Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni

(Di L. BERZOLARI, a Pavia.)

È noto che i combinanti del sistema lineare ∞^d determinato da $d+1$ forme binarie di ordine n ($n > d$) coincidono con quelli del sistema lineare ∞^{n-d-1} conjugato (apolare) al primo (*). In linguaggio geometrico, di qui risulta che, se in uno spazio lineare di d dimensioni si considera una curva razionale C_n^d di ordine n , resta su essa determinata un'involuzione di ordine n e di specie $n-d-1$ (che col sig. STAHL diremo *fondamentale*), i gruppi della quale sono definiti dalla proprietà di essere apolari a tutte le sezioni piane della curva, cioè a tutti i gruppi di n suoi punti che sono situati in un piano (**).

Quest'importante involuzione contiene tutte le proprietà della curva, e

(*) Questa proprietà, che si estende immediatamente ad un sistema di forme con un numero qualunque di variabili, è stata dimostrata, pressochè nel medesimo tempo, da vari geometri: STEPHANOS CYPARISSOS, *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (Mém. prés. par divers savants, ecc., Paris, 12 dicembre 1881; tom. 27, pag. 17), e *Sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination* (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3.^a série, tom. 1, 1884, pag. 23); BRILL, *Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades* (Math. Ann., Bd. 20, pag. 335, 1882); FRANZ MEYER, *Apolarität und rationale Curven*, Tübingen, 1883, pag. 39.

(**) In questo lavoro denoto con S_i uno spazio lineare di i dimensioni; in particolare chiamo piano un S_{d-1} contenuto nello spazio R_d di d dimensioni, a cui appartiene C_n^d . Dico inoltre che un S_i è osculatore ad una curva in un suo punto, quando esso ha in quel punto un contatto d'ordine i colla curva.

può essere stabilita per via più geometrica mediante la teoria delle osculanti (*), come ha mostrato con molti esempi il sig. STAHL (**). Quando sia in particolare $n = d + 1$, l'involuzione si riduce ad un unico gruppo, quello formato dai punti di contatto dei $d + 1$ piani aventi colla curva un contatto di ordine d ; ma il sig. STUDY (loc. cit.), coll'esempio della C^3_4 , ha trovato che, dato allora un punto arbitrario nello spazio, resta determinata sulla curva un'involuzione di ordine n e di prima specie (***), la quale fornisce le proprietà più notevoli della curva stessa, e contiene sempre fra' suoi gruppi, qualunque sia il punto preso, il gruppo sopra considerato.

In due recenti lavori relativi alla C^3_4 ed alla C^3_3 (****) ho dimostrato che l'involuzione precedente non è altro che l'involuzione coniugata a quella che si ottiene tagliando la curva coi piani passanti per il punto dato; ed ho inoltre fatto vedere come (sempre nel caso di $n = d + 1$) tali involuzioni determinate dai punti dello spazio siano intimamente legate con quelle forme, che il sig. GROSS (*****) ha chiamato *funzioni generatrici indirette* dei combinanti elementari relativi alla curva.

Nel presente lavoro mi occupo di una C^d_n qualunque, e in primo luogo, dopo aver accennato al significato geometrico delle funzioni generatrici *dirette*, espongo brevemente come, partendo, al modo del sig. STAHL, dalla considerazione delle osculanti, si possa costruire l'involuzione fondamentale; dimostro inoltre che questa possiede in generale un gruppo piano (ed uno solo) nell'unico caso in cui sia ad un tempo d pari ed n dispari. In seguito determino il significato geometrico di tutte le funzioni generatrici indirette, dimostrando alcuni notevoli teoremi sulle *osculanti normali*, cioè di ordine d ; poscia, ge-

(*) Per questa teoria vedansi soprattutto STUDY, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art* (Berichte über die Verh. d. k. sächs. Gesell. d. W. zu Leipzig, 11 gennaio 1886); JOLLES, *Die Theorie der Osculanten*, ecc., Aachen, 1886, ed inoltre i lavori del sig. STAHL e miei che citerò or ora.

(**) Gli interessanti lavori del sig. STAHL su questo argomento si trovano nei volumi 101 e 104 del Giornale di CRELLE, e trattano delle curve piane degli ordini 3, 4 e 5, e delle curve gobbe degli ordini 4, 5, 6 e 7.

(***) Un caso particolare di tali involuzioni relative alla C^3_4 (quella determinata dal punto di concorso delle corde principali) era già stato prima trovato dal sig. BERTINI (Rendic. del R. Istituto Lombardo, 20 giugno 1872).

(****) *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie*, ecc. (Annali di Matem., serie II, vol. 20, 1892, § 5); *Sulla curva del terzo ordine dotata di un punto doppio* (Rendic. del R. Istituto Lombardo, 14 luglio 1892).

(*****) GROSS, *Ueber die Combinanten binärer Formensysteme*, ecc., Inaugural-Dissertation, Stuttgart, 1887, e Math. Ann., Bd. 32, 1888.

neralizzando i ricordati risultati contenuti nei lavori del sig. STUDY e miei (relativi ai casi di $h = 1$, e $d = 2$, $n = 3$; $d = 3$, $n = 4$), trovo che in generale, dato un S_{h-1} , qualunque ($n \geq d \geq h \geq 1$), viene determinata sulla curva un'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$ di ordine n e di specie $n - d + h - 1$, la quale, qualunque sia l' S_{h-1} da cui si parte, contiene fra' suoi gruppi tutti quelli dell'involuzione fondamentale. L'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$, a cui si perviene geometricamente colla considerazione delle osculanti, e di cui ho pure assegnata un'altra costruzione molto semplice, non è che l'involuzione coniugata a quella che s'ottiene tagliando la curva coi piani passanti per il dato S_{h-1} . Uguagliando a zero l' $(h+1)^{\text{ma}}$ funzione generatrice indiretta, in cui si siano sostituite le coordinate dell' S_{h-1} , si ottiene appunto l'equazione della detta involuzione, cioè la relazione cui devono soddisfare $n - d + h$ punti appartenenti ad uno stesso gruppo della medesima. Se invece si suppongono dati valori arbitrari ai parametri di quegli $n - d + h$ punti, la stessa equazione rappresenta, in coordinate di S_{h-1} , un certo S_{d-h} , determinato dalle osculanti normali di quei punti, presi ad $n - d + 1$ per volta.

