicht mit Strenge ausführbar ist, da, wie gesagt, die Orientirung sich auf optischem Wege nur ungenügend bestimmen liess. Die Formel (32) für T ergibt für die Gattung (0°) , d. h. für:

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$$

allgemein:

$$\delta T_0 = 4s_{14}(\beta_1(3\alpha_1\delta\alpha - \beta_1\delta\beta) - \beta_2\delta\gamma_2).$$

Nach der Herstellungsart war anzunehmen, dass entweder die Schmalseite oder die Breitseite in der krystallographischen Symmetrieebene gelegen hat, d. h. entweder:

$\beta_2 = \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = \alpha_2 = 0$ war, also: $\delta T_0 = -4s_{14}\delta\gamma_2$
oder:

$$\beta_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \alpha_1 = 0, \quad \text{also: } \delta T_0 = -4s_{14}\delta\beta.$$

γ_2 ist der Cosinus des Winkels zwischen der kleineren Querdimension und Z -Axe, $\delta\gamma_2$ ist daher bei der ersten Annahme der Winkel $\delta\psi$, welchen die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles, der parallel der Breite durch das Prisma geht, mit der Längskante einschliesst. β ist der Cosinus des Winkels zwischen Längs- und Y -Axe, $\delta\beta$ also bei der zweiten Annahme der Winkel $\delta\varphi$, welchen die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles, welcher parallel der Dicke durch das Stäbchen geht, mit der Längskante einschliesst.

Die optische Prüfung ergab, natürlich nur dem absoluten Werthe nach, $\delta\varphi$ für alle Stäbchen nahe gleich 1° , $\delta\psi$ ebenso gross, nur für Nr. 7, resp. 7' etwa $2,2^\circ$. Hält man hiermit zusammen, dass Nr. 7 und 7' auffällig abweichende Werthe ergeben haben, so kann man mit einer ziemlichen Wahrscheinlichkeit schliessen, dass die Schmalseite der Stäbchen in der Symmetrieebene gelegen hat, und auch dass die Correction mit negativem Vorzeichen anzubringen ist.

Hierdurch würde man erhalten, da s_{14} etwa $= -4,24 \cdot 10^{-8}$ ist, für:

	Nr. 5	6	7	8	5'	6'	7'
T =	19,80	19,76	19,69	19,71	19,68	19,65	19,69.
Im Mittel $T_0 = 19,70 \cdot 10^{-8}$,				$T'_0 = 5\,076\,000$.			
90° A I. Nr. 1. $L = 42,1$,	$B = 5448$,		$D = 850,2$,		$E = 5176$,		$\vartheta = 16,5$.
	$\sigma_{20} = 87,40$.						
90° A I. Nr. 2. $L = 39,52$,	$B = 5442$,		$D = 875,4$,		$E = 5176$,		$\vartheta = 17,5$.
	$\sigma_{20} = 76,00$.						
90° A I. Nr. 3. $L = 37,25$,	$B = 5453$,		$D = 844,1$,		$E = 5176$,		$\vartheta = 17,0$.
	$\sigma_{20} = 74,40$.						
90° A I. Nr. 1'. $L = 33,25$,	$B = 5449$,		$D = 465,2$,		$E = 5163$,		$\vartheta = 17$.
	$\sigma_5 = 102,2$.						
90° A I. Nr. 2'. $L = 41,00^1)$,	$B = 5442$,		$D = 470,6$,		$E = 5163$,		$\vartheta = 18$.
	$\sigma_8 = 120,2$.						

Diese Beobachtungen wollen wir bei der Berechnung zusammenfassen, da die Stäbchen Nr. 1—3 aus demselben Krystall und zwar gemeinsam herausgeschnitten sind, also gleiche Orientirung zeigen. Wir können zur Bestimmung von T auf eine doppelte Weise verfahren; weil die Längsaxe in eine Normale zur krystallographischen Symmetrieebene fällt, ist die Formel (33) resp. (49) anwendbar, und darin einerseits f durch Combination von Beobachtungen an verschieden dicken Stäbchen zu bestimmen, resp. zu eliminiren, andererseits nach der früheren theoretischen Betrachtung durch Formel (40) in ihrem Werth zu berechnen. Wenden wir beide Methoden an, so erhalten wir dadurch eine neue Prüfung der Theorie.

Die erstere Methode ergibt:

$$T_{90A} = 29,13 \cdot 10^{-8}, \quad f_{90A} = -0,521.$$

1) Unsichere Messung.

Dabei findet sich der Werth von f äusserst empfindlich gegen kleine Aenderungen der beobachteten Werthe, die erhaltene Zahl hat also nur geringe Sicherheit. Setzt man sie in (33) ein, so erhält man folgende Werthe von T für die einzelnen Stäbchen:

Nr. 1	2	3	1'	2'
$T = 29,19$	$29,14$	$29,05$	$29,31$	$28,94.$

Was die zweite Methode anbetrifft, so ist zur Berechnung von f ein Näherungswerth von s_{44} , s_{55} , s_{14} nöthig; überdies muss berücksichtigt werden, dass die Orientirung der Stäbchen von der verlangten abweicht.

