16.

Transformation de quelques intégrales définies.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

Parmi les différentes formules propres à la transformation des intégrales définies, il n'y en a que très peu qui soient facilement applicables aux intégrales contenant des fonctions algébriques et des fonctions trigonométriques, et dont les limites de l'intégration sont zéro et l'infini. Je vais présenter ici des développements qui auront peut-être quelque intérêt parcequ'ils sont fondés sur une méthode peu exploitée encore; savoir sur la décomposition de l'intervalle de l'intégration. Les formules dont il s'agit sont:

$$\int_0^\infty \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) = \int_0^1 \frac{p dz}{p^2 + z^2} \Phi(\sqrt{1-z^2}) \Psi(z^2),$$

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{r^2 + x^2} \Phi(\sin x) \Psi(\cos^2 x) = \int_0^1 \frac{q dz}{q^2 - z^2} \Phi(\sqrt{1-z^2}) \Psi(z^2),$$

$$p = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}), \quad q = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}),$$

où Φ désigne une fonction qui à la propriété $\Phi(-u) = -\Phi(u)$, et Ψ une fonction arbitraire.

Comme toute intégrale de la forme

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

n'est que la limite vers laquelle converge l'intégrale

$$\int_0^w f(x) dx = F(w),$$

en faisant croître infiniment la quantité arbitraire w , on peut considérer l'intégrale

$$1. \quad S = \int_0^\infty \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x)$$

comme la limite de

$$2. \quad S' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi s + \varrho} \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x)$$

pour des valeurs croissantes du nombre entier s , tandis que ϱ est toujours entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Décomposons maintenant l'intégrale S' comme suit:

$$3. \quad S' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi s} \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) + \int_{\frac{1}{2}\pi s}^{\frac{1}{2}\pi s + \varrho} \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x),$$

et examinons séparément les deux parties.

La première intégrale, que nous désignerons simplement par

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi s} X dx, \quad \left\{ X = \frac{r}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) \right\},$$

peut être décomposée en d'autres intégrales, toutes du même intervalle d'intégration. En effet, on pourra la présenter par la suite des termes :

$$4. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} X dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} X dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} X dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} X dx + \dots \\ \dots + \int_{(s-2)\frac{1}{2}\pi}^{(s-1)\frac{1}{2}\pi} X dx + \int_{(s-1)\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi s} X dx.$$

Deux termes consécutives de cette série se présentent sous les formes :

$$\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{n\pi} X dx, \quad \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} X dx,$$

et ils sont susceptibles de deux transformations aussi simples que fécondes. En faisant $x = n\pi - y$ dans la première intégrale, elle se change en

$$(-1)^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r dy}{r^2 + (n\pi - y)^2} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y);$$

comme on le trouvera facilement si l'on a égard à la propriété $\Phi(-u) = -\Phi(u)$. Dans la seconde intégrale nous faisons $x = n\pi + y$, et elle devient alors

$$(-1)^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r dy}{r^2 + (n\pi + y)^2} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y).$$

En transformant de cette manière toutes les intégrales (4.), on obtiendra l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi s} \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) \\ = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r dy}{r^2 + y^2} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y) - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r dy}{r^2 + (\pi - y)^2} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y) \\ - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r dy}{r^2 + (\pi + y)^2} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r dy}{r^2 + (2\pi - y)^2} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y) \\ + \dots - \dots$$

dont la partie à droite embrasse s intégrales. En réunissant tous les termes, on aura

$$5. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi s} \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y_s \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y) dy,$$

Y_s étant la somme des s premiers termes de la série

$$\frac{r}{r^2 + y^2} - \frac{r}{r^2 + (\pi - y)^2} - \frac{r}{r^2 + (\pi + y)^2} + \frac{r}{r^2 + (2\pi - y)^2} + \frac{r}{r^2 + (2\pi + y)^2} - \dots$$

Quant à la deuxième intégrale du n°. 3, elle peut être réduite à

$$\int_0^{\varrho} \frac{r dy}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s + y)^2} \Phi[\cos(\frac{1}{2}\pi s + y)] \Psi[\sin^2(\frac{1}{2}\pi s + y)],$$

en faisant $x = \frac{1}{2}\pi s + y$. Si on n'a égard qu'aux valeurs absolues, les deux fonctions Φ et Ψ sont indépendantes de s ; on peut donc mettre l'intégrale sous la forme

$$6. \quad \pm \int_0^{\varrho} \frac{r dy}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s + y)^2} f(y),$$