Da ultimo determino i gruppi neutri dell'involuzione fondamentale nonchè delle involuzioni $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$, e stabilisco alcune proprietà dei gruppi piani di queste ultime: proprietà che sono differenti secondo che tanto d quanto n sono pari od impari.

Parecchi dei risultati precedenti si possono stabilire per via puramente geometrica, considerando (come ho fatto specialmente nei n.º 5, 6 e 12) la curva C_n^d come proiezione di una curva normale di ordine n di uno spazio ad n dimensioni: con questo metodo tutte le involuzioni, di cui sopra si è discorso, derivano da alcune semplicissime e ben note proprietà dell'ultima curva.

1. In uno spazio lineare R_d a d dimensioni le coordinate omogenee del punto corrente λ della curva C_n^d siano espresse da

$$\rho x_i = f_i(\lambda) = a_{i0} \lambda^n + \dots + a_{in} \\ (i = 1, 2, \dots, d+1),$$

e si abbia simbolicamente

$$f_i(\lambda) = a_{i,2}^n = (a_{i,1} \lambda_1 + a_{i,2} \lambda_2)^n.$$

La curva possiede (GROSS, loc. cit.) $d+1$ funzioni generatrici dirette G' , $G'_1, \dots, G'_{d-1}$, G'_d , una qualunque delle quali, per es. la $(r+1)^{\text{ma}}$, si

deduce dal determinante

$$G_r = \begin{vmatrix} f_1(\lambda') & \dots & f_{d+1}(\lambda') \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(\lambda^{(d-r+1)}) & \dots & f_{d+1}(\lambda^{(d-r+1)}) \\ x'_1 & \dots & x'_{d+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(r)} & \dots & x_{d+1}^{(r)} \end{vmatrix},$$

dividendolo per i determinanti $(\lambda' \lambda'') \dots$. Da ciò risulta senz'altro:

L'equazione $G' = 0$ dà la condizione perchè i $d + 1$ punti della curva, dei quali nell'equazione stessa figurano i parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(d+1)}$, siano in uno stesso piano.

L'equazione

$$G_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, d)$$

rappresenta, in coordinate di S_{r-1} (), l' S_{d-r} determinato dai $d - r + 1$ punti della curva, di cui nell'equazione stessa compaiono i parametri, cioè è soddisfatta dalle coordinate locali di tutti gli S_{r-1} aventi ciascuno un punto comune coll' S_{d-r} considerato.*

In particolare, l'equazione $G_d = 0$ rappresenta, in coordinate di piani, il punto λ della curva.

Rappresentando simbolicamente con α^{n_λ} il primo membro, e chiamando $u_1, \dots, u_{d+1}$ le coordinate omogenee di un piano, si avrà quindi

$$G_d = \alpha^{n_\lambda} = \sum_1^{d+1} u_i f_i(\lambda).$$

2. La curva C_n^d ha pure (GROSS, loc. cit.) $d + 1$ funzioni generatrici indirette $\Gamma', \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_d$, e, volendo trovarne l'interpretazione geometrica, cominciamo a considerare la Γ' , richiamandone il modo di generazione. Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d}$ le forme binarie di grado n apolari alle $d + 1$ forme f_i , e colle medesime si formi il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\lambda') & \dots & \varphi_{n-d}(\lambda') \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\lambda^{(n-d)}) & \dots & \varphi_{n-d}(\lambda^{(n-d)}) \end{vmatrix}.$$

(*) Circa le coordinate di un S_i e le relazioni a cui esse soddisfanno, vedasi D'OVINO, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Mem. della R. Accad. dei Lincei, serie III, vol. 1, 1877).

Dividendolo per i determinanti $(\lambda' \lambda''), \dots$, e rappresentando il quoziente come funzione dei coefficienti delle f_i (ciò che è possibile in virtù delle relazioni bilineari che, per l'apolarità, hanno luogo fra i coefficienti delle f_i e quelli delle φ_k), si ottiene la funzione che si è chiamata Γ' . Ora il sistema lineare determinato dalle forme φ_k rappresenta manifestamente l'involuzione fondamentale, e l'equazione $\Gamma' = 0$ dà, com'è noto, la condizione perchè i parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d)}$ siano radici di una stessa forma di quel sistema lineare, laonde:

L'equazione $\Gamma' = 0$ esprime la condizione perchè gli $n - d$ punti della curva, di cui essa contiene i parametri, appartengano ad uno stesso gruppo dell'involuzione fondamentale.

3. In ciò che segue rappresenteremo col simbolo $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-r)}]_r$ l'osculante mista dei punti $\lambda', \dots, \lambda^{(n-r)}$ della curva, ossia la curva razionale d'ordine r , il cui punto corrente λ ha per equazione

$$\alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-r)}} \alpha_{\lambda}^r = 0.$$

Consideriamo ora l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}]_{d+1}$: è noto (*), e si dimostra del resto assai facilmente, che essa contiene $d + 1$ punti *stazionari*, cioè tali che per ciascuno di essi esiste un piano (*stazionario*) avente ivi colla curva un contatto di ordine d ; si trova subito che i parametri di tali punti sono dati dall'equazione

$$0 = \Pi_{\lambda}^{d+1} = (a_1 a_2) \dots (a_d a_{d+1}) a_{1\lambda'} \dots a_{d+1, \lambda} \dots a_{1, \lambda^{(n-d-1)}} \dots a_{d+1, \lambda^{(n-d-1)}} a_{1\lambda} \dots a_{d+1, \lambda},$$

laonde questi punti e gli $n - d - 1$ punti dati sono rappresentati complessivamente dalla seguente equazione in λ :

$$(\lambda \lambda') \dots (\lambda \lambda^{(n-d-1)}) \Pi_{\lambda}^{d+1} = 0.$$

Ora il primo membro è apolare a ciascuna delle forme f_i , epperò:

Dati $n - d - 1$ punti qualunque sopra C_n^d , i $d + 1$ punti che con essi costituiscono un gruppo dell'involuzione fondamentale hanno per parametri quelli dei punti stazionari dell'osculante mista di ordine $d + 1$ determinata dai punti considerati.