Dieser letztere Umstand würde streng genommen die Formeln (33) und (40) überhaupt nicht mehr anwendbar machen, indessen überzeugt man sich leicht, dass die allgemeinste Formel (31) sich merklich auf (33) reducirt, wenn die Abweichungen, wie hier, nur mässige sind. Daher genügt es, nur die Aenderungen zu untersuchen, welche die in f nach (40) vorkommenden Werthe erleiden, wenn die Orientirung nicht genau die vorgeschriebene ist. Diese Glieder sind nach (36) und (40):

$$s'_{55} = 2(s_{11} - s_{12}), \quad s'_{44} = s_{44}, \quad s'_{45} = 2s_{14},$$

und ihre Aenderungen sind nach der Theorie:¹⁾

$$\delta s'_{55} = -4s_{14}\delta\beta_2, \quad \delta s'_{44} = -4s_{14}\delta\gamma_1, \quad \delta s'_{45} = (s_{44} - 2s_{14})\delta\gamma_1.$$

Es hat also nur die Lage der Querdimensionen, nicht aber ein Fehler in der Lage der Längsaxe Einfluss.

Liegt die B -Richtung zwischen der Y - und Z -Axe, und macht sie mit ersterer den Winkel $\delta\varphi$, so ist:

$$\delta\gamma_1 = -\delta\beta_2 = \delta\varphi, \quad \text{also:}$$

$$\delta s'_{55} = +4s_{14}\delta\varphi, \quad \delta s'_{44} = -4s_{14}\delta\varphi, \quad \delta s'_{45} = +(s_{44} - 2s_{14})\delta\varphi.$$

Nun haben wir die Näherungswerthe:

$$s_{44} = 19,6, \quad 2(s_{11} - s_{12}) = 28,7, \quad s_{14} = -4,24$$

Die optische Untersuchung an eigens dazu hergestellten Querschnitten der Stäbchen hat rund $\delta\varphi = 2^\circ$ ergeben, das Vorzeichen liess sich nur durch Vergleichung mit den fol-

1) l. c. p. 616.

genden positiv finden. Hiernach sind in (69) die Werthe einzusetzen:

$$(s'_{44}) = 19,0, \quad (s'_{55}) = 29,3, \quad (s'_{46}) = -8,17.$$

Dies ergibt aber: $f = -0,512$,

zufällig in sehr grosser Uebereinstimmung mit dem nach der ersten Methode gefundenen Werthe. Das Einsetzen in (33) ergibt folgende Werthe:

Nr. 1	2	3	1'	2'
T = 29,22	29,16	29,08	29,33	28,98, im Mittel 29,15.10 ⁻⁸ .

Diese sind nun noch wegen der Orientirung zu corrigiren. Da $s'_{55} = T_{90A}$ ist, so wird:

$$\delta T_{90A} = 4 s_{14} \delta \varphi,$$

die Correction beträgt also hier im Mittel $-0,57$. Eine Zusammenstellung aller Werthe gebe ich weiter unten.

90° A I. Nr. 15. $L = 37,80$, $B = 6002$, $D = 843,4$, $E = 5163$, $\vartheta = 17,7$.
 $\sigma_{20} = 72,55$.

90° A I. Nr. 16. $L = 34,55$, $B = 5997$, $D = 843,8$, $E = 5163$, $\vartheta = 18,2$.
 $\sigma_{20} = 67,10$.

90° A I. Nr. 17. $L = 37,55$, $B = 6002$, $D = 840,2$, $E = 5163$, $\vartheta = 18$.
 $\sigma_{20} = 73,50$.

90° A I. Nr. 16'. $L = 34,30$, $B = 5997$, $D = 475,5$, $E = 5163$, $\vartheta = 16,4$.
 $\sigma_8 = 89,62$.

90° A I. Nr. 17'. $L = 35,10$, $B = 6002$, $D = 479,5$, $E = 5163$, $\vartheta = 17,1$.
 $\sigma_8 = 89,55$.

Benutzt man diese Beobachtungen, um nach Formel (49) T und f zu berechnen, so erhält man die Werthe:

$$T_{90A} = 29,37.10^{-8}, \quad f = -0,496,$$

und rückwärts f in die Formel (33) eingesetzt für die einzelnen Stäbchen:

Nr. 15	16	17	16'	17'
T = 29,15	29,51	29,41	29,38	29,36.

Berechnet man hingegen f nach Formel (40), so findet sich, da die Orientirung der Stäbchen derjenigen der vorhergehenden merklich gleich ist, wiederum:

$$f = -0,512 \quad \text{und daraus:}$$

T = 29,06	29,42	29,32	29,32	29,30
im Mittel $T_{90A} = 29,28.10^{-8}$.				

