VI. *Bestimmung der krummen Fläche der Lichtwellen in einem Mittel, dessen Elasticität verschieden ist nach den drei Hauptrichtungen, d. h. nach denjenigen, in welchen die von der Elasticität erregte Kraft in derselben Richtung wirkt, in der die Theilchen dieses Mittels verschoben wurden; von Hrn. Ampère.*

(*Ann. de chim. et de phys. T. XXXIX p. 113.*)

Wenn das Licht aus einem krystallisirten Mittel in ein anderes gleichfalls krystallisirtes übergeht, so theilt sich jeder der beiden einfallenden Strahlen, die im ersten Mittel einer gleichen Richtung folgen können, in zwei Strahlen, und wenn man die Richtung dieser letzteren bestimmen will, so muß man die krumme Fläche der Lichtwellen sowohl im ersten als in dem zweiten Mittel kennen. Für den besonderen Fall, wo der Strahl aus einem Mittel von gleicher Elasticität nach allen Richtungen übergeht in ein Mittel, von dessen drei Haupt-Elasticitäten zwei einander gleich sind, gelangt man leicht dahin mittelst der von Huyghens gegebenen Construction. Alsdann bildet die Lichtwelle im ersten Mittel eine Kugelfläche, und in dem zweiten besteht sie aus der Vereinigung einer Kugelfläche und der Fläche eines Umdrehungs-Ellipsoids. Wie bekannt hat Laplace bloß für den letzteren Fall bewiesen, daß diese Construction in dem Emissionssystem aus dem Satz von der kleinsten Wirkung erfolge; allein er wandte seine Rechnung nur auf ein Ellipsoid an, da er die Gleichung der erzeugenden Ellipse gebrauchte. Indefs habe ich in einer i. J. 1814 in der Academie vorgelesenen Note einen allgemeinen Beweis von derselben Construction, ange-

wandt auf alle krystallisirte Mittel, gegeben. Ich ging damals noch, nach der Emissionstheorie, von dem Principe der kleinsten Wirkung aus: allein man weiß, daß alle nach dieser Theorie auf dieses Princip gestützten Rechnungen sich unmittelbar in die Wellentheorie übersetzen lassen, wenn man den Ausdruck für die Geschwindigkeit umkehrt. Man kann daher jenen allgemeinen Beweis von der auf alle möglichen Media ausgedehnten Huyghens'schen Construction als hinreichend betrachten für die Bestimmung der Richtung der beiden gebrochenen Strahlen, die jedem der beiden einfallenden, einer gegebenen Richtung folgenden Strahlen entsprechen, sobald das Mittel, zu welchem das Licht hinaustritt, nicht drei gleiche Haupt-Elasticitäten besitzt. Um indeß von ihm Gebrauch zu machen, muß man die krumme Fläche der Lichtwellen kennen, sowohl für das Mittel, aus welchem sie treten, als für das, in welches sie treten. In Fresnel's bewundernswürdiger Abhandlung über die doppelte Strahlenbrechung *), worin dieser große Physiker auf von nun an unerschütterlichen Grundlagen die wahre Theorie des Lichts errichtet hat, beschäftigte sich derselbe auch mit Bestimmung der krummen Fläche der Lichtwellen für jedwedes Mittel, und gelangte dabei zu folgenden Resultaten.

Er bezeichnet durch a^2 , b^2 , c^2 drei den drei Haupt-Elasticitäten des Mittels proportionale Constanten, durch x , y , z die drei Coordinaten irgend eines Punkts der Wellenfläche, bezogen auf die zu Axen genommenen Richtungen dieser drei Haupt-Elasticitäten, durch m den Differentialcoefficienten von z , wenn man nur x variiren läßt, durch n den Differentialcoefficienten von z , wenn man nur y variiren läßt, und endlich durch ρ den Perpendikel, gefällt von dem Anfangspunkt auf den Punkt der Tangentialebene, dessen Coordinaten x , y , z sind, so daß:

*) S. *Annal.* Bd. XXIII S. 372 und S. 494.

$$\rho = \sqrt{1 + m^2 + n^2}.$$

Fresnel beweist dann (S. 516 seiner Abhandl. in Bd. XXIII der Ann.), dafs man zur Bestimmung von ρ die Gleichung habe:

$$(a^2 - \rho^2)(c^2 - \rho^2)n^2 + (b^2 - \rho^2)(c^2 - \rho^2)m^2 + (a^2 - \rho^2)(b^2 - \rho^2) = 0$$

und schliest daraus mit Recht, dafs wenn man den aus dieser Gleichung in Function von m und n gezogenen Werth von ρ^2 substituirt in der Gleichung:

$$(z - mx - ny)^2 = \rho^2(1 + m^2 + n^2)$$

und darin die Gröfsen m und n als Constante betrachtet, man die allen Tangentialebenen der Wellenfläche gemeinschaftliche Gleichung haben werde, und ferner, dafs wenn man m und n zwischen dieser Gleichung und ihren beiden partiellen Differentialcoefficienten (erhalten der eine durch blofse Variation von m , der andere durch blofse von n) eliminirt, daraus die Gleichung der Wellenfläche zwischen x, y, z entspringe.

In dem Glauben, dafs diese Elimination zu verwickelte Rechnungen erfordere, um ausgeführt werden zu können, bildete Fresnel eine andere Gleichung von den drei Gröfsen, zwischen denen x, y, z eliminirt werden sollten; allein er hat davon keinen Gebrauch mehr gemacht, um zu der gesuchten Gleichung in x, y, z zu gelangen. Er bestimmt diese in der Voraussetzung, dafs sie nur vom vierten Grade seyn könne, durch Berechnung der Gleichungen für die Durchschnitte der Wellenfläche mit den drei Coordinat-Ebenen, und dadurch, dafs er diejenige Gleichung vom vierten Grade nimmt, welche der Bedingung genügt, dafs die von ihr ausgedrückte Fläche durch diese Durchschnitte gebe.

Fresnel räumt ein, dieser Gang gebe keine Gewissheit, daß diese Gleichung die Wellenfläche sey, weil nichts beweise, daß die Gleichung dieser Fläche vom vierten Grade sey. Deshalb sagt er, habe er sich vergewissert, und zwar durch so lange und beschwerliche Rechnungen, daß er glaubte, sie nicht in seiner Abhandlung niederschreiben zu dürfen, daß, wenn man von der Gleichung des vierten Grades in x, y, z ausgehe, man auf die Combination der drei erwähnten Gleichungen zwischen x, y, z, m, n zurückkomme.

Wenn es die Gleichung, welche alle Tangential-Ebenen vorstellt, gewesen wäre, die er so verificirt hätte, so könnte man die Gleichung zwischen x, y, z als hinreichend a posteriori bewiesen ansehen; allein da es nur eine willkürliche Combination dieser Gleichung und ihrer beiden partiellen Differentialcoefficienten, genommen der eine in Bezug auf m und der andere in Bezug auf n , gewesen ist, so scheint mir dieser Beweis der Richtigkeit der für die Wellenfläche erhaltenen Gleichung durchaus unvollständig. Indefs ist diese Gleichung richtig und sogar ziemlich leicht direct zu erhalten. Dahin gelangte ich, indem ich die gemeinschaftliche Gleichung für die Tangential-Ebenen der Wellenfläche unter die für die Rechnung bequenste Form brachte, die beiden partiellen Differentialcoefficienten dieser Gleichung in Bezug auf m und n nahm, und dieselben durch p und q ersetzte, um solchergestalt den partiellen Differentialcoefficienten von z in Bezug auf alleinige Variation von x und den in Bezug auf alleinige Variation von y dem allgemeinen Gebrauche gemäß zu bezeichnen. Indem ich verschiedene Combinationen dieser drei Gleichungen versuchte, habe ich welche gefunden, durch die die Elimination, welche, wie Fresnel meinte, so lange Rechnungen erfordere, daß sie unmöglich auszuführen seyen, ziemlich leicht wird. Die zu diesem Zweck erforder-

lichen Rechnungen zeigen überdieß eine Symmetrie, mittelst deren man ihnen leicht folgen kann; zu letzt führen sie genau zu derselben Gleichung des vierten Grades in x, y, z , welche Fresnel für die krumme Fläche der Lichtwellen in Mitteln von drei ungleichen Haupt-Elasticitäten gegeben hat, so dafs die Richtigkeit dieser Gleichung keinem Zweifel mehr unterworfen ist.