4. Indicando con $\lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ i parametri di n punti di C_n^d formanti un gruppo dell'involuzione fondamentale, avremo identicamente, qualunque

(*) Cfr. CLIFFORD, *On the Classification of Loci*, Phil. Transactions, 1878, pag. 671; LORIA, *Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n - 1$ dimensioni* (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tom. 2, 1888, pag. 203).

siano le u_i ,

$$\alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n)}} = 0. \quad (1)$$

Se poi μ' è il parametro di uno dei punti stazionari dell'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}]_{d+1}$, l'osculante normale $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}, \mu']_d$ sarà contenuta interamente nel relativo piano stazionario. Ora il punto corrente λ di questa curva ha per equazione

$$\alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-d-1)}} \alpha_{\mu'} \alpha_{\lambda}^d = 0,$$

quindi, se nel primo membro in luogo delle u_i si sostituiscono le coordinate del detto piano stazionario, esso si annulla qualunque sia λ . Si ottengono in tal modo le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-d-1)}} \alpha_{\mu'} \alpha_1^r \alpha_2^{d-r} &= 0 \\ (r = 0, 1, \dots, d), \end{aligned} \quad (2)$$

le quali, in virtù dell'identità (1), equivalgono soltanto a d , e possono servire a determinare le coordinate del piano stazionario considerato. La simmetria delle (2) rispetto ai parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-1)}, \mu'$ fornisce il teorema seguente:

Sia dato un gruppo qualunque dell'involuzione fondamentale, e di esso si considerino $n - d$ punti qualunque: questi, presi ad $n - d - 1$ per volta, determinano $n - d$ osculanti miste d'ordine $d + 1$, le quali hanno tutte un piano stazionario comune; esso tocca ciascuna nel punto avente per parametro quello del punto rimanente.

Chiamando $\mu'', \dots, \mu^{(d+1)}$ gli altri punti della curva che completano il gruppo sopra considerato dell'involuzione fondamentale, dalle (2) seguono successivamente altri $d - 1$ gruppi di equazioni, di cui uno qualunque è il seguente:

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda'} \dots \alpha_{\lambda^{(n-d-1)}} \alpha_{\mu'} \dots \alpha_{\mu^{(k)}} \alpha_1^r \alpha_2^{d-r-k+1} &= 0 \\ (r = 0, 1, \dots, d - k + 1). \end{aligned}$$

Le sue $d - k + 2$ equazioni, in virtù della (1), equivalgono a sole $d - k + 1$, e dicono che, se di un gruppo dell'involuzione fondamentale si considerano $n - d + k - 1$ punti qualunque, essi, presi ad $n - d$ per volta, determinano ogni volta un piano nel modo indicato dal teorema precedente: *questi $\binom{n-d+k-1}{n-d}$ piani passano tutti per un medesimo S_{d-k} , quello appunto che è rappresentato dall'ultimo gruppo di equazioni.*

Raccogliendo, si può enunciare la proprietà seguente:

Dati n punti della curva costituenti un gruppo qualunque dell'involuzione fondamentale, essi, presi ad $n - d$ per volta, determinano ogni volta un piano, nel modo sopra indicato: gli $\binom{n}{d}$ piani che così in tutto si ottengono sono le facce di un ennagono completo.

I vertici di questo ennagono si possono coordinare ad uno ad uno ai punti del gruppo considerato, intendendo che ad ogni vertice venga coordinato quello fra i punti del gruppo, che, unito con altri $n - d - 2$ punti qualunque del gruppo stesso, non dà mai luogo ad un'osculante di ordine $d + 1$, di cui un piano stazionario passi per il vertice considerato (*).

5. Ai risultati precedenti si può giungere anche colla pura geometria, immaginando (**) che la C^d_n sia ottenuta proiettando in R_d da uno spazio lineare ad $n - d - 1$ dimensioni (che in tutto il seguito terremo fisso e denoteremo con Σ_{n-d-1}) una curva normale C^n_n di ordine n di uno spazio lineare R_n ad n dimensioni passante per R_d e per Σ_{n-d-1} . Secondo che n è pari od impari, la C^n_n determina (***) una polarità rispetto ad una quadrica F passante per la curva, oppure un sistema nullo Θ , e se diciamo Σ_d lo spazio che per tal modo è conjugato a Σ_{n-d-1} , le involuzioni che si ottengono tagliando C^n_n cogli S_{n-1} passanti per Σ_{n-d-1} e per Σ_d sono fra loro conjugate (Cfr. CASTELNUOVO, loc. cit., § 2.).

Di qui risulta che l'involuzione fondamentale sopra C^d_n si può ottenere tagliando C^n_n cogli S_{n-1} passanti per Σ_d e proiettando le intersezioni da Σ_{n-d-1} sopra R_d .

Un'osculante qualunque $[\lambda', \dots, \lambda^{(r)}]_{n-r}$ di C^n_n è una curva normale situata in un S_{n-r} , il quale è lo spazio comune agli S_{n-1} osculatori a C^n_n nei punti $\lambda', \dots, \lambda^{(r)}$: proiettando questa curva da Σ_{n-d-1} su R_d , si ottiene l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(r)}]_{n-r}$ di C^d_n . Presi allora $n - d$ punti di C^n_n situati in un S_{n-1} passante per Σ_d , gli S_{n-1} che osculano C^n_n in quei punti si tagliano in un S_d avente un punto comune col Σ_{n-d-1} ; la proiezione di tale S_d da Σ_{n-d-1}

(*) Cfr. STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven* (Giornale di CRELLE, Bd. 104, 1888).