$f(y)$ étant une fonction qui ne contient pas s et qui ne change pas de signe depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \varrho$. En observant encore que $\frac{r}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s)^2}$ est le maximum de $\frac{r}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s + y)^2}$ dans l'intervalle mentionnée, il suit, que la valeur absolue de notre intégrale est moindre que celle du produit

$$\frac{r}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s)^2} \int_0^{\varrho} f(y) dy = \frac{rR}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s)^2},$$

en désignant par R la valeur de $\int_0^{\varrho} f(y) dy$. L'intégrale dont il est question (6.), peut donc être exprimée par

$$\pm \frac{\lambda r R}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s)^2},$$

où λ signifie une quantité entre 0 et 1.

Ayant attention aux diverses transformations que nous venons d'indiquer, nous pourrions maintenant poser l'équation

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi s + \varrho} \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y_s \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y) dy \pm \frac{\lambda r R}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s)^2}. \end{aligned}$$

Or faisant croître s au dessus de toute limite, Y_s a pour limite la somme de la série infinie

$$\frac{r}{r^2 + y^2} - \frac{r}{r^2 + (\pi - y)^2} - \frac{r}{r^2 + (\pi + y)^2} + \frac{r}{r^2 + (2\pi - y)^2} + \frac{r}{r^2 + (2\pi + y)^2} - \dots \text{in inf.,}$$

et cette somme est *)

$$7. \quad \frac{p \cos y}{p^2 + \sin^2 y}, \quad p = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}).$$

Comme de plus $1 > \lambda > 0$, et comme les quantités r et R sont indépendantes

*) Voyez la note à la fin.

de s , on aura

$$\lim. \frac{\lambda r R}{r^2 + (\frac{1}{2}\pi s)^2} = 0,$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{p \cos y dy}{p^2 + \sin^2 y} \Phi(\cos y) \Psi(\sin^2 y).$$

Substituant $\sin y = z$, on obtient enfin

$$8. \int_0^\infty \frac{r dx}{r^2 + x^2} \Phi(\cos x) \Psi(\sin^2 x) = \int_0^1 \frac{p dz}{p^2 + z^2} \Phi(\sqrt{1-z^2}) \Psi(z^2).$$

Voilà le premier des théorèmes mentionnés ci-dessus.

Les mêmes transformations peuvent être appliquées à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{r^2 + x^2} \Phi(\sin x) \Psi(\cos^2 x),$$

et on trouvera sans peine qu'elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Y \Phi(\sin y) \Psi(\cos^2 y) dy,$$

Y étant la somme de la série infinie

$$\frac{y}{r^2 + y^2} + \frac{\pi - y}{r^2 + (\pi - y)^2} - \frac{\pi + y}{r^2 + (\pi + y)^2} - \frac{2\pi - y}{r^2 + (2\pi - y)^2} + \dots$$

Comme on a d'ailleurs *)

$$9. \quad Y = \frac{q \sin y}{q^2 - \cos^2 y}, \quad q = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}),$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{r^2 + x^2} \Phi(\sin x) \Psi(\cos^2 x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{q \sin y dy}{q^2 - \cos^2 y} \Phi(\sin y) \Psi(\cos^2 y),$$

et cela, par la substitution $\cos y = z$, se change en

$$10. \int_0^\infty \frac{x dx}{r^2 + x^2} \Phi(\sin x) \Psi(\cos^2 x) = \int_0^1 \frac{q dz}{q^2 - z^2} \Phi(\sqrt{1-z^2}) \Psi(z^2).$$

Les théorèmes (8. et 10.) contiennent (comme cas particuliers) des nombreuses formules plus ou moins connues. Si p. ex. on suppose $\Phi(u) = u$ et $\Psi(u) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{r \cos x}{r^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2}\pi e^{-r}, \\ \int_0^\infty \frac{x \sin x}{r^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2}\pi e^{-r}. \end{aligned}$$

*) Voyez la note.