Diefs ist der Gegenstand des zweiten Paragraphen dieser Abhandlung; im ersten habe ich die den Tangential-Ebenen gemeinschaftliche Gleichung durch ein Verfahren berechnet, welches mir einfacher oder wenigstens übersichtlicher als das von Fresnel zu seyn scheint; und in dem dritten habe ich ein Theorem zur Aufindung der Gleichung für die Wellenfläche bewiesen, welches dieser grofse Physiker gebrauchte, ohne es indess direct zu erweisen. Ich hatte mir vorgenommen, in einem vierten Paragraph den auf alle Arten von Mitteln verallgemeinerten Beweis der Huyghens'schen Construction wieder aufzunehmen, ihn zu vereinfachen und, der Wellentheorie gemäfs, die Betrachtung der Ebenen, nach welchen das Licht als polarisirt gedacht werden kann, aus einander zu setzen; doch blieb mir nicht Zeit genug übrig, diesen Paragraph abzufassen, und deshalb findet man ihn hier nicht.

I. Untersuchung über die allen Tangentialebenen der Wellenfläche gemeinschaftliche Gleichung.

Es sey 1) a die Geschwindigkeit entsprechend einer Verschiebung nach der Axe OA der x (Taf. II Fig. 20), die Elasticitätskraft nach dieser Axe wird seyn $\mu a^2 \sigma$ für eine Verschiebung $\equiv \sigma$, tragen wir a von O nach a' und von O nach a'' auf die beiden andern Axen auf; 2) b die Geschwindigkeit entsprechend einer Verschiebung nach der Axe OB der y , die Kraft nach dieser Axe wird seyn $\mu b^2 \sigma$ für eine Verschiebung $\equiv \sigma$, tragen wir b von O nach b' und von O nach b'' auf die

beiden andern Axen auf; 3) c die Geschwindigkeit entsprechend einer Verschiebung nach der Axe OC der z , die Kraft nach dieser Axe wird seyn $\mu c^2 \sigma$, für eine Verschiebung σ tragen wir c von O nach c und von O nach c' auf die beiden andern Axen auf.

Nach dem von Fresnel entdeckten Gesetz für die Fortpflanzung des Lichts gelangt eine in der Ebene BOC befindliche ebene Welle in der Zeiteinheit nach b , wenn ihre Oscillationen parallel OB sind, nach c , wenn dieselben parallel OC sind, und falls die Oscillationen eine intermediäre Richtung haben, theilt sich die ebene Welle in zwei andere, von denen in der Zeiteinheit die eine in b und die andere in c anlangt. Eben so sind a' und c' die Punkte, wo in der Zeiteinheit die in der Ebene AOC liegenden ebenen Wellen anlangen, sie mögen sich nun in zwei theilen oder nicht; endlich sind a'' und b'' die Punkte, welche die in der Ebene AOB befindlichen ebenen Wellen in derselben Zeit erreichen.

Die sechs Punkte b, c, a', c', a'', b'' liegen also sämmtlich auf der krummen Fläche der vom Punkt O ausgegangenen Welle, und diese Fläche berührt alle Lagen, welche irgend eine vom Punkt O ausgegangene ebene Welle nach Ablauf der Zeiteinheit einnimmt.

Betrachten wir eine solche Welle in einer auf OS senkrechten Ebene EOF ; die Geschwindigkeit nach OS wird erzeugt durch die Componente der Kraft, welche durch eine in der Ebene EOF nach der, z. B. in dieser Ebene liegenden Linie OE , gemachten Verschiebung σ hervorgebracht worden ist. Nennen wir α, β, γ die Winkel, welche OE mit den drei Axen bildet, so kann diese Verschiebung durch drei andere ersetzt werden, nämlich durch $\sigma \cos \alpha$ nach OA , $\sigma \cos \alpha$ nach OB ,

$\sigma \cos \gamma$ nach OC ; daraus entspringen in denselben Richtungen drei Kräfte gleich $\mu a^2 \sigma \cos \alpha$, $\mu b^2 \sigma \cos \beta$, $\mu c^2 \sigma \cos \gamma$, und deren Resultante ist:

$$R = \mu \sigma \sqrt{a^4 \cos^2 \alpha + b^4 \cos^2 \beta + c^4 \cos^2 \gamma}$$

und die Cosinus der drei Winkel ξ , η , ζ , welche die Richtung RO dieser Resultante mit den drei Axen macht, sind:

$$\cos \xi = \frac{\mu \sigma a^2 \cos \alpha}{R} = \frac{a^2 \cos \alpha}{r^2}$$

$$\cos \eta = \frac{\mu \sigma b^2 \cos \beta}{R} = \frac{b^2 \cos \beta}{r^2}$$

$$\cos \zeta = \frac{\mu \sigma c^2 \cos \gamma}{R} = \frac{c^2 \cos \gamma}{r^2},$$

wenn $\sqrt{a^4 \cos^2 \alpha + b^4 \cos^2 \beta + c^4 \cos^2 \gamma} = r^2$ gesetzt wird. Daraus folgt, daß wenn man ε den Winkel nennt, welchen die Richtung dieser Resultante mit der Geraden OE macht, man hat:

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha \cos \xi + \cos \beta \cos \eta + \cos \gamma \cos \zeta$$

oder:

$$\cos \varepsilon = \frac{\mu \sigma (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma)}{R}.$$

Die Resultante wird nun in zwei andere Kräfte zerlegt, in eine nach EO gleich $R \cos \varepsilon$ oder $\mu \sigma (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma)$, und die andere senkrecht auf EO und gleich $R \sin \varepsilon$. Wenn die Resultante in der Ebene ROE liegt, so wird die auf OE senkrechte Componente $R \sin \varepsilon$ auch

in dieser Ebene liegen, und folglich nach OS senkrecht gegen die ebene Welle gerichtet seyn; sie wird also nichts zur Fortpflanzung der Welle beitragen, zu einer Fortpflanzung, deren Geschwindigkeit blofs durch die Kraft $R \cos \varepsilon = \mu \sigma (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma)$ bewirkt wird, und ist:

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma},$$

weil die Kräfte $\mu \sigma a^2$, $\mu \sigma b^2$, $\mu \sigma c^2$ die Geschwindigkeiten a , b , c erzeugen.

Nimmt man in diesem Falle

$$OS = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}$$

und errichtet in S die Ebene SMT senkrecht auf OS und folglich parallel mit EOF , so hat man die Lage der ebenen Welle EOF nach Ablauf der Zeiteinheit. Die Ebene SMT wird also die Tangential-Ebene der gesuchten krummen Fläche seyn.

Ist M der Berührungspunkt und sind die Coordinaten dieses Punkts x , y , z , nennt man p und q die Differentialcoefficienten von z in Bezug auf x und y , ferner W den Perpendikel OS , gefällt vom Anfangspunkt O auf die Tangentialebene, einen Perpendikel, welcher von Fresnel in seiner Abhandlung durch den Buchstaben v bezeichnet wird, zum Werthe hat:

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

und mit den drei Axen die Winkel bildet, welche wir ξ , η , ζ nennen werden und deren Cosinus sind:

$$\frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

so hat man:

$$W^2 = \frac{(z - px - qy)^2}{1 + p^2 + q^2} = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

Nun muß bewiesen werden, daß man einer durch die gegebene Richtung OS gehenden Ebene EOS immer zwei Richtungen, und nicht mehr als zwei Richtungen geben kann, die so beschaffen sind, daß die durch die Verschiebung OE erzeugte Resultante in der Ebene EOS liegt.