(**) VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, ecc. (Math. Ann., Bd. 19, 1881, pag. 208).

(***) CLIFFORD, loc. cit., pag. 668-669. — Vedi pure CASTELNUOVO, *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali*, ecc. (Atti del R. Istituto Veneto, tom. 4, serie VI, 1886, § 1).

dà quindi in R_d un S_{d-1} , che manifestamente è un piano stazionario per tutte le osculanti di ordine $d+1$ determinate dalle proiezioni degli $n-d$ punti dati, presi ad $n-d-1$ per volta.

Presi poi sopra C_n^d n punti costituenti un gruppo dell'involuzione fondamentale, i punti corrispondenti di C_n^n saranno i punti di contatto degli S_{n-1} osculatori a C_n^n , uscenti da un determinato punto A di Σ_{n-d-1} . Gli S_i che questi S_{n-1} , considerati ad $n-1$ per volta, hanno in comune, formano un n -spigolo completo avente il vertice nel punto A , e, proiettandone gli n spigoli da Σ_{n-d-1} su R_d , si hanno i vertici dell'ennagono completo di cui si parla nel numero precedente. I teoremi ivi contenuti sono dunque dimostrati.

6. Cerchiamo se fra i gruppi dell'involuzione fondamentale qualcuno abbia tutti i suoi punti in un piano. Perchè ciò possa accadere è intanto necessario che n sia dispari; in tale ipotesi sia

$$\sum_1^{d+1} u_i x_i = 0 \quad (3)$$

l'equazione di un piano: esso taglia C_n^d nei punti i cui parametri sono le radici dell'equazione

$$\sum_1^{d+1} u_i a_{i,\lambda}^n = 0.$$

Volendo determinare le u_i in modo che il primo membro sia apolare a tutte le sezioni piane di C_n^d , scriviamo dapprima le condizioni perchè esso sia apolare alle sezioni fatte coi piani fondamentali $x_1 = 0, \dots, x_d = 0$, ossia a ciascuna delle forme $a_{1,\lambda}^n, \dots, a_{d,\lambda}^n$. Ponendo

$$A_{rs} = (a_r a_s)^n,$$

di guisa che sarà

$$A_{rs} = -A_{sr},$$

ed eliminando le u_i dalla (3) e dalle d equazioni di condizione, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d & x_{d+1} \\ 0 & A_{12} & \dots & A_{1,d} & A_{1,d+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{d,1} & A_{d,2} & \dots & 0 & A_{d,d+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Ora se d è impari, il coefficiente di x_{d+1} in quest'equazione è un determinante gobbo simmetrico di ordine impari ed è quindi nullo: in tal caso

pertanto il piano rappresentato dalla (4) passa per il punto $x_1 = \dots = x_d = 0$ e nell'involuzione fondamentale non esiste alcun gruppo piano. Se al contrario d è pari, il piano (4) non passa, in generale, per il punto ora nominato, quindi la sezione fatta nella curva da quel piano, essendo apolare a $d + 1$ sezioni piane linearmente indipendenti, è apolare a tutte. Si conclude dunque:

L'involuzione fondamentale possiede in generale un gruppo piano (ed uno soltanto) nell'unico caso in cui sia ad un tempo d pari ed n impari.

Alla stessa conclusione si perviene immediatamente riprendendo le considerazioni del numero precedente. Dato un S_{n-1} passante per Σ_d , gli n punti in cui esso taglia C_n^d verranno proiettati da Σ_{n-d-1} in n punti di C_n^d situati in un piano, soltanto quando l' S_{n-1} considerato passi per Σ_{n-d-1} , cioè quando gli spazi Σ_{n-d-1} e Σ_d si taglino. Ora, per note proprietà, ciò non può accadere se n è pari, poichè in tal caso quei due spazi sono coniugati rispetto alla quadrica $F^{(*)}$; quando n invece sia impari, quegli spazi sono coniugati nel sistema nullo Θ , epperò si tagliano, necessariamente, nel solo caso in cui l'uno, e quindi anche l'altro, sia ad un numero pari di dimensioni, quando cioè d sia pari.

7. Sulla curva C_n^d si considerino $n - d + 1$ punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}$, i quali, presi ad $n - d$ per volta, determinano $n - d + 1$ osculanti normali. Fissandone una, per es. la $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d)}]_d$, le coordinate del suo punto corrente λ sono

$$x_i \equiv a_{i,\lambda'} \dots a_{i,\lambda^{(n-d)}} a_{i,\lambda}^d$$

$$(i = 1, 2, \dots, d + 1),$$

e però le coordinate del suo piano osculatore nel punto avente per parametro $\lambda^{(n-d+1)}$ (cioè quello del punto che si è trascurato) sono

$$u_i \equiv (a_2^2 a_3) \dots (a_d a_{d+1}) a_{2,\lambda'} \dots a_{d+1,\lambda'} \dots a_{2,\lambda^{(n-d+1)}} \dots a_{d+1,\lambda^{(n-d+1)}},$$

$$\dots \dots \dots$$

e la loro simmetria rispetto a $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}$ dimostra il teorema:

Dati $n - d + 1$ punti qualunque sopra C_n^d , essi, presi ad $n - d$ per

(*) Circa le quadriche di uno spazio lineare qualunque vedansi VERONESE, loc. cit., Abschnitt III, e SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, serie II, tom. 36, 1884).

volta, determinano $n - d + 1$ osculanti normali, le quali hanno un piano osculatore comune; questo oscula ciascuna nel punto che ha per parametro quello del punto rimanente.

È altresì da notare che in tal piano tutte le osculanti ora nominate hanno pure in comune l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}]_{d-1}$, che è una curva normale del piano stesso.

L'equazione del piano suddetto si ottiene uguagliando a zero la funzione generatrice indiretta Γ'_1 , formata coi parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+1)}$ dei punti sopra considerati.