Die beiden Werthe f stimmen hier nicht so gut überein; da aber, wie oben erwähnt, diese Constante äusserst empfindlich gegen kleine Aenderungen der beobachteten Werthe, und überdies, wie ebenfalls früher erörtert ist, die Bestimmung der Orientirung der Stäbchen der zweiten Reihe wegen der nicht vollständigen Regelmässigkeit des Materials schwierig und unsicher ist, so wird man sich mit der Uebereinstimmung zufrieden geben müssen.

Auch diese Werthe sind nun noch wegen der Abweichung der Orientirung von der vorgeschriebenen zu corrigiren. Nach dem früheren ist, da $\delta\varphi$ im Mittel gleich 2° ist, überall 0,57 abzuziehen. Die Zusammenstellung der dann erhaltenen Werthe mit den übrigen hierher gehörigen folgt weiter unten.

90° A II. Nr. 9. $L = 34,95$, $B = 5070$, $D = 858,1$ $E = 5176$, $\vartheta = 16$.
 $\sigma_{20} = 78,10$.

90° A II. Nr. 10. $L = 36,45$, $B = 5093$, $D = 877,2$ $E = 5163$, $\vartheta = 18,5$.
 $\sigma_{20} = 74,95$.¹⁾

90° A II. Nr. 11. $L = 39,2$, $B = 5118$, $D = 820,8$, $E = 5163$, $\vartheta = 19$.
 $\sigma_{22} = 98,85$.

90° A II. Nr. 10'. $L = 37,75$, $B = 5093$, $D = 480,8$, $E = 5163$, $\vartheta = 16,2$.
 $\sigma_8 = 112,15$.

90° A II. Nr. 11'. $L = 31,85$, $B = 5118$, $D = 469,8$, $E = 5163$, $\vartheta = 16,7$.
 $\sigma_8 = 101,05$.

Für die Stäbchen der Gattung (90° A II) ist, weil ihre Längsrichtung in der krystallographischen Symmetrieebene liegt, die Formel (31) in der Vereinfachung anzuwenden, die sich nach (38) dadurch ergibt, dass $\Theta' = 0$ ist. Sie lautet so:

$$\tau = \frac{3 N L T \left[1 + \frac{\Theta''^2}{E T} \left(\frac{D^2}{B^2} + \frac{D^3 f}{B^3} \right) \right]}{D^3 B \left(1 + \frac{D}{B} f \right)}.$$

Nach (38) ist hierbei, da $\alpha = 0$, $\beta = 1$ ist, $\Theta'' = -s_{14}$; das Einsetzen dieses Werthes und der für E und T hier gültigen ergibt für die im Zähler neben 1 stehende Klammer etwa 0,0014, es ist daher die Abweichung dieser For-

1) Da nur mit der einen Rolle vom Radius 36,73 mm beobachtet ist, so ist dieser Werth des Hebelarmes bei der Berechnung zu benutzen.

mel von der früher benutzten (33) fast zu vernachlässigen. Man kann im übrigen die Berechnung ebenso wie für die Gattung (90° A I) anstellen, nur lässt sich f hier nicht aus theoretischen Betrachtungen ableiten.

Man erhält:

$$T = 28,54 \cdot 10^{-8}, \quad f = -0,691$$

und durch Einsetzen dieses letzteren Werthes in Gleichung (33) für:

Nr. 9	10	11	10'	11'
T = 28,60	28,30	28,69	28,49	28,59.

Diese Stäbchen haben aber Abweichungen von der vorgeschriebenen Lage, welche zur Correction von T benutzt werden müssen. Es ist für Gattung (90° A II) nach Formel (32):

$$\delta T = -4s_{14} \delta \beta_2 = -4s_{14} \delta \varphi,$$

wenn $\delta \varphi$ die Abweichung der Längsaxe von der Lage normal zur Z -Axe bezeichnet.

Nach den p. 708 citirten Beobachtungen hat $\delta \varphi$ für Nr. 9, 10, 11 resp. den Werth 1° , $1,5^\circ$, 1° , es ist daher resp. die Correction $+0,29$, $+0,43$, $+0,29$ anzubringen.

Stellt man nach Anbringung der angegebenen Correctionen nunmehr alle auf die Gattungen (90° A I und II) bezüglichen Beobachtungen¹⁾ zusammen, so erhält man folgendes System.

90° A I. Nr. 1	2	3	1'	2'	15	16	17	16'	17'
T = 28,65	28,59	28,51	28,76	28,41	28,49	28,85	28,75	28,75	28,73
90° A II. Nr 9	10	11	10'	11'					
T = 28,89	28,73	28,98	28,92	28,88					

$$\text{Gesamtmittel } T_{90A} = 28,725 \cdot 10^{-8}, \quad T_{90A} = 3\,481\,000$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler } \pm 0,030, \quad \pm 3600$$

Die Uebereinstimmung der Werthe für die Gattungen (90° A I und II) ist eine Bestätigung der Theorie; im übrigen zeigt sich hier wieder, dass die Schwierigkeit, die Orientirung der Prismen genau zu bestimmen, eine hauptsächliche

1) Von den Stäbchen der Gattung (90° A I) sind dabei als sicherer die Werthe benutzt, die mit dem nach der Theorie berechneten f erhalten sind, die anderen würden übrigens ein nur unmerklich geändertes Gesamtergebnat ergeben.