Dazu müssen die drei Geraden OS , OE , OR deren Winkel mit den drei Axen respective zu Cosinus haben:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\frac{\cos \alpha}{a^2 \cos \alpha}, \quad \frac{\cos \beta}{b^2 \cos \beta}, \quad \frac{\cos \gamma}{c^2 \cos \gamma},$$

$$\frac{1}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2},$$

sämmtlich senkrecht seyn auf einer und derselben Geraden. — Bezeichnen wir nun mit λ , μ , ν die Winkel, welche diese Gerade mit den drei Axen bildet, so haben wir nach Lagrange's Theorem:

$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = (b^2 - c^2) \cos \beta \cos \gamma : (c^2 - a^2) \cos \alpha \cos \gamma : (a^2 - b^2) \cos \alpha \cos \beta$,
und da die Gerade, deren Winkel ξ , η , ζ sind, zugleich senkrecht ist auf dieser Geraden und auf der, deren Winkel α , β , γ sind, so hat man durch dasselbe Theorem:

$$\begin{aligned} \cos \xi : \cos \eta : \cos \zeta &:: [(c^2 - a^2) \cos^2 \gamma - (a^2 - b^2) \cos^2 \beta] \cos \alpha \\ &:: [(a^2 - b^2) \cos^2 \alpha - (b^2 - c^2) \cos^2 \gamma] \cos \beta \\ &:: [(b^2 - c^2) \cos^2 \beta - (c^2 - a^2) \cos^2 \alpha] \cos \gamma. \end{aligned}$$

Allein die beiden Gleichungen:

$$W^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

geben:

$$W^2 - a^2 = (c^2 - a^2) \cos^2 \gamma - (a^2 - b^2) \cos^2 \beta$$

$$W^2 - b^2 = (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha - (b^2 - c^2) \cos^2 \gamma$$

$$W^2 - c^2 = (b^2 - c^2) \cos^2 \beta - (c^2 - a^2) \cos^2 \alpha,$$

woraus folgt:

$$\cos \xi : \cos \eta : \cos \zeta :: (W^2 - a^2) \cos \alpha : (W^2 - b^2) \cos \beta : (W^2 - c^2) \cos \gamma,$$

und da man die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses durch dieselbe GröÙe dividiren kann, ohne seinen Werth zu ändern:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma :: \frac{\cos \xi}{W^2 - a^2} : \frac{\cos \eta}{W^2 - b^2} : \frac{\cos \zeta}{W^2 - c^2},$$

allein :

$$\cos \alpha \cos \xi + \cos \beta \cos \eta + \cos \gamma \cos \zeta = 0,$$

folglich:

$$\frac{\cos^2 \xi}{W^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \eta}{W^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \zeta}{W^2 - c^2} = 0,$$

das heißt:

$$(W^2 - b^2)(W^2 - c^2) \cos^2 \xi + (W^2 - a^2)(W^2 - c^2) \cos^2 \eta + (W^2 - a^2)(W^2 - b^2) \cos^2 \zeta = 0$$

oder:

$$W^4 - [(b^2 + c^2) \cos^2 \xi + (a^2 + c^2) \cos^2 \eta + (a^2 + b^2) \cos^2 \zeta] W^2 + b^2 c^2 \cos^2 \xi + a^2 c^2 \cos^2 \eta + a^2 b^2 \cos^2 \zeta = 0.$$

Diese Gleichung giebt zwei Werthe von W^2 , welchen die der Cosinus der Winkel α, β, γ zwischen der Oscillationsrichtung und den drei Axen entsprechen. Setzt man statt $\cos \xi, \cos \eta, \cos \zeta$ ihre Werthe in p und q , und macht zur Abkürzung;

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \xi}{(W^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 \eta}{(W^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 \zeta}{(W^2 - c^2)^2}} = D,$$

so werden die Werthe der drei gesuchten Cosinus:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \xi \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D(W^2 - a^2)} = -\frac{p}{D(W^2 - a^2)}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \eta \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D(W^2 - b^2)} = -\frac{q}{D(W^2 - b^2)}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos \zeta \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D(W^2 - c^2)} = -\frac{1}{D(W^2 - c^2)}.$$

Dieselben Substitutionen verändern die Gleichung für W in folgende:

$$(1 + p^2 + q^2) W^4 - [(b^2 + c^2) p^2 + (a^2 + c^2) q^2 + a^2 + b^2] W^2 + b^3 c^3 p^2 + a^3 c^3 q^2 + a^3 b^2 = 0,$$

allein:

$$W = \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

mit

mithin :

$$(z - px - qy)^4 - [a^2 + b^2 + (b^2 + c^2)p^2 + (a^2 + c^2)q^2](z - px - qy)^2 + (1 + p^2 + q^2)(a^2 b^2 + b^2 c^2 p^2 + a^2 c^2 q^2) = 0.$$

Um diese Gleichung leichter zu lösen, mache ich:

$$\begin{aligned} c^2 p^2 + a^2 q^2 + a^2 &= A \\ b^2 p^2 + c^2 q^2 + b^2 &= B, \\ (c^2 + b^2)p^2 + (a^2 + c^2)q^2 + a^2 + b^2 &= A + B \\ (p^2 + q^2 + 1)(b^2 c^2 p^2 + a^2 c^2 q + a^2 b^2) &= \frac{B - (c^2 - b^2)q^2}{b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Ab^2 + a^2(c^2 - b^2)q^2] &= AB + \frac{(c^2 - b^2)q^2}{b^2} [Ba^2 - Ab^2 - a^2(c^2 - b^2)q^2] \\ &= AB + \frac{(c^2 - b^2)q^2}{b^2} [b^2(a^2 - c^2)p^2 + a^2(c^2 - b^2)q^2 - a^2(c^2 - b^2)q^2] \\ &= AB + (c^2 - b^2)(a^2 - c^2)p^2 q^2, \\ \text{also: } (z - px - qy)^4 - (A + B)(z - px - qy)^2 &= -AB - (c^2 - b^2)(a^2 - c^2)p^2 q^2. \\ \text{Dies giebt (A):} \\ (z - px - qy)^2 &= \frac{1}{2} [A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 - 4(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)p^2 q^2}] \\ &= \frac{1}{2} \{ (c^2 + b^2)p^2 + (a^2 + c^2)q^2 + a^2 + b^2 \\ &\quad \pm \sqrt{[(c^2 - b^2)p^2 + (a^2 - c^2)q^2 + (a^2 - b^2)]^2 - 4(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)p^2 q^2} \}. \end{aligned}$$

Dies ist die gemeinschaftliche Gleichung für alle Tangentialen.