Les suppositions $\Phi(u) = u$ et $\Psi(u) = \frac{1}{1+u^2}$, $\Psi(u) = \frac{1}{1-u^2}$ offrent deux autres applications de la formule (10.); elles donnent

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{tang} \frac{1}{2}x}{r^2+x^2} dx = \frac{\pi}{e^r+1}, \quad \int_0^\infty \frac{x \cot \frac{1}{2}x}{r^2+x^2} dx = \frac{\pi}{e^r-1}.$$

Il ne serait pas difficile de trouver encore beaucoup d'autres formules analogues.

Note.

Les formules sommatoires dont nous avons fait usage, peuvent être démontrées de la manière suivante.

Si dans l'équation connue

$$l \sin x = lx + l\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + l\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) + l\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) + l\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) + \dots$$

on remplace x par $y + r\sqrt{-1}$, on aura d'abord

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}) \sin y + \frac{1}{2}\sqrt{-1}(e^r - e^{-r}) \cos y,$$

et en égalant entre elles les parties imaginaires de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha. \quad & \operatorname{arc tang} \left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} \cot y \right) \\ &= \operatorname{arc tang} \frac{r}{y} - \operatorname{arc tang} \frac{r}{\pi - y} + \operatorname{arc tang} \frac{r}{\pi + y} - \dots \end{aligned}$$

Les mêmes transformations, appliquées à la formule

$$l\left(\frac{1}{2}(1 + \cos x)\right) = 2l\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + 2l\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) + 2l\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) + 2l\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) + \dots,$$

donnent la seconde expression

$$\begin{aligned} \beta. \quad & \operatorname{arc tang} \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2 + e^r + e^{-r}} \operatorname{tang} y \right) \\ &= 2 \operatorname{arc tang} \frac{r}{\pi - y} - 2 \operatorname{arc tang} \frac{r}{\pi + y} + 2 \operatorname{arc tang} \frac{r}{3\pi - y} - \dots \end{aligned}$$

La somme des expressions α et β est

$$\begin{aligned} \operatorname{arc tang} \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2 \sin y} \right) &= \operatorname{arc tang} \frac{r}{y} + \operatorname{arc tang} \frac{r}{\pi - y} \\ &\quad - \operatorname{arc tang} \frac{r}{\pi + y} - \operatorname{arc tang} \frac{r}{2\pi - y} \\ &\quad + \operatorname{arc tang} \frac{r}{2\pi + y} + \operatorname{arc tang} \frac{r}{3\pi - y} \\ &\quad - \dots \end{aligned}$$

De là on tire, en différentiant suivant y :

$$\begin{aligned} \gamma. \quad & \frac{p \cos y}{p^2 + \sin^2 y} \\ = & \frac{r}{r^2 + y^2} - \frac{r}{r^2 + (\pi - y)^2} - \frac{r}{r^2 + (\pi + y)^2} + \frac{r}{r^2 + (2\pi - y)^2} + \frac{r}{r^2 + (2\pi + y)^2} - \dots, \\ & p = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}), \end{aligned}$$

et en différentiant suivant r :

$$\frac{\frac{1}{2}(e^r + e^{-r}) \sin y}{p^2 + \sin^2 y} = \frac{y}{r^2 + y^2} + \frac{\pi - y}{r^2 + (\pi - y)^2} - \frac{\pi + y}{r^2 + (\pi + y)^2} - \frac{2\pi - y}{r^2 + (2\pi - y)^2} + \dots$$

En posant

$$q = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}),$$

on a

$$p^2 = q^2 - 1,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$\delta. \quad \frac{q \sin y}{q^2 - \cos^2 y} = \frac{y}{r^2 + y^2} + \frac{\pi - y}{r^2 + (\pi - y)^2} - \frac{\pi + y}{r^2 + (\pi + y)^2} - \frac{2\pi - y}{r^2 + (2\pi - y)^2} + \dots$$

Les formules (γ . et δ .) sont celles qui étaient à démontrer.

Fac-simile einer Handschrift von Vandermonde.

Je requiers qu'on recherche dans
les registres de l'Académie s'il y a
eu déjà une délibération
qui a décidé que la Compagnie
ne donneroit jamais son jugement
sur des matières d'économie
politique et j'insiste pour que
l'Académie prenne cette
délibération si elle ne l'a pas
déjà fait.

le 16 mai 1786

Vandermonde