Fehlerquelle ist, denn die zusammen angefertigten und daher nahezu gleich orientirten Systeme stimmen in sich besser, als miteinander überein.

$$90^\circ \text{ B I. Nr. 18. } L = 34,75, \quad B = 6022, \quad D = 846,8, \quad E = 5163, \quad \vartheta = 18,5. \\ \sigma_{20} = 43,95.$$

$$90^\circ \text{ B I. Nr. 19. } L = 31,5, \quad B = 6019, \quad D = 837,1, \quad E = 5163, \quad \vartheta = 18,5. \\ \sigma_{20} = 41,30.$$

$$90^\circ \text{ B I. Nr. 20. } L = 29,65, \quad B = 6017, \quad D = 839,1, \quad E = 5163, \quad \vartheta = 17,5. \\ \sigma_{25} = 48,40.$$

$$90^\circ \text{ B I. Nr. 19'. } L = 30,75, \quad B = 6019, \quad D = 476,7, \quad E = 5163, \quad \vartheta = 17,5. \\ \sigma_5 = 51,32.$$

$$90^\circ \text{ B I. Nr. 20'. } L = 28,65, \quad B = 6017, \quad D = 475,5, \quad E = 5163, \quad \vartheta = 17. \\ \sigma_5 = 40,36.$$

Diese Beobachtungen lassen sich nun zunächst wieder nach Formel (49) berechnen. Man erhält dann:

$$T = 18,53 \cdot 10^{-8}, \quad f = -0,845,$$

und bei Einsetzen von diesem f für die einzelnen Stäbchen nach (33) bei:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Nr. 18} & 19 & 20 & 19' & 20' \\ T = 18,48 & 18,51 & 18,58 & 18,42 & 18,66. \end{array}$$

Man kann aber f auch nach Formel (41) berechnen, wenngleich die Orientirung der Stäbchen etwas von der verlangten abweicht. Für die Gattung (90° B I.) ist:

$$s_{55}' = s_{44}, \quad s_{44}' = 2(s_{11} - s_{12}), \quad s_{45}' = 2s_{14},$$

und die Aenderungen dieser Grössen bei Abweichungen von der vorgeschriebenen Orientirung betragen nach der Theorie¹⁾:

$$\delta s_{55}' = -4s_{14}\delta\gamma_2, \quad \delta s_{44}' = -4s_{14}\delta\beta_2, \quad \delta s_{45}' = (s_{44} - 2s_{14})\delta\gamma_2;$$

es haben also wie bei der Gattung (90° A I.) nur die Fehler der Lage der Querdimensionen Einfluss. Nennt man den Winkel der Breitedimension mit der Z -Axe $\delta\varphi$, so ist $\delta\gamma_2 = -\delta\beta_1 = \delta\varphi$, also:

$$\delta s_{55}' = -4s_{14}\delta\varphi, \quad \delta s_{44}' = +4s_{14}\delta\varphi, \quad \delta s_{45}' = +(s_{44} - 2s_{14})\delta\varphi.$$

Dabei haben wir die Näherungswerthe:

$$s_{44} = 19,6, \quad 2(s_{11} - s_{12}) = 28,7, \quad s = -4,24,$$

wo die Factoren 10^{-8} zu ergänzen sind.

¹⁾ l. c. p. 616.

Die optische Untersuchung ergab $\delta\varphi = + 3,3^\circ$ im Mittel, wobei aber eine Unsicherheit von mehreren Zehntelgraden zugegeben werden muss. Die bei der Bestimmung von f zu benutzenden Werthe werden demgemäss:

$$(s_{55}') = 18,7, \quad (s_{44}') = 29,6, \quad (s_{35}') = - 7.86.$$

Daraus folgt: $f' = - 0,806$

in befriedigender Uebereinstimmung mit dem oben erhaltenen Werthe, wenn man die grosse Empfindlichkeit dieser Grösse berücksichtigt. Hieraus würde dann folgen für:

$$\begin{array}{cccccc} \text{Nr. 18} & 19 & 20 & 19' & 20' & \\ T = 18,60 & 18,63 & 18,70 & 18,48 & 18,73, & \text{im Mittel } T = 18,63 \cdot 10^{-8}. \end{array}$$

Um diese Werthe wegen des Fehlers $\delta\varphi = 3,3^\circ$ zu corrigiren, ist 0,97 hinzuzufügen.