II. Aufsuchung der Gleichung für die Wellenfläche.

Es sey:

$$x = x' \sqrt{c^2 - b^2}; \quad y = y' \sqrt{a^2 - c^2}; \quad z = z' \sqrt{a^2 - b^2}$$

und p' und q' die Differentialcoefficienten von z' in Bezug auf x' und y' so wird man haben:

$$\begin{aligned} p dx' \sqrt{c^2 - b^2} + q dy' \sqrt{a^2 - c^2} &= p dx + q dy = dz = dz' \sqrt{a^2 - b^2} \\ &= p' dx' \sqrt{a^2 - b^2} + q' dy' \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

also:

$$p = \frac{p' \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}; \quad q = \frac{q' \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

also:

- 1) $z - px - qy = (z' - p'x' - q'y') \sqrt{a^2 - b^2}$
- 2) $(c^2 + b^2)p^2 + (a^2 + c^2)q^2 + a^2 + b^2 = (a^2 - b^2) \left\{ \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} p'^2 + \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} q'^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right\}$
- 3) $(c^2 - b^2)p^2 + (a^2 - c^2)q^2 + a^2 - b^2 = (a^2 - b^2)(p'^2 + q'^2 + 1)$
- 4) $(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)p^2 q^2 = (a^2 - b^2)p'^2 q'^2.$

Diese Werthe in der Gleichung $[A]$ substituirt, und dabei den gemeinschaftlichen Factor $a^2 - b^2$ fortgelassen, geben folgende Gleichung $[B]$:

$$(z' - px' - qy')^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} p'^2 + \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} q'^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \pm \sqrt{(p'^2 + q'^2 + 1)^2 - 4p'^2 q'^2} \right\} \\ = \frac{1}{2} \{ gp'^2 + hq'^2 + k \pm \sqrt{(p'^2 + q'^2 + 1)^2 - 4p'^2 q'^2} \},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = g; \quad \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = h; \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = k.$$

Zwischen diesen drei Constanten findet eine Beziehung statt, welche man folgendermaßen findet:

$$\frac{gh + 1}{g + h} = \frac{(a^2 + c^2)(c^2 + b^2) + (a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)(c^2 - b^2) + (a^2 + b^2)(a^2 - c^2)} \\ = \frac{c^4 + c^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2 - c^4 + c^2(a^2 + b^2) - a^2 b^2}{c^4 + c^2(a^2 - b^2) - a^2 b^2 - c^4 + c^2(a^2 - b^2) + a^2 b^2} \\ = \frac{2c^2(a^2 + b^2)}{2c^2(a^2 - b^2)} = k.$$

Dieselben Substitutionen müßte man in den beiden Gleichungen machen, welche man erhalten würde, wenn man abwechselnd bloß p und q variirte. Da indess p und q nur durch constante Coëfficienten von p' und q' verschieden sind, so erhält man dieselben Gleichungen leichter, wenn man bloß p' und q' in der Gleichung $[B]$ variiren läßt. Macht man dieselbe Rechnung, läßt die Accente der Kürze halber fort, mit Vorbehalt hernach

$$x, y, z \text{ durch } \sqrt{\frac{x}{c^2 - b^2}}, \sqrt{\frac{y}{a^2 - c^2}}, \sqrt{\frac{z}{a^2 - b^2}}$$

zu ersetzen, so hat man, wenn man der Kürze wegen $\sqrt{(1+p^2+q^2)^2-4p^2q^2}$ gleich $\sqrt{u}$ setzt:

$$x = -\frac{1}{2(z-px-qq)} \left\{ gp \pm \frac{2(p^2+q^2+1)p-4pq^2}{2\sqrt{u}} \right\}$$

oder:

$$x = -\frac{p}{2(z-px-qq)} \left\{ g \pm \frac{1+p^2-q^2}{\sqrt{u}} \right\}$$

und:

$$y = -\frac{1}{2(z-px-qq)} \left\{ hq \pm \frac{2(p^2+q^2+1)q-4p^2q}{2\sqrt{u}} \right\}$$

oder:

$$y = -\frac{q}{2(z-px-qq)} \left\{ h \pm \frac{1+q^2-p^2}{\sqrt{u}} \right\}$$

aus diesen Werthen zieht man:

$$px+qy = -\frac{1}{2(z-px-qq)} \left\{ gp^2 \pm \frac{(p^2+q^2+1)p^2-2p^2q^2}{\sqrt{u}} + hq^2 \pm \frac{(p^2+q^2+1)q^2-2p^2q^2}{\sqrt{u}} \right\}$$

das heißt:

$$px+qy = -\frac{1}{2(z-px-qq)} \left\{ gp^2+hq^2 \pm \frac{(p^2+q^2+1)(p^2+q^2)-4p^2q^2}{\sqrt{u}} \right\}$$

allein:

$$z - px - qy = \frac{1}{2(z - px - qy)} \left\{ gp^2 + hq^2 + k \pm \frac{(1 + p^2 + q^2)^2 - 4p^2q^2}{\sqrt{u}} \right\}$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorhergehenden, so kommt:

$$z = \frac{1}{2(z - px - qy)} \left\{ k \pm \frac{1 + p^2 + q^2}{\sqrt{u}} \right\}$$

Um p und q zu eliminiren, leitet man aus den für x, y, z gefundenen Werthen folgende ab:

$$\begin{aligned} \frac{x}{p} &= -\frac{1}{2(z - px - qy)} \left\{ g \pm \frac{1 + p^2 - q^2}{\sqrt{u}} \right\} \\ \frac{y}{q} &= -\frac{1}{2(z - px - qy)} \left\{ h \pm \frac{1 + q^2 - p^2}{\sqrt{u}} \right\} \\ z &= \frac{1}{2(z - px - qy)} \left\{ k \pm \frac{1 + p^2 + q^2}{\sqrt{u}} \right\}, \text{ und daraus:} \\ \frac{xy}{pq} &= \frac{1}{4(z - px - qy)^2} \left\{ gh \pm \frac{g + gq^2 - gp^2 + h + hp^2 - hq^2}{\sqrt{u}} + \frac{1 - p^4 - q^4 + 2p^2q^2}{\sqrt{u}} \right\} \\ \frac{xz}{pz} &= -\frac{1}{4(z - px - qy)^2} \left\{ gk \pm \frac{g + gp^2 + gq^2 + k + kp^2 - kq^2}{\sqrt{u}} + \frac{1 + 2p^2 + p^4 - q^4}{\sqrt{u}} \right\}, \\ \frac{yz}{qz} &= -\frac{1}{4(z - px - qy)^2} \left\{ hk \pm \frac{h + hp^2 + hq^2 + k + kq^2 - kp^2}{\sqrt{u}} + \frac{1 + 2q^2 + q^4 - p^4}{\sqrt{u}} \right\} \end{aligned}$$

Durch Addiren dieser drei Gleichungen hat man:

$$\begin{aligned}
\frac{xy}{pq} + \frac{xz}{p} + \frac{yz}{q} &= -\frac{1}{4(z-px-xy)^2} \left\{ k(g+h) - gh \pm \frac{2gp^2 + 2hq^2 + 2k}{\sqrt{u}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + 2p^2 + 2q^2 + p^4 + q^4 - 2p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^2 - 4p^2q^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{4(z-px-xy)^2} \left\{ k(g+h) - gh + 1 \pm \frac{2(gp^2 + hq^2 + k)}{\sqrt{u}} \right\} \\
&= -\frac{1}{2(z-px-xy)^2} \left\{ 1 \pm \frac{gp^2 + hq^2 + k}{\sqrt{u}} \right\}
\end{aligned}$$

weil $k(g+h) - gh = 1$.

Reducirt man auf gleichen Nenner und erinnert sich, daß

$$2(z-px-xy)^2 = gp^2 + hq^2 + k \pm \sqrt{u},$$

so findet man:

$$\frac{xy}{pq} + \frac{xz}{p} + \frac{yz}{q} = \mp \frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^2 - 4p^2q^2}}$$