Per convincersi di ciò basta tener presente il modo con cui si forma la funzione Γ'_1 , e far uso di un teorema generale dovuto al sig. STEPHANOS (*Mémoire sur les faisceaux*, ecc., loc. cit., pag. 22); ma su questo non mi fermo più oltre, poichè avrò occasione di ritornarvi nel n.º 11 per altro fine.

I ragionamenti fatti sopra si possono proseguire, considerando sulla curva $n - d + 2, n - d + 3, \dots$ punti qualunque, e si perviene così al teorema generale:

Dati $n - d + h$ punti qualunque sopra C^d_n ($n \geq d \geq h \geq 1$), prendendoli ad $n - d + 1$ per volta, essi determinano ogni volta un piano, nel modo indicato poc' anzi: gli $\binom{n-d+h}{h-1}$ piani che così si ottengono passano tutti per uno stesso S_{d-h} ; essi sono inoltre le facce di un moltispazio completo costituito di $n - d + h$ spazi S_{d-h+1} ed avente per sostegno l' S_{d-h} , cioè sono i piani che contengono, in tutti i modi possibili, $h - 1$ di questi S_{d-h+1} .

Gli S_{d-h+1} del moltispazio precedente si possono coordinare ad uno ad uno agli $n - d + h$ punti dati di C^d_n , intendendo che ad ognuno degli S_{d-h+1} si faccia corrispondere quello fra i punti dati, che, unito con altri $n - d$ qualunque, non determina mai, nel modo sopra esposto, un piano passante per l' S_{d-h+1} considerato.

L'equazione che risulta uguagliando a zero l' $(h + 1)^{\text{ma}}$ funzione generatrice indiretta Γ'_h , nella quale si siano sostituiti i parametri degli $n - d + h$ punti dati, rappresenta, in coordinate di S_{h-1} , lo spazio nominato S_{d-h} , cioè è soddisfatta dalle coordinate di tutti gli S_{h-1} aventi un punto comune coll' S_{d-h} .

La prima parte si può anche enunciare dicendo:

Dati sulla curva $n - d + h$ punti qualunque, considerandoli ad $n - d + h - 1$ per volta, essi determinano $n - d + h$ osculanti miste di ordine $d - h + 1$, le quali posseggono un S_{d-h} osculatore comune; questo oscula ciascuna nel punto avente per parametro quello del punto trascurato.

ossia dicendo che il gruppo dei punti presi $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h)}$ è apolare al gruppo di n punti che si ha secando C_n^d con uno qualunque di quei piani, epperò, per l'osservazione premessa, con uno qualunque dei piani passanti per l' S_{d-h} determinato dai piani stessi. Pertanto possiamo dire:

Dati $n - d + h$ punti qualunque di C_n^d ($n \geq d \geq h \geq 1$), il gruppo da essi costituito è apolare a tutti i gruppi di n punti che si ottengono tagliando la curva coi piani passanti per l' S_{d-h} coordinato al gruppo dato di punti.

10. Dato ad arbitrio un S_{h-1} , esistono $\infty^{n-d+h-1}$ gruppi di $n - d + h$ punti della curva, il cui S_{d-h} coordinato abbia un punto comune coll' S_{h-1} . Invero se in

$$\Gamma_h = 0$$

supponiamo sostituite le coordinate del dato S_{h-1} , otteniamo un'equazione di grado $d - h + 1$ rispetto a ciascuno dei parametri $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h)}$, di modo che, assegnati valori arbitrari ad $n - d + h - 1$ qualunque di essi, restano determinati $d - h + 1$ valori del rimanente: la proprietà enunciata ha allora luogo in virtù di quanto si è detto alla fine del n.º 7. Si ha pertanto il teorema generale:

Fissato in R_d uno spazio lineare qualunque S_{h-1} , resta determinata sopra C_n^d un'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$ di ordine n e di specie $n - d + h - 1$, un gruppo qualunque della quale gode della proprietà che lo spazio S_{d-h} , coordinato ad un gruppo arbitrario di $n - d + h$ fra' suoi punti, ha un punto comune col dato S_{h-1} . L'equazione di tale involuzione, ossia la relazione che intercede fra $n - d + h$ punti appartenenti ad un suo gruppo, si ottiene uguagliando a zero la funzione Γ_h , nella quale si siano sostituite le coordinate del dato S_{h-1} .

Si può inoltre dimostrare che l'involuzione stessa è coniugata a quella che risulta tagliando C_n^d coi piani passanti per il dato S_{h-1} ; dal che segue che, qualunque sia questo S_{h-1} , essa contiene fra' suoi gruppi tutti quelli dell'involuzione fondamentale.

Invero, considerando un gruppo qualunque della detta involuzione e scegliendo $n - d + h$ de' suoi punti, ad essi è coordinato un S_{d-h} avente un punto comune col dato S_{h-1} , e giacente quindi con questo in un piano determinato. Tale piano, per il teorema del numero precedente, taglia C_n^d in n punti costituenti un gruppo apolare a quello degli $n - d + h$ punti considerati, e perciò apolare anche all'intero gruppo fissato dell'involuzione. Quest'ultimo è pertanto apolare a ciascuno degli $\binom{n}{d-h}$ gruppi di n punti de-

terminati, nel modo ora esposto, da piani passanti per il dato S_{h-1} . E poichè dall'essere $n \geq d \geq h$ segue

$$\binom{n}{d-h} > d-h,$$

ed i piani passanti per un S_{h-1} sono ∞^{d-h} , il gruppo considerato sarà apolare a *tutte* le sezioni fatte in C_n^d coi piani passanti per l' S_{h-1} .