Stellt man die so erhaltenen Werthe mit den für die Gattung (0°) gefundenen, welche ihnen nach der Theorie gleich sein sollen, zusammen, so finden sich:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Nr. 5} & 6 & 7 & 8 & 5' & 6' & 7' \\ 0^\circ T = & 19,90 & 19,76 & 19,69 & 19,71 & 19,68 & 19,65 & 19,69 \\ & & \text{Nr. 18} & 19 & 20 & 18' & 19' \\ 90^\circ \text{ B. I. } T & 19,57 & 19,60 & 19,67 & 19,45 & 19,70 \\ \text{Gesamtmittel } T_{90B} = T_0 = & 19,665 \cdot 10^{-8}, & T_{90B} = T_0 = & 5\,085\,000 \\ \text{wahrscheinlicher Fehler} & \pm 0,018, & & \pm 4700. \end{array}$$

3. Resultate.

Aus den oben gefundenen Werthen¹⁾:

$$\begin{array}{ll} E_0 = 9,705 \cdot 10^{-8} (\pm 0,011), & T_0 = 19,665 \cdot 10^{-8} (\pm 0,018), \\ E_{-45} = 7,668 \cdot 10^{-8} (\pm 0,006), & T_{90A} = 28,725 \cdot 10^{-8} (\pm 0,030) \\ E_{+45} = 11,898 \cdot 10^{-8} (\pm 0,006), & \\ E_{90} = 12,734 \cdot 10^{-8} (\pm 0,011), & \end{array}$$

folgen nach Gleichungen (35)–(39) sogleich die Determinantenverhältnisse $S_{hk}/S = s_{hk}$ nämlich:

1) Bei der Beurtheilung der Zuverlässigkeit der erhaltenen Zahlen ist zu berücksichtigen, dass die Fehler der Orientirungen der Prismen in den angegebenen „Wahrscheinlichen Fehlern“ nur zum kleinsten Theile enthalten sind. Die letzten angegebenen Stellen der Resultate haben daher wenig Werth.

$$\begin{aligned}s_{11} &= 12,734 \cdot 10^{-8} (\pm 0,001), & s_{12} &= -1,629 \cdot 10^{-8} (\pm 0,019); \\ s_{33} &= 9,705 \cdot 10^{-8} (\pm 0,011), & s_{13} &= -1,486 \cdot 10^{-8} (\pm 0,015), \\ s_{44} &= 19,665 \cdot 10^{-8} (\pm 0,018), & s_{14} &= -4,230 \cdot 10^{-8} (\pm 0,010).\end{aligned}$$

Dabei ist der wahrscheinliche Fehler jeder Zahl gleich der Wurzel aus der Summe der wahrscheinlichen Fehlerquadrate ihrer Theile nach den Formeln gesetzt, die aus (35)–(39) durch Auflösung nach den s_{hk} folgen.

Durch Einsetzen dieser Werthe ergibt sich der allgemeine Ausdruck für den Dehnungscoefficienten E in einer durch die Richtungscosinus α, β, γ bestimmten Richtung¹⁾:

$$\begin{aligned}E &= 12,734 \cdot (1 - \gamma^2)^2 + 16,693 \cdot (1 - \gamma^2) \gamma^2 \\ &\quad + 9,705 \cdot \gamma^4 - 8,460 \cdot \beta \gamma (3\alpha^2 - \beta^2).\end{aligned}$$

Für Richtungen, die in der Symmetrieebene liegen, erhält man, wenn man ihren Winkel gegen die z -Axe mit φ bezeichnet:

$$\begin{aligned}E &= 12,734 \cdot \sin^4 \varphi + 16,693 \cdot \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + 9,705 \cdot \cos^4 \varphi + 8,460 \cdot \cos \varphi \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

In dieser Ebene hat E Maxima oder Minima in den vier Richtungen:

$$\varphi_I = -48^\circ 15', \quad \varphi_{II} = 0^\circ, \quad \varphi_{III} = 10^\circ 50', \quad \varphi_{IV} = 71^\circ 35'.$$

Die Maximal- und Minimalwerthe, die diesen Richtungen entsprechen, sind:

$$\begin{aligned}E_I &= 7,634 \cdot 10^{-8}; & E_{II} = E_0 &= 9,705 \cdot 10^{-8}; & E_{III} &= 9,671 \cdot 10^{-8} \\ E_{IV} &= 14,191 \cdot 10^{-8}.\end{aligned}$$

Für die Richtungen, welche eine Ebene, die zur Symmetrieebene normal steht, erfüllen, gilt:

$$E = 12,734 \cdot \sin^4 \varphi + 16,693 \cdot \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 9,705 \cdot \cos^4 \varphi.$$

Unter diesen ergibt einen kleinsten Werth für E :

$$\varphi = \pm 29^\circ 6' \quad \text{nämlich } E = 9,384.$$

Während bei Beryll das Minimum sehr nahe bei $\varphi = 45^\circ$ liegt, weicht es bei Bergkrystall von dieser Lage sehr erheblich ab; dies lässt im voraus vermuthen, dass hier die Poisson'sche Relation (44) auch nicht angenähert erfüllt sein wird.

1) In den Formeln für E und T ist der jedem Zahlenfactor beizufügende Coefficient 10^{-8} unterdrückt.