Nun ist erstens:

$$\begin{aligned}
qx + py &= \frac{-pq}{2(z-px-xy)} \left\{ g + h \pm \frac{2}{\sqrt{u}} \right\} \\
&= -\frac{pq}{2(z-px-xy)} \left\{ g + h - 2 \left(\frac{xy}{pq} + \frac{xz}{p} + \frac{yz}{q} \right) \right\}
\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{(g+h)pq}{2(z-px-qy)} + \frac{xy+qxx+pyz}{z-px-qy} \\
 &\quad \frac{(g+h)pq}{2(z-px-qy)} = \frac{xy+qxx+pyz}{z+px-qy} - qx - py \\
 &\quad = \frac{xy+(px+qy)(qx+py)}{z-px-qy}
 \end{aligned}$$

was man so schreiben kann:

$$\frac{1}{2}(g+h)pq = (x^2+y^2)pq + xy(1+p^2+q^2),$$

woraus:

$$\frac{\frac{1}{2}(g+h) - x^2 - y^2}{xy} = \frac{1+p^2+q^2}{pq}.$$

Zweitens:

$$\begin{aligned}
 x+pz &= \frac{1}{2(z-px-qy)} \left\{ (k-g)p \pm \frac{2pq^2}{\sqrt{u}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2(z-px-qy)} [(k-g)p - 2q(xy+qxx+pyz)]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{(k-g)p}{2(z-px-qy)} &= \frac{qy(x+pz)+q^2xz}{z-px-qy} - x + pz \\
 &= \frac{(z-px)(x+pz)+q^2xz}{z-px-qy},
 \end{aligned}$$

man hat also:

$$\frac{1}{2}(k-h)p = xz(1-p^2+q^2)+p(z^2-x^2)$$

$$\frac{1}{2}(k-h)+x^2-z^2 = \frac{1+q^2-p^2}{xz}.$$

oder:

$$\text{Drittens: } y+qz = \frac{1}{2(z-px-qy)} \left\{ (k-h)g \pm \frac{2p^2q}{V'u} \right\}$$

$$= \frac{1}{2(z-px-qy)} [(k-h)q - 2p(xy+qzx+pyz)],$$

$$\text{und } \frac{(k-h)q}{2(z-px-qy)} = \frac{px(y+qz)+p^2yz}{z-px-qy} + y+qz$$

$$= \frac{(z-xy)(y+qz)p^2yz}{z-px-qy}$$

man hat also:

$$\frac{1}{2}(k-h)q = yz(1-q^2+p^2)+q(z^2-y^2)$$

$$\frac{1}{2}(k-h)+y^2-z^2 = \frac{1+p^2-q^2}{yz}.$$

oder:

Jetzt ist es leicht p und q zu eliminiren. Macht man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}(k-h)+y^2-z^2 = \frac{1+p^2-q^2}{yz} = T$$

$$\frac{1}{2}(k-h)+x^2-z^2 = \frac{1+q^2-p^2}{xz} = U$$

$$\frac{\frac{1}{2}(g+h)-x^2-y^2}{xy} = \frac{1+q^2+p^2}{pq} = V,$$

so hat man:

$$Tq + Up = 2; \quad Vp - T = 2q; \quad Vq - U = 2p,$$

woraus:

$$Vp - 2q = T; \quad Vq - 2p = U; \quad (V^2 - 4)p = TV + 2U; \quad (V^2 - 4)q = UV + 2T,$$

mithin:

$$(V^2 - 4)(Tq + Up) = 2TUV + 2T^2 + 2U^2,$$

und weil $Tq + Up = 2$, so ist:

$$T^2 + U^2 - V^2 + TUV + 4 = 0.$$

Da nun k kleiner ist als h und g , so muß man schreiben:

$$T = \frac{z^2 - y^2 + \frac{1}{2}(h-k)}{yz}; \quad U = \frac{z^2 - x^2 + \frac{1}{2}(g-k)}{xz}; \quad V = \frac{x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(g+h)}{xy}$$

hat also:

$$\frac{y^2 z^2}{[z^2 - y^2 + \frac{1}{2}(h-k)]^2} + \frac{[z^2 - x^2 + \frac{1}{2}(g-k)]^2}{x^2 z^2} - \frac{[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(g+h)]^2}{x^2 y^2} - \frac{[z^2 - y^2 + \frac{1}{2}(h-k)][z^2 - x^2 + \frac{1}{2}(g-k)]}{x^2 y^2 z^2} + 4 = 0$$

oder:

$$x^2 [z^2 - y^2 + \frac{1}{2}(h-k)]^2 + y^2 [z^2 - x^2 + \frac{1}{2}(g-k)]^2 - z^2 [x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(g+h)]^2 - [z^2 - y^2 + \frac{1}{2}(h-k)][z^2 - x^2 + \frac{1}{2}(g-k)][x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(g+h)] + 4x^2 y^2 z^2 = 0,$$

was man so schreiben kann:

$$\begin{aligned}
& x^2(z^2 - y^2)^2 + y^2(z^2 - x^2)^2 - z^2(x^2 + y^2)^2 - (z^2 - y^2)(z^2 - x^2)(x^2 + y^2) + 4x^2y^2z^2 \\
& + (h - k)x^2(z^2 - y^2) + (g - k)y^2(z^2 - x^2) + (g + k)z^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(h - k)^2x^2 \\
& + \frac{1}{4}(g - k)^2y^2 - \frac{1}{4}(g + h)^2z^2 - \frac{1}{2}(h - k)(z^2 - x^2)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(g - k)(z^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\
& + \frac{1}{2}(g + h)(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) - \frac{1}{4}(h - k)(g - k)(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(h - k)(g + h)(z^2 - x^2) \\
& + \frac{1}{4}(g - k)(g + h)(z^2 - y^2) + \frac{1}{8}(h - k)(g - k)(g + h) = 0.
\end{aligned}$$

Die Glieder vom sechsten Grade heben einander auf, denn sie geben:

$$\begin{aligned}
& x^2z^4 - 2x^2y^2z^2 + x^2y^4 - 2x^2y^2z^2 + x^4y^2 - x^4z^2 - 2x^2y^2z^2 - y^4z^2 - x^2z^4 \\
& - y^2z^4 + x^4z^2 + 2x^2y^2z^2 + y^4z^2 - x^4y^2 - x^2y^4 + 4x^2y^2z^2 = 0,
\end{aligned}$$

es bleiben also:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(-k)(2x^2z^2 - 2x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + x^4 + x^2y^2) + \frac{1}{4}(g - k)(2y^2z^2 - 2x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + x^2y + y^4) \\
& + \frac{1}{2}(g + h)(2x^2z^2 + 2y^2z^2 + z^4 - x^2z^2 - y^2z^2 + x^2y^2) + \frac{1}{4}(h - k)[h - k - g + k - g - h]x^2 \\
& + \frac{1}{4}(g - k)(g - k - h + k - g - h)[y^2 - \frac{1}{4}(g + h)[g + h - h + k - g + k]z^2 + \frac{1}{8}(h - k)(g - k)(g + h)] = 0
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(h - k)(x^2z^2 - x^2y^2 - y^2z^2 + x^4) + \frac{1}{4}(g - k)(y^2z^2 - x^2z^2 - x^2y^2 + y^4) \\
& + \frac{1}{4}(g + h)(x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + z^4) - \frac{1}{2}(h - k)g x^2 - \frac{1}{2}(g - k)h y^2 - \frac{1}{2}(g + h)k z^2 \\
& + \frac{1}{8}(h - k)(g - k)(g + h) = 0,
\end{aligned}$$

das heisst:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(h - k)x^4 + \frac{1}{2}(g - k)y^4 + \frac{1}{2}(g + h)z^4 + \frac{1}{2}(g + h + g - k - h + k)y^2z^2 \\
& + \frac{1}{2}(g + h - g + k + h - k)x^2z^2 + \frac{1}{2}(g + h - g + k)x^2y^2 - \frac{1}{2}(h - k)g x^2 \\
& - \frac{1}{2}(g - k)h y^2 - \frac{1}{2}(g + h)k z^2 + \frac{1}{8}(h - k)(g - k)(g + h) = 0,
\end{aligned}$$

was sich reducirt auf:

$$\frac{1}{2}(h-k)x^4 + \frac{1}{2}(g-k)y^4 + \frac{1}{2}(g+h)z^4 + gy^3z^2 + hx^3z^2 + kx^2y^2 - \frac{1}{2}(h-k)gx^2 - \frac{1}{2}(g-k)hy^2 - \frac{1}{2}(g+h)kz^2 + \frac{1}{8}(h-k)(g-k)(g+h) = 0.$$