11. Dell'ultima proprietà è utile esporre anche la seguente dimostrazione analitica, la quale deriva immediatamente da una forma notevole che si può dare alla funzione Γ'_h . Ricordo a tale scopo che la Γ'_h si costruisce applicando a $d-h+1$ qualunque fra le forme $f_i(\lambda)$ lo stesso procedimento che già si è indicato al n.º 2 per avere la Γ , orlando poscia h volte la funzione così ottenuta, ed aggiungendo al risultato tutti i termini analoghi. Applicando allora il teorema del sig. STEPHANOS a cui si è alluso nel n.º 7 (e l'applicazione è lecita, poichè i numeri k ed m di questo Autore qui valgono rispettivamente $d-h$ ed n , epperò la condizione $m > k$ è certamente soddisfatta) otteniamo

$$\Gamma'_h = \begin{vmatrix} A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & \dots & A_{d+1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(d-h)} & A_2^{(d-h)} & \dots & A_{d+1}^{(d-h)} \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_{d+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(h)} & x_2^{(h)} & \dots & x_{d+1}^{(h)} \end{vmatrix},$$

dove in generale si è posto

$$A_i^{(r)} = a_{i,1}^{d-h-r} a_{i,2}^r a_{i,\lambda} \dots a_{i,\lambda}^{(n-d+h)},$$

e $(x'_1, \dots, x'_{d+1}), \dots, (x_1^{(h)}, \dots, x_{d+1}^{(h)})$ denotano le coordinate di h punti che determinano lo spazio S_{h-1} . Se per semplicità supponiamo poi che questi punti siano quelli che hanno tutte le coordinate nulle, all'infuori rispettivamente della $(d-h+2)^{\text{ma}}, \dots, (d+1)^{\text{ma}}$, la Γ'_h assume la forma assai semplice

$$\Gamma'_h = \begin{vmatrix} A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & \dots & A_{d-h+1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(d-h)} & A_2^{(d-h)} & \dots & A_{d-h+1}^{(d-h)} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

che si può altresì sviluppare come segue:

$$\Gamma'_h = (a_1 a_2) \dots (a_{d-h} a_{d-h+1}) a_{1,\lambda} \dots a_{1,\lambda^{(n-d+h)}} \dots a_{d-h+1,\lambda} \dots a_{d-h+1,\lambda^{(n-d+h)}}.$$

Ciò posto, per dimostrare la proprietà di cui si è parlato in principio, indichiamo con $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-1)}$ i parametri di $n-d+h-1$ punti arbitrari di C_n^d : ad essi, mediante l'equazione $\Gamma'_h = 0$, corrispondono $d-h+1$ punti, che coi primi formano un gruppo dell'involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}$. Possiamo dunque dire che un gruppo qualunque di tale involuzione è dato dalle n radici della seguente equazione in λ :

$$(\lambda \lambda') \dots (\lambda \lambda^{(n-d+h-1)}) \Gamma'_h = 0,$$

dove in Γ'_h in luogo di $\lambda^{(n-d+h)}$ si sia posto λ . Ora, se per Γ'_h assumiamo l'ultima delle forme date sopra, riesce evidente che il primo membro dell'equazione ora scritta è apolare a ciascuna delle forme $f_1, \dots, f_{d-h+1}$, che sono determinate dalle intersezioni di C_n^d coi piani $x_1 = 0, \dots, x_{d-h+1} = 0$ individuanti l' S_{h-1} .

12. La considerazione della (7) permette d'indicare una costruzione assai semplice (e di cui ci serviremo nel n.º 16) dell'involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}$. Siano $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-1)}$ i parametri di $n-d+h-1$ punti qualunque della curva, i quali determinano l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-1)}]_{d-h+1}$. Mantenendo le ipotesi e le notazioni del numero precedente, un piano qualunque passante per l' S_{h-1} è rappresentato dall'equazione

$$\sum_1^{d-h+1} u_i x_i = 0,$$

e taglia quindi la detta osculante nei punti forniti da

$$\sum_1^{d-h+1} u_i a_{i,\lambda'} \dots a_{i,\lambda^{(n-d+h-1)}} a_{i,\lambda}^{d-h+1} = 0.$$

Volendo che il detto piano abbia coll'osculante un contatto di ordine $d-h$ nel punto di parametro $\lambda^{(n-d+h)}$, avremo le $d-h+1$ equazioni di condizione

$$\sum_1^{d-h+1} A_i^{(0)} u_i = 0, \dots, \sum_1^{d-h+1} A_i^{(d-h)} u_i = 0,$$

da cui eliminando le u_i si ha appunto, nella forma (7),

$$\Gamma'_h = 0.$$

Pertanto, dati $n - d + h - 1$ punti qualunque sopra C_n^d , i punti, che con essi costituiscono un gruppo dell'involuzione determinata da un dato S_{h-1} , hanno per parametri quelli dei punti di contatto dei piani passanti per l' S_{h-1} ed aventi un contatto di ordine $d - h$ coll'osculante mista di ordine $d - h + 1$ determinata dai punti considerati.

Se poi ci riferiamo di nuovo al metodo indicato nel n.º 5, risulta dalle proprietà precedenti che l'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$ può venir generata come segue. Entro lo spazio Σ_d si fissi uno spazio lineare qualsivoglia Σ_{d-h} di $d - h$ dimensioni, e dicasi $\Sigma_{n-d+h-1}$ il suo spazio conjugato (rispetto ad F od a Θ , secondo che n è pari od impari), che passerà per Σ_{n-d-1} . Gli S_{n-1} passanti per Σ_{d-h} determinano allora sopra C_n^d un'involuzione di ordine n e di specie $n - d + h - 1$, la quale, proiettata da Σ_{n-d-1} in R_d , diventa l'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$. L' S_{h-1} di cui si è parlato nei numeri precedenti è l'intersezione di R_d con $\Sigma_{n-d+h-1}$.

13. L'involuzione fondamentale, come risulta da teoremi generali ben noti (*), possiede $(n - d)(d + 1)$ punti $(n - d)$ -pli, i quali, dovendo (**) coincidere coi punti $(d + 1)$ -pli dell'involuzione conjugata, non sono altro che i punti di contatto dei piani aventi con C_n^d un contatto d'ordine d . Per la stessa ragione l'involuzione determinata su C_n^d da un S_{h-1} possiede $(n - d + h)(d - h + 1)$ punti $(n - d + h)$ -pli, i quali coincidono coi punti di contatto dei piani passanti per l' S_{h-1} , ed aventi colla curva un contatto d'ordine $d - h$.