Der Torsionscoëfficient T, welcher allerdings nicht allein, aber doch in hervorragender Weise die Grösse der Drillung bestimmt, wird im allgemeinen:

$$T = 19,665 + 9,060 \cdot \gamma_2^2 + 22,984 \cdot \gamma_1^2 \\ - 16,920 [(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2].$$

Liegt die Längsrichtung und die grössere Querdimension in der krystallographischen Symmetrieebene, so ist:

$$\alpha = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \gamma_2 = 0,$$

also, falls man:

$$\gamma = \cos \varphi = \beta_1, \quad \beta = \sin \varphi = +\gamma_1 \quad \text{setzt:}$$

$$T = 19,665 + 5,746 \cdot \sin^2 2\varphi + 8,460 \cdot \sin 2\varphi \cos 2\varphi.$$

Hiernach wird T nicht geändert, wenn φ um 90° wächst, es ist also auch für $+45^\circ$ und -45° gleich gross, und zwar gleich $25,411 \cdot 10^{-8}$. Dies ist ein specieller Fall eines entsprechenden allgemeinen Satzes über die Unveränderlichkeit von T bei einer Verschiebung des Prismas um 90° in der Ebene der grösseren Querdimension, den ich in einem Zusatz zu dieser Abhandlung beweisen werde.

Maxima und Minima von T treten ein für:

$$\varphi = 31^\circ 3' \quad \text{und} \quad \varphi = 76^\circ 3' \\ = 121^\circ 3' \quad \quad \quad = 166^\circ 3',$$

ihre Werthe sind respective:

$$T = 27,652 \cdot 10^{-8}, \quad T = 17,424 \cdot 10^{-8}.$$

Liegt die Längsrichtung und die kleinere Querdimension in der Symmetrieebene, so ist:

$$\alpha = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0,$$

also, falls man wieder setzt:

$$\gamma = \cos \varphi = -\beta_2, \quad \beta = \sin \varphi = +\gamma_2 \quad \text{gilt:}$$

$$T = 19,665 + 9,060 \cdot \sin^2 \varphi - 8,460 \cdot \sin 2\varphi.$$

Hier finden sich Maxima und Minima für:

$$\varphi = 30^\circ 55', \quad \varphi = 120^\circ 55';$$

ihre Werthe sind:

$$T = 14,600 \cdot 10^{-8}, \quad T = 33,791 \cdot 10^{-8}.$$

Für $\varphi = +45^\circ$ folgt $T = 15,735 \cdot 10^{-8}$, für $\varphi = -45^\circ$,
 $T = 32,655 \cdot 10^{-8}$.

Endlich ist noch von Interesse wegen der Beobachtungen diejenige Orientirung, bei welcher die Längsaxe in die Normale zur Symmetrieebene fällt, d. h. $\alpha = 1$, also $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \gamma = 0$. Hier folgt, wenn man den Winkel der grösseren Querdimension mit der Z -Axe durch φ bezeichnet, also $\gamma_2 = \sin \varphi$, $\beta_2 = -\cos \varphi$ setzt:

$$T = 19,665 + 9,060 \cdot \sin^2 \varphi - 8,460 \cdot \sin 2\varphi.$$

Diese Formel ist identisch mit der letztvorhergehenden, in Uebereinstimmung mit dem eben citirten allgemeinen Satz, dass bei Drehung eines Prismas um 90° um die kleinere Querdimension sich der Drillungscoefficient nicht ändert.

Die gefundenen Werthe der Determinantenverhältnisse s_{hk} bestimmen auch nach den Formeln (45) bis (47) die Grösse der Deformation eines beliebig gestalteten Stückes eines Bergkrystalles bei allseitig gleichem Druck. Man hat dann:

$$z_z = -p A_0, \quad x_x = y_y = -p A_{90},$$

$$\text{worin:} \quad A_0 = 2s_{13} + s_{33}, \quad A_{90} = s_{11} + s_{12} + s_{13},$$

die Coefficienten der Compression parallel und normal zur Hauptaxe sind. Der Coefficient der cubischen Compression ist:

$$M = A_0 + 2 A_{90}.$$

Für Bergkrystall findet sich:

$$A_0 = 6,73 \cdot 10^{-8}, \quad A_{90} = 9,62 \cdot 10^{-8}, \quad M = 25,97 \cdot 10^{-8};$$

der letztere Werth ist etwa ein Zwanzigstel des für Wasser gültigen. Die Winkeländerung bei allseitigem Druck hängt allein ab von dem Coefficienten:

$$B = s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{12};$$

derselbe hat für Bergkrystall den Werth:

$$B = -2,856 \cdot 10^{-8},$$

übertrifft also den für Beryll gültigen Werth um das Vierfache, hat überdies das entgegengesetzte Vorzeichen, was damit zusammenhängt, dass hier $A_{90} > A_0$, dort $A_0 > A_{90}$ ist.

Die thermischen linearen Ausdehnungscoefficienten für Bergkrystall sind nach Fizeau:

$$\alpha_0 = 0,781 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_1 = 1,419 \cdot 10^{-5}.$$

Setzt man sie in die Gleichungen (48) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 781 &= -q_1 \cdot 2,972 + q_0 \cdot 9,705, \\ 1419 &= q_1 \cdot 11,105 - q_0 \cdot 1,486 \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$q_0 = 124,8, \quad q_1 = 143,9,$$

beide Werthe, welche, wie erwähnt, die Wärmeabstossung parallel und normal zur Hauptaxe messen, untereinander wenig verschieden, aber die für Beryll gefundenen Zahlen ausserordentlich überragend.