Weil aber:

$$g = \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}, \quad h = \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}, \quad k = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

so ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h-k) &= \frac{a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 - a^4 + a^2c^2 - a^2b^2 + b^2c^2}{2(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \\ \frac{1}{2}(g-k) &= \frac{a^2c^2 + a^2b^2 - b^2c^2 - b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + a^2b^2 + b^4}{2(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \\ \frac{1}{2}(g+h) &= \frac{a^2c^2 + a^2b^2 - c^4 - b^2c^2 + a^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2}{2(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in der obigen Gleichung, ersetzt dabei x^2 durch $\frac{x^2}{c^2 - b^2}$, y^2

durch $\frac{y^2}{a^2 - c^2}$, z^2 durch $\frac{z^2}{a^2 - b^2}$, und multiplicirt durch $(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)$ so kommt:

$$\begin{aligned} a^2x^4 + b^2y^4 + c^2z^4 + (c^2 + b^2)y^2z^2 + (a^2 + c^2)x^2z^2 + (a^2 + b^2)x^2y^2 \\ - a^2(c^2 + b^2)x^2 - b^2(a^2 + c^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0, \end{aligned}$$

das heißt:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2(c^2 + b^2)x^3 - b^2(a^2 + c^2)y^3 - c^2(a^2 + b^2)z^3 + a^2 b^2 c^2 = 0,$$

was genau die von Fresnel gegebene Gleichung ist.

III. Beweis eines von Fresnel gegebenen Satzes, dessen sich derselbe bedient, um die Geschwindigkeit des Lichts in Richtung der Fahrstriche der Wellenfläche zu bestimmen.

Eins der merkwürdigsten Resultate in der Abhandlung Fresnel's ist eine Art geometrischer Construction, durch welche er die Bestimmung der Wellenfläche unabhängig macht von der Betrachtung der Tangentialebenen, indem er die Länge der zwei zu den beiden Stücken der Fläche gehörigen Fahrstriche, welche in gleichem Sinne nach gleicher Geraden gerichtet sind, bloß von der Lage dieser Geraden abhängen läßt. Es ist dieß in der That die directeste Art, die Wellenfläche zu bestimmen und eine klare Idee von deren Form zu geben, und da die Längen dieser Fahrstriche, wie es Fresnel beweist, wirklich die Geschwindigkeiten des Lichts in Richtung dessen, was man Strahl nennt, vorstellt, so sind es diese Längen, auf welche sich der Beweis der Huyghens'schen Construction, angewandt auf alle zu Anfange dieser Abhandlung erwähnten Mittel, bezieht.

Ich halte es nicht für unnütz, diese Construction in Gestalt eines Theorems zu geben, bei dem man nicht die verschiedenen Elasticitäten des Mittels betrachtet, sondern bloß die Geschwindigkeit der Strahlen in Richtung verschiedener Geraden, welche durch den als Ursprungsort des Lichts angenommenen Punkt gezogen sind. Um dieß Theorem in die Emissionstheorie zu übersetzen reicht es hin den Ausdruck: Längen proportional den Lichtgeschwindigkeiten nach diesen Geraden, zu ersetzen durch den: Längen umgekehrt proportional den Lichtgeschwindigkeiten nach denselben Gera-

den; allein alsdann muß man damit anfangen, die Definition von den drei Richtungen, welche ich bisher mit dem Namen *Richtungen der drei Haupt-Elasticitäten* bezeichnet habe, und welche Fresnel gewöhnlich *Axen der Elasticitätsfläche* nennt, unabhängig zu machen von der Betrachtung der Elasticitäten. Zu dem Ende werde ich an einige Thatsachen erinnern, welche man als die Ergebnisse der Versuche, besonders der von Fresnel über den Topas, ansehen kann. Wie bekannt besitzt der Kalkspath eine einzige Axe, und diese, rings um welche alle Lichterscheinungen nach allen Richtungen gleich sind, zeigt folgende zwei Eigenschaften: 1) daß der Strahl, welcher in ihrer Richtung geht, immer die nämliche Geschwindigkeit hat, wie auch seine Polarisationsebene liege; 2) daß das Licht keine Aenderung in seiner Richtung erfährt, wenn dasselbe durch eine auf dieser Axe senkrechte Fläche und in einer auf dieser Fläche senkrechten Richtung, also in paralleler Richtung mit der Axe, zu dem Krystall ein- oder austritt. Man weiß ferner, daß jede auf dieser Axe senkrechte Gerade nur die letzte dieser beiden Eigenschaften darbietet, daß vielmehr der Strahl, welcher eine solche Gerade durchläuft, wirklich aus zwei nach bestimmten Richtungen rechtwinklig gegen einander polarisirten Strahlen besteht, deren Geschwindigkeiten verschieden sind, weil der Strahl, wenn er eine solche Gerade durchlaufen hat und dann durch eine gegen dieselbe geneigte Fläche austritt, in zwei andere Strahlen zerfällt. In den Krystallen, wo die Gesetze der Doppelbrechung verwirklicht sind, und welche man gewöhnlich mit dem Namen *Krystalle mit zwei optischen Axen* bezeichnet, sind diese beiden Eigenschaften niemals in einer und derselben Axe vereinigt, sondern sie zeigen sich einzeln bei den beiden sehr von einander verschiedenen Arten von Axen.

Die erstere Eigenschaft, die, daß jeder einer Axe der ersteren Art parallel laufende Strahl nur

eine einzige Geschwindigkeit annimmt, findet sich blofs in zwei Richtungen, welche einen veränderlichen Winkel mit einander bilden. Diese beiden Richtungen nennt man *optische Axen des Krystalls* und diesen Namen werde ich auch beibehalten. Die einzige Geschwindigkeit des Lichts in jeder der optischen Axen ist gleich für beide. Die Betrachtung dieser Gröfse ist sehr wichtig; ich werde sie *mittlere Geschwindigkeit* nennen und mit c bezeichnen. Die zweite Eigenschaft fehlt diesen Axen; denn das Licht, welches senkrecht durch eine auf diesen Axen senkrechte Fläche, also parallel diesen Axen, zu dem Krystall hinein- oder hinaustritt, theilt sich beständig in zwei gegen einander rechtwinklig polarisirte Strahlen *). Man kann aus der Abhandlung von Fresnel ersehen, welche Ursache die Theilung eines Strahles hat, der einfach zu seyn scheint, weil die beiden Strahlen, aus denen er in Wirklichkeit zusammengesetzt ist, eine gleiche Geschwindigkeit haben, und nur darin von einander abweichen, dafs sie nach zwei verschiedenen Ebenen polarisirt sind; allein jene zweite Eigenschaft, welche der Kalkspath sowohl in seiner Axe als in jeder auf dieser Axe senkrechten Geraden zeigt, findet sich bei den Krystallen mit zwei optischen Axen in drei unter sich senkrechten Richtungen, welche Fresnel Axen der Elasticitätsfläche nennt, und welche ich, um möglichst alle nur in der Undulationstheorie Sinn habende Benennungen zu vermeiden, Krystallisationsaxen nennen werde. Durch Flächen, die auf diesen Axen senkrecht stehen, und in Richtungen, die diesen Axen parallel sind, tritt das Licht zu dem Krystall hinein und hinaus, ohne irgend eine Aenderung in seiner Richtung zu erleiden; allein es hat nach jeder dieser Axen zwei verschiedene Geschwin-

*) Richtiger in eine unendliche Anzahl von Strahlen, wie neuerlich die III. Hamilton und Lloyd gezeigt haben.
Siche diese Annal. Bd. XXVIII S. 91 und 104.
P.

digkeiten, denn es theilt sich in zwei unter sich rechtwinklig polarisirte und verschiedene Richtungen einschlagende Strahlen, sobald es, nachdem es eine dieser Axen durchlaufen hat, durch eine schief gegen dieselbe liegende Fläche hinaustritt.