14. Data un'involuzione di ordine n e di specie k , diremo col signor WEYR (***) che k elementi formano un *gruppo neutro* della medesima quando essi, insieme con un elemento ulteriore arbitrario, determinano un gruppo dell'involuzione. Volendo trovare il significato geometrico dei gruppi neutri nelle involuzioni sin qui considerate, conviene premettere la ricerca seguente.

Dati sulla curva r punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(r)}$, essi determinano l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(r)}]_{n-r}$, la quale, quando siano soddisfatte certe condizioni, potrà

(*) Cfr. BATTAGLINI, *Sulle forme binarie di grado qualunque* (Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1867, vol. III, pag. 20); EM. WEYR, *Ueber Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe* (Sitzungsb. dell'Accad. di Vienna, tom. 79, 17 aprile 1879, pag. 684). — Una dimostrazione più geometrica di questo e di altri risultati trovati nel citato lavoro del sig. CASTELNUOVO.

(**) Cfr. i lavori già ricordati di STEPHANOS, BRILL, MEYER e CASTELNUOVO.

(***) Loc. cit., § 10. Il concetto di gruppo neutro è stato poi generalizzato dal signor CASTELNUOVO nella Memoria citata.

Il problema proposto si risolve allora immediatamente applicando un noto risultato, del quale il sig. STAHL ha dato recentemente (*) una dimostrazione assai semplice; si ottiene così:

Quando sia $n \geq 2r > n - d + 1$, i piani contenenti le osculanti miste di r punti di una curva C_n^d formano una varietà di $d - n + 2r - 1$ dimensioni e di classe $\binom{n-r+1}{r}$, cioè sono tali che per ogni $S_{d-n+2r-2}$ ne passano $\binom{n-r+1}{r}$.

Se è invece $2r = n - d + 1$ (nel qual caso la prima condizione $n \geq 2r$ è sempre senz'altro soddisfatta), il numero delle osculanti miste di ordine $n - r$ situate in un piano è finito ed uguale a $\binom{n-r+1}{r}$.

Ponendo in generale

$$A_s = \sum_{i=1}^{i=d+1} u_i a_{i,1}^{n-s} a_{i,2}^s,$$

i punti, in cui C_n^d è tagliata da un piano arbitrario

$$\sum_1^{d+1} u_i x_i = 0,$$

hanno per parametri le radici dell'equazione

$$0 = \Phi = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} A_s \lambda^{n-s}.$$

La matrice precedente diviene allora

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} A_0 & A_1 & \dots & \dots & \dots & A_r & \\ A_1 & A_2 & \dots & \dots & \dots & A_{r+1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ A_{n-r} & A_{n-r+1} & \dots & \dots & \dots & A_n & \end{array} \right\|,$$

ed all'insieme de'suoi determinanti di ordine $r+1$ il prof. BATTAGLINI (loc. cit., pag. 24) ha dato il nome di *plesso cataletticante* di ordine $n - 2r$ della

(*) STAHL, *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven* (Math. Ann., Bd. 40, 1892, Anhang, pag. 52).

forma Φ (cataletticante di Φ quando $n = 2r$), assegnando inoltre il significato geometrico del suo annullarsi. Dunque:

I piani di cui sopra si è parlato sono quelli che hanno la proprietà di tagliare C_n^d in gruppi di punti, pei quali è nullo il plesso cataletticante di ordine $n - 2r$ (rispettivamente il cataletticante).

Per esempio nel piano ordinario ($d = 2$) per i casi $n = 3, r = 1$; $n = 4, r = 2$; $n = 5, r = 2$, e nello spazio ordinario ($d = 3$) per i casi $n = 4, r = 1$; $n = 4, r = 2$; $n = 5, r = 2$; $n = 6, r = 3$; $n = 6, r = 2$; $n = 7, r = 3$, si ritrovano le seguenti proprietà già note.

Per una C^2_3 esistono tre coniche osculanti ridotte ad una retta doppia, e sono le prime osculanti dei tre flessi (STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen*, ecc. Giornale di CRELLE, Bd. 104, § 1; BERZOLARI, *Sulla curva del terz'ordine*, ecc., loc. cit.).

Una C^2_4 ammette ∞^1 coniche osculanti degenerate in una retta doppia: queste rette inviluppano una curva di 3.^a classe, e tagliano C^2_4 in gruppi armonici di punti; esse non sono poi altro che le tangenti d'inflexione delle prime osculanti (STAHL, *Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung*, Giornale di CRELLE, Bd. 101, § 3).

In una C^2_5 esistono sei osculanti di 3.^o ordine ridotte ad una retta tripla (STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen*, ecc., loc. cit., § 4).

Per una C^3_4 esistono quattro cubiche osculanti situate in un piano, e sono le prime osculanti dei punti stazionari; i piani delle coniche osculanti, ossia i piani osculatori delle prime osculanti, inviluppano una superficie di 3.^a classe (la superficie di STEINER di cui C^3_4 è un'assintotica), e tagliano C^3_4 in gruppi armonici di punti (STUDY, loc. cit.; STAHL, loc. cit., § 2; BERZOLARI, *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie*, ecc., loc. cit., § 5).

Per una C^3_5 i piani contenenti le osculanti piane di 3.^o ordine, ossia i piani stazionari delle prime osculanti, formano un fascio gobbo di 6.^a classe (STAHL, loc. cit., §§ 3^a e 3^e).

In una C^3_6 i piani delle osculanti piane di 3.^o ordine, ossia i piani stazionari delle seconde osculanti miste, inviluppano una superficie di 4.^a classe; esistono inoltre dieci osculanti di 4.^o ordine situate in un piano (STAHL, loc. cit., § 5).

In una C^3_7 i piani delle osculanti piane di 4.^o ordine formano un fascio gobbo di 10.^a classe (STAHL, loc. cit., § 6).