Schliesslich sind noch nach den Formeln (43) die eigentlichen Elasticitätsconstanten c_{kih} für Bergkrystall zu berechnen. Die Resultate sind:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 8,682 \cdot 10^6, & c_{12} &= 0,709 \cdot 10^6, \\ c_{33} &= 10,745 \cdot 10^6, & c_{13} &= 1,438 \cdot 10^6, \\ c_{44} &= 5,823 \cdot 10^6, & c_{14} &= 1,715 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Dabei ist zu bemerken, dass diese Zahlen wesentlich unsicherer sind, als die für die Anwendung zunächst in Betracht kommenden Determinantenverhältnisse s_{hk} , da sie gegen Aenderungen der direct beobachteten Grössen sehr empfindlich sind. Sie setzten, wie im Eingang erwähnt, ein Coordinatensystem voraus, dessen Z -Axe in die krystallographische Hauptaxe, dessen YZ -Ebene normal zu einer Fläche $+R$ steht, sodass die positive Y -Axe aus derjenigen Fläche austritt, in deren einer Ecke auch die positive Z -Axe den Krystall verlässt.

An die Poisson'schen Relationen (44):

$$c_{13} = c_{44}, \quad c_{11} = 3c_{12}$$

findet sich auch nicht einmal eine Annäherung; man wird also die Molecüle des Bergkrystalls mit sehr starker Polarität versehen denken müssen.

Zusatz I. Mehrfach ist der allgemeine Satz erwähnt dass zwei Prismen, deren Orientirungen durch eine Drehung um die kürzere Querdimension um 90° ineinander übergehen oder bei denen Längs- und Breitenrichtung vertauscht sind, den gleichen Torsionscoefficienten zeigen. Ich füge hier den Beweis dieses Satzes an.

Sei im Krystall, der einem beliebigen System angehören

mag, ein beliebiges Coordinatensystem X', Y', Z' gegeben und s'_{hk} das auf dieses bezogene Determinantenverhältniss, in derselben Weise verstanden, wie s_{hk} in dem Haupttaxensystem X, Y, Z . Dann drückt sich nach den von mir gegebenen allgemeinen Formeln in unserer Bezeichnung der Drillungscoefficient T aus für ein Prisma, dessen Längsrichtung durch α, β, γ , dessen grössere Querdimension durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ihrer Lage nach gegeben ist, wie folgt:

$$\begin{aligned} T = & 4(s'_{11}\alpha^2\alpha_1^2 + s'_{22}\beta^2\beta_1^2 + s'_{33}\gamma^2\gamma_1^2) \\ & + 2[(s'_{44} + 4s'_{23})\beta\beta_1\gamma\gamma_1 + (s'_{55} + 4s'_{13})\gamma\gamma_1\alpha\alpha_1 + (s'_{66} + 4s'_{12})\alpha\alpha_1\beta\beta_1] \\ & + 2(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1)[(2s'_{14} + s'_{56})\alpha\alpha_1 + 2s'_{24}\beta\beta_1 + 2s'_{34}\gamma\gamma_1] \\ & + 2(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1)[2s'_{15}\alpha\alpha_1 + (2s'_{25} + s'_{46})\beta\beta_1 + 2s'_{35}\gamma\gamma_1] \\ & + 2(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)[2s'_{16}\alpha\alpha_1 + 2s'_{26}\beta\beta_1 + (2s'_{36} + s'_{45})\gamma\gamma_1] \\ & + s'_{44}(\beta^2\gamma_1^2 + \gamma^2\beta_1^2) + s'_{55}(\gamma^2\alpha_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2) + s'_{66}(\alpha^2\beta_1^2 + \beta^2\alpha_1^2) \\ & + 2[s'_{56}(\alpha^2\beta_1\gamma_1 + \alpha_1^2\beta\gamma) + s'_{46}(\beta^2\alpha_1\gamma_1 + \beta_1^2\alpha\gamma) + s'_{45}(\gamma^2\alpha_1\beta_1 + \gamma_1^2\alpha\beta)]. \end{aligned}$$

Dieser Werth ändert sich nicht, wenn man α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ miteinander vertauscht; es ist der angegebene Satz durch diese Formel also bewiesen.

Zusatz II. In einer mir nach Vollendung der Beobachtungen am Beryll zugegangenen Abhandlung von Hrn. H. Vater¹⁾ ist das Beobachtungsergebniss mitgetheilt, dass die Zuwachse der Biegungen beim Beryll mit wachsender Belastung sehr schnell abnehmen. Die aus einer Belastung mit circa 180 g und durch Zufügung von resp. circa 60 und noch 50 g erhaltenen Werthe sollten abnehmen wie 1000:774:688. Ich hatte bei meinen Beobachtungen nichts dergleichen bemerkt, um aber ganz sicher zu gehen, ersuchte ich Hrn. Dr. Hennig, ein Beryllstäbchen noch einmal bei einer Belastung von 30, 60 und 90 g zu beobachten; letztere Belastung, auf ein dünnes und schmales Stäbchen ausgeübt, dürfte eine noch grössere Spannung hervorgerufen haben, als Hr. Vater sie angewandt hat.