Längs einer der drei Axen sind die beiden Geschwindigkeiten, deren das dieselbe durchlaufende Licht fähig ist, am größten und am kleinsten unter allen Geschwindigkeiten, welche das Licht in den Krystall annehmen kann. Diese Axe werde ich *Haupt-Krystallisationsaxe* nennen, und mit *a* die *größte* und mit *b* die *kleinste* Geschwindigkeit längs dieser Axe bezeichnen. Die Richtung dieser Axe ist senkrecht auf der Ebene der beiden optischen Axen.

Die beiden andern Krystallisationsaxen liegen in der letzteren Ebene, und halbiren die vier Winkel, welche von den beiden Richtungen der optischen Axen gebildet werden.

Die beiden Geschwindigkeiten, mit welchen das Licht diese beiden Krystallisationsaxen zu durchlaufen vermag, sind für eine derselben: die *größte Geschwindigkeit a* und die *mittlere Geschwindigkeit c*, und für die andere: die *kleinste Geschwindigkeit b* und die *mittlere Geschwindigkeit c*. Diese Präliminarien gesetzt, läßt sich das Theorem, dessen ich zu Anfange dieses Abschnitts erwähnte, folgendermaßen angeben:

Trägt man auf jede der drei Krystallisationsaxen, und zwar vom Punkte *O*, von dem das Licht ausgeht, nach beiden Seiten hin zwei Längen, proportional der der drei Geschwindigkeiten *a*, *b*, *c*, deren das Licht längs dieser Axe nicht fähig ist, d. h. (wenn man diese Längen mit denselben Buchstaben bezeichnet wie die Geschwindigkeiten, denen sie proportional sind) zwei Längen *OC*, *OC'* gleich *c* auf die mittlere Axe, längs welcher das Licht die beiden Geschwindigkeiten *a* und *b* haben kann,

zwei Längen OB , OB' gleich b auf die Axe, längs der die beiden Geschwindigkeiten a und c stattfinden, und zwei Längen OA , OA' gleich a auf die Axe, längs welcher das Licht die beiden Geschwindigkeiten b und c annimmt; so kann man über die so bestimmten drei Geraden $AA'=2a$, $BB'=2b$, $CC'=2c$, welche sich sämmtlich in ihrer Mitte im Punkte O schneiden, ein Ellipsoid construiren, von dem sie die drei Axen sind. Um dann die beiden Geschwindigkeiten zu haben, deren das Licht längs irgend einer durch den Punkt O gehenden Geraden fähig ist, muß man durch diesen Punkt, senkrecht gegen die Gerade, eine Ebene legen; der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Ellipsoid ist eine Ellipse, und die beiden Axen dieser repräsentiren die beiden Geschwindigkeiten des Lichts längs dem Strahl, d. h. stehen zu diesen Geschwindigkeiten in demselben Verhältniß wie die Längen der Axen a , b , c des Ellipsoïds zu den Geschwindigkeiten, welche zu je zwei längs jeder dieser Axen stattfinden, und welche wir mit demselben Buchstaben bezeichnet haben.

Man sieht, daß, wenn dieß Theorem als bewiesen angenommen wird, man, um die Wellenfläche zu construiren, nur auf die Richtung eines jeden Strahls, von O ab nach beiden Seiten hin, die Längen der beiden Axen des Schnittes, welcher in dem Ellipsoid durch die durch den Punkt O , senkrecht gegen die Richtung dieses Strahls, gelegte Ebene gemacht wird, aufzutragen braucht. Es scheint nicht als habe Fresnel je daran gedacht, dieß Theorem, auf welchem die erwähnte Construction beruht, vollständig zu erweisen. Er sagt in seiner Abhandlung (Annal. Bd. XXIII S. 519), daß er, nachdem er die Gleichung für die Wellenfläche durch Bestimmung der Durchschnitte dieser Fläche mit den Coordinat-Ebenen aufgefunden, bemerkt habe, daß die aus dieser Construction hervorgehende Fläche dieselben Eigenschaften besitze, und dieß führte ihn dahin, durch eine sehr einfache

Rech

Rechnung, die er auf der folgenden Seite giebt, genau dieselbe Gleichung daraus abzuleiten, welche ihm die Betrachtung der Durchschnitte geliefert hatte; und da er sich überzeugte, wie man vorhin gesehen, daß diese Gleichung einer der Combinationen der drei Gleichungen zwischen x, y, z, p, q , welche die Gleichung für die Wellenfläche enthielten, Genüge leistete, so schloß er daraus, daß die von dieser Construction gegebenen Werthe für die Geschwindigkeiten richtig seyen.

Abgesehen davon, daß dieser Gang ganz indirect ist, kann er nur schlussrichtig seyn, wenn man die Richtigkeit der Gleichung für die Wellenfläche voraussetzt, und wie wir gesehen, dürfte diese nicht als vollständig erwiesen gehalten werden. Gegenwärtig, da sie durch die Rechnungen in den beiden ersten Abschnitten dieser Abhandlung erwiesen ist, hat es keine Schwierigkeit, daraus das Theorem und die aus denselben folgende Construction direct zu erweisen.

Nennen wir zunächst W die Geschwindigkeit längs dem Fahrstrich, gezogen vom Punkte O zu dem Punkt der Wellenfläche, dessen Coordinaten x, y, z sind; diese Geschwindigkeit wird durch die Länge dieses Fahrstrichs vorgestellt, und bezeichnet man durch λ, μ, ν die Winkel der Richtung desselben mit den Krystallisationsachsen, so hat man:

$$x = W \cos \lambda, \quad y = W \cos \mu, \quad z = W \cos \nu.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung für die Wellenfläche zwischen x, y, z , so findet man: $(a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \mu + c^2 \cos^2 \nu) W^4 - [(b^2 + c^2) a^2 \cos^2 \lambda + (a^2 + c^2) b^2 \cos^2 \mu + (a^2 + b^2) c^2 \cos^2 \nu] W^2 + a^2 b^2 c^2 = 0$, was man, wie auch Fresnel bemerkt, als Polargleichung der Wellenfläche betrachten kann.

Nennen wir t, u, v die Coordinaten irgend eines Punktes in dem in der Ellipsoidfläche gemachten Schnitt, dessen Gleichung ist:

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1,$$

woraus:

$$c^2 = \frac{c^2 t^2}{a^2} + \frac{c^2 u^2}{b^2} + v^2.$$

Vermöge der Ebene, welche auf der Geraden W , die mit den drei Axen die Winkel λ, μ, ν bildet, senkrecht ist, und zur Gleichung hat:

$$t \cos \lambda + u \cos \mu + v \cos \nu = 0$$

besitzt man zwischen t, u, v die eben genannten beiden Gleichungen, und bezeichnet man nun den Halbmesser des elliptischen Schnitts, d. h. den Abstand des Mittelpunkts O des Ellipsoids von dem Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, mit r , so hat man auch:

$$r^2 = t^2 + u^2 + v^2,$$

was giebt:

$$r^2 - c^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} t^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} u^2.$$

Soll der Halbmesser r einer der halben Axen jenes Schnitts seyn, muß sein Werth ein *Maximum* oder ein *Minimum* werden, dieß giebt:

$$b^2(a^2 - c^2) dt = -a^2(b^2 - c^2) u du$$

und:

$$t dt + u du + v dv = 0;$$

allein:

$$d\nu = -\frac{\cos \lambda}{\cos \nu} dt - \frac{\cos \mu}{\cos \nu} du,$$

mithin:

$$(t \cos \nu - \nu \cos \lambda) dt = -(u \cos \nu - \nu \cos \mu) du;$$

man hat also:

$$\frac{\cos \nu - \frac{\nu}{t} \cos \lambda}{b^2(a^2 - c^2)} = \frac{\cos \nu - \frac{\nu}{u} \cos \mu}{a^2(b^2 - c^2)}.$$

Multipliziert man diese beiden Brüche oben und unten, den ersten mit t^2 und den zweiten mit u^2 , addirt darauf ihre beiden Zähler und ihre beiden Nenner, so hat man einen neuen Bruch gleich den beiden vorhergehenden, welcher ist:

$$\frac{t^2 \cos \nu + u^2 \cos \nu - \nu(t \cos \lambda + u \cos \mu)}{b^2(a^2 - c^2)t^2 + a^2(b^2 - c^2)u^2} = \frac{r^2 \cos \nu}{a^2 b^2(r^2 - c^2)},$$

woraus folgt:

$$\cos \nu - \frac{\nu}{t} \cos \lambda = \frac{(a^2 - c^2)r^2 \cos \nu}{a^2(r^2 - c^2)}$$

und:

$$\cos \nu - \frac{\nu}{u} \cos \mu = \frac{(b^2 - c^2)r^2 \cos \nu}{b^2(r^2 - c^2)};$$

daraus:

$$\begin{aligned}\frac{v}{t} &= \frac{\cos \lambda}{\cos \nu} - \frac{(a^2 - c^2)r^2 \cos \nu}{a^2(r^2 - c^2) \cos \lambda} = \frac{c^2(r^2 - a^2) \cos \nu}{a^2(r^2 - c^2) \cos \lambda} = \frac{c^2 \cos \nu}{r^2 - a^2} \\ \frac{v}{u} &= \frac{\cos \nu}{\cos \mu} - \frac{(b^2 - c^2)r^2 \cos \nu}{b^2(r^2 - c^2) \cos \mu} = \frac{c^2(r^2 - b^2) \cos \nu}{b^2(r^2 - c^2) \cos \mu} = \frac{c^2 \cos \nu}{r^2 - b^2} \\ \frac{u}{t} &= \frac{b^2(r^2 - a^2) \cos \mu}{a^2(r^2 - b^2) \cos \lambda} = \frac{b^3 \cos \mu}{r^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 \cos \lambda}{r^2 - a^2}\end{aligned}$$

und folglich:

$$t : u : v :: \frac{a^2 \cos \lambda}{r^2 - a^2} : \frac{b^2 \cos \mu}{r^2 - b^2} : \frac{c^2 \cos \nu}{r^2 - c^2}.$$

Diese drei Gröfsen verhalten sich also zu einander wie die Cosinus der Winkel α , β , γ , welche die Halbaxe r mit den Axen des Ellipsoids machen, und daraus folgt, dafs diese Halbaxe die Richtung der Kraft ist, welche erfolgt aus einer Verschiebung in der Richtung, deren Cosinus sind:

$$\frac{\cos \lambda}{r^2 - a^2}, \frac{\cos \mu}{r^2 - b^2}, \frac{\cos \nu}{r^2 - c^2}.$$

Erinnern wir uns nun, daß die Halbaxe des elliptischen Schnitts, deren Länge wir mit r bezeichnen haben, senkrecht ist auf der Geraden, welche mit denselben Axen die Winkel λ , μ , ν bildet, und daß uns diefs die Gleichung

$$t \cos \lambda + u \cos \mu + v \cos \nu = 0$$

geliefert hat, so finden wir für die Gleichung, welche r bestimmt:

$$\frac{a^2 \cos^2 \lambda}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2 \mu}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2 \nu}{r^2 - c^2} = 0$$

oder:

$$(r^2 - b^2)(r^2 - c^2)a^2 \cos^2 \lambda + (r^2 - a^2)r^2 - c^2)b^2 \cos^2 \mu + (r^2 - a^2)(r^2 - b^2)c^2 \cos^2 \nu = 0,$$

das heißt:

$$(a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \mu + c^2 \cos^2 \nu)r^4 - [(b^2 + c^2)a^2 \cos^2 \lambda + (a^2 + c^2)b^2 \cos^2 \mu + (a^2 + b^2)c^2 \cos^2 \nu]r^2 + a^2 b^2 c^2 = 0,$$

weil $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$.

Da diese Gleichung des vierten Grades in r identisch ist mit der vorhin gefundenen Gleichung desselben Grades in W , so folgt, daß die vier Werthe von r , die zu zwei einander gleich und im Zeichen entgegengesetzt sind, denen von W für die nämlichen Werthe von λ , μ , ν , d. h. für denselben Strahl gleich sind. Diefs ist aber gerade das Theorem, welches bewiesen werden sollte. Weil das Ellipsoid, welches die beiden Geschwindigkeiten des Lichts längs einem Strahle mittelst der

beiden Axen des von einer auf diesem Strahl senkrechten Ebene gemachten Diametralschnitts liefert, zur Gleichung hat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so sind seine Durchschnitte mit den Coordinat-Ebenen Ellipsen, was man findet, wenn man in dieser Gleichung nach einander $x=0$, $y=0$, $z=0$ macht; dieß giebt für die Gleichungen dieser Ellipsen:

$$\begin{array}{l} \text{in der Ebene der } yz \dots c^2 y^2 + b^2 z - b^2 c^2 = 0 \\ - \quad - \quad - \quad xz \dots c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2 = 0 \\ - \quad - \quad - \quad xy \dots b^2 x^3 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0. \end{array}$$

Macht man eben so in der Gleichung für die Wellenfläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^3 + b^2 y^2 + c^2 z^3) - (b^2 + c^2) a^2 x^3 - (a^2 + c^2) b^2 y^2 - (a^2 + b^2) c^2 z^3 + a^2 b^2 c^2 = 0$$

successiv $x=0$, $y=0$, $z=0$, so findet man, daß diese Fläche die Coordinat-Ebenen in einem Kreise und einer Ellipse schneidet, deren Gleichungen sind:

$$\text{für die Ebene der } yz \dots \left\{ \begin{array}{l} y^2 + z^2 - a^2 = 0 \\ b^2 y^2 + c^2 z^2 - b^2 c^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{für die Ebene der } xz \dots \left\{ \begin{array}{l} x^2 + z^2 - b^2 = 0 \\ a^2 x^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{für die Ebene der } xy \dots \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - c^2 = 0 \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \end{array} \right.$$

woraus folgt für jede dieser Ebenen 1) daß der elliptische Schnitt in der Wellenfläche und der in dem Ellipsoid eine und dieselbe Ellipse sind, aber so umgewandt, daß die große Axe des einen Schnitts auf der kleinen Axe des andern liegt, und umgekehrt; 2) daß der Kreisschnitt die Hälfte derjenigen Axe des Ellipsoïds, welche senkrecht auf der Ebene dieses Kreisschnitts ist, zum Radius hat. Man sieht, daß wenn man die drei Axen des Ellipsoïds successiv als Diameter nimmt und über sie drei Kugelflächen beschreibt, welche die Ellipsoidfläche an ihren Scheiteln berühren, die drei Kreisschnitte der Wellenfläche mit den drei Coordinat-Ebenen sich unter denen der drei Kugelflächen befinden; daß die Wellenfläche jede dieser Flächen in einem ihrer größten Kreise berührt, und daß es die Kugelfläche vom mittleren Durchmesser ist, auf welcher die Vielfachspunkte der Wellenfläche liegen, worin sich die beiden Stücke dieser Fläche vereinigen, so daß das äußere Stück der Fläche zwischen der größten und der mittleren Kugelfläche liegt, und das innere Stück zwischen der mittleren und kleinsten Kugelfläche.

VII. *Die vom 1 Januar 1827 bis 1. Mai 1833 beobachteten ausgezeichnet tiefen und hohen Barometerstände zu Braunsberg in Ostpreußen; vom Prof. L. Feldt.*

Ich habe seit dem Jahre 1827 neben meinen vier Mal des Tages regelmäfsig, mit nur wenigen Unterbrechungen angestellten Barometerbeobachtungen auch noch an denjenigen Tagen, an welchen sich das Barometer stark über die Mittelhöhe erhob oder unter dieselbe sank, die Beobachtungen größtentheils stündlich aufgezeichnet. Bei diesen letzteren Aufzeichnungen wollte ich den Grenzen des