15. Volendo determinare i gruppi neutri dell'involuzione fondamentale, si osservi che, in virtù della costruzione esposta al n.^o 3, presi sulla curva

$n - d - 3$ punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}$, essi insieme con altri due punti μ, ν costituiscono un gruppo neutro dell'involuzione, quando l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}, \mu, \nu]_{d+1}$ è situata in un piano. Ora questa curva è anche l'osculante mista di ordine $d + 1$ determinata dai punti μ, ν dell'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}]_{d+3}$ presa come curva fondamentale; perciò basterà far uso del teorema del numero precedente, ponendo $n = d + 3$, $r = 2$. Si ha così:

Dati sulla curva $n - d - 3$ punti qualunque $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}$, essi fanno parte di $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ gruppi neutri dell'involuzione fondamentale, i quali corrispondono a quelle fra le osculanti miste d'ordine $d + 1$ della curva $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d-3)}]_{d+3}$, che si trovano in un piano.

16. In modo analogo si determinano i gruppi neutri di una qualunque involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}$. Dati $n - d + h - 3$ punti arbitrari $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}$ di C^n , essi insieme con altri due punti μ, ν formano un gruppo neutro di quell'involuzione, quando l'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}, \mu, \nu]_{d-h+1}$ giace in un piano passante per l' S_{h-1} fissato. E poichè tale curva si può anche riguardare come l'osculante mista di ordine $d - h + 1$ determinata dai punti μ, ν dell'osculante $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}]_{d-h+3}$ presa come curva fondamentale, basterà far uso del teorema del n.º 14, ponendo $n = d - h + 3$, $r = 2$. Delle due condizioni là trovate una è sempre soddisfatta, e l'altra diventa

$$d \geq h + 1,$$

e poichè si ha già $d \geq h$, l'unico caso di eccezione è quello in cui $d = h$. Esso è però compreso in quanto si è detto nel principio del n.º 14, e si ha pertanto in generale il teorema seguente:

Dato uno spazio lineare qualunque S_{h-1} , e dati sulla curva $n - d + h - 3$ punti arbitrari $\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}$, essi fanno parte di $\frac{(d-h+1)(d-h+2)}{2}$ gruppi neutri dell'involuzione determinata dal dato S_{h-1} : questi gruppi corrispondono a quelle fra le osculanti miste di ordine $d - h + 1$ della curva $[\lambda', \dots, \lambda^{(n-d+h-3)}]_{d-h+3}$, che giacciono in un piano passante per l' S_{h-1} .

Si noti infine che i gruppi neutri dell'involuzione fondamentale e quelli di una qualunque involuzione $[S_{h-1}]_{n-d+h-1}$ sono le proiezioni in R_d dei gruppi neutri dell'involuzione determinata sopra C^n dagli S_{h-1} passanti rispettivamente per Σ_d oppure per il Σ_{d-h} di cui si è parlato nel n.º 12. Gli uni e gli altri si possono dunque costruire nel modo indicato dal sig. CASTELNUOVO nel n.º 11, loc. cit.

17. Occupiamoci da ultimo dei gruppi dell'involuzione $[S_{h-1}]^{n-d+h-1}$ giacenti in un piano, ed a tale scopo premettiamo le seguenti osservazioni.

Se n è pari, i piani secanti C_n^d in gruppi di punti apolari a sè stessi inviluppano una quadrica, la cui equazione tangenziale si ottiene uguagliando a zero l'invariante quadratico della forma α^2_λ : questa quadrica, che diremo Q , ha per piani tangenti le intersezioni di R_d cogli S_{n-1} condotti per Σ_{n-d-1} a toccare la quadrica F (vedi n.° 5).

Supponendo invece n dispari, l'inviluppo precedente è indeterminato, e (mantenendo le notazioni del n.° 6) la condizione perchè le sezioni fatte in C_n^d con due piani differenti

$$\sum_1^{d+1} u_i x_i = 0, \quad \sum_1^{d+1} v_i x_i = 0 \quad (9)$$

siano fra loro apolari è

$$v_1 \sum_1^{d+1} A_{1,i} u_i + \dots + v_{d+1} \sum_1^{d+1} A_{d+1,i} u_i = 0, \quad (10)$$

che si può scrivere anche come segue:

$$A_{12} q_{12} + A_{13} q_{13} + \dots + A_{d,d+1} q_{d,d+1} = 0, \quad (11)$$

avendo posto

$$q_{rs} = u_r v_s - u_s v_r.$$

Le q_{rs} sono le coordinate-assi dell' S_{d-2} comune ai due piani (9), e quando la (11) sia soddisfatta questo S_{d-2} è tale che due piani qualunque del fascio di cui esso è il sostegno tagliano C_n^d in due gruppi apolari di punti. La (11) è l'equazione del *complesso* degli S_{d-2} dotati di tale proprietà.

Considerando la (10), se supponiamo date le coordinate v_i , essa al variare delle u_i rappresenta un punto giacente nel piano v , e supponendo date invece le coordinate di questo punto, si potranno da essa ricavare i valori delle v_i nel solo caso in cui non sia nullo il determinante dei loro coefficienti. Essendo esso gobbo simmetrico e di ordine $d+1$, potrà essere diverso da zero soltanto quando d sia impari. In tal caso la (10) definisce un sistema nullo, che diremo N , e nel quale un punto ed un piano fra loro corrispondenti sono tali che tutti i piani passanti per il punto tagliano C_n^d in gruppi apolari a quello determinato dal piano dato. È poi anche ovvio il modo con cui questo sistema nullo si può immaginare dedotto da quello che nel n.° 5 si è chiamato Θ .

Se invece d è pari, si è dimostrato nel n.º 6 che, fra i gruppi dell'involuzione fondamentale, uno ed uno solo, in generale, ha tutti i suoi punti in un piano, che diremo π . Se per semplicità si assume π come piano avente l'equazione

$$x_{d+1} = 0,$$

sarà

$$A_{1,d+1} = 0, \dots