Die Resultate waren (Sicherheit 0,5 Theile):

1) H. Vater, Habilitationsschrift, abgedruckt in dem „Neuen Jahrbuch für Mineralogie“ 1886.

	für $P = 30$	60	90 g
1. Lage $\eta = 69,3$	139,5	210,0	
2. Lage $\eta = 69,9$	140,5	210,9	
Mittel $\eta = 69,6$	140,0	210,4	
$\eta_{80} = 69,6$	70,0	70,1.	

Sie zeigen nichts von dem, was Hr. Vater beobachtet hat, und es ist daher die Vermuthung gestattet, dass die Sprünge in seinen Präparaten, welche nach seiner Angabe bei mehreren mit der Zeit wachsende Biegungen und ein vorzeitiges Zerbrechen veranlasst haben, auch diese Anomalie hervorgerufen haben. Wenn diese sich nämlich zufällig in überwiegender Zahl auf der oberen Fläche des Präparates gefunden haben, so muss die Biegung bei kleinen Belastungen offenbar einen kleineren Widerstand gefunden haben als bei grösseren, da sich dann die Oeffnungen der Spalten beim Biegen allmählich schliessen. Bei dem von mir benutzten vorzüglichen Material dürften derartige Uebelstände nur selten stattgefunden haben.

Zusatz III. In der Figurentafel ist ein Theil der für Beryll und Bergkrystall erhaltenen Resultate anschaulich dargestellt.¹⁾

Fig. 1 gibt für Beryll durch die mit E bezeichnete Curve die Abhängigkeit des Dehnungs- oder Biegungscoefficienten von der Neigung gegen die Krystallaxe (Z). Die mit T_1 und T_2 bezeichneten Curven stellen die Aenderung des Drillungscoefficienten dar, wenn man entweder die grössere oder die kleinere Querdimension des Prismas senkrecht zur Krystallaxe belässt und die Längsrichtung in einem Hauptschnitte dreht. Nach dem in Zusatz I bewiesenen Satz gibt dann die Curve T_1 zugleich die Aenderung, welche der Drillungscoefficient erleidet, wenn man die Drehungsaxe senkrecht zur Krystallaxe wählt, aber die Lage der grösseren Querdimension durch Drehen des Prismas um' die Längsaxe ändert. Die zur Construction benutzten Zahlwerthe sind auf p. 490 und 491 enthalten.

Fig. 2 bezieht sich auf das elastische Verhalten des

1) Die dargestellten Curven sind nicht sehr genau ausgefallen.

des Bergkrystalls; wegen der hier viel complicirteren Verhältnisse musste die Darstellung noch unvollständiger ausfallen als für Beryll. Die Curven E_1 und E_2 geben den Verlauf der Dehnungscoëfficienten in der krystallographischen Symmetrieebene und dem dazu normalen Hauptschnitt (der YZ - und XZ -Ebene). In letzterem findet sich Symmetrie in Bezug auf die Krystallaxe, im ersteren nicht. Die Curven T_1 und T_2 geben das Verhalten des Drillungscoëfficienten an, wenn man die grössere oder kleinere Querdimension in eine Nebenaxe (X) legt und die Längsrichtung durch Drehung um dieselbe in der Symmetrieebene verschiebt. Die Curve T_1 gibt dann noch zugleich den Verlauf des Drillungscoëfficienten für ein mit der Längsrichtung in die X -Axe fallendes Prisma, wenn die grössere Querdimension alle möglichen Lagen annimmt; sie zeigt eine ganz unerwartet grosse Veränderlichkeit von T mit der Orientirung.

Die zur Construction benutzten Zahlen finden sich p. 718 und 719.

Die Figur für Beryll ist im doppelten Maasstab gezeichnet, wie die für Bergkrystall.

Da die Biegungen (oder Dehnungen) und Drillungen mit den Coëfficienten E und T proportional sind, so geben die mitgetheilten Curven auch direct Aufschluss über das Verhalten dieser Grössen.

XI. *Das Totalreflectometer; von C. Pulfrich.*

(III. Mittheilung.)

(Hierzu Taf. V Fig. 20.)

In zwei früheren Mittheilungen¹⁾ habe ich nachweisen können, dass ein Glascylinder, dessen Mantel und obere Grundfläche geschliffen sind, mit grossem Vortheile zur Bestimmung von Brechungsexponenten verwendet werden kann. Denn es hat sich herausgestellt, dass die Mantelfläche des Cylinders auf die Grenzstrahlen der Totalreflexion denselben

1) Pulfrich, Wied. Ann. 30. p. 193 u. 487. 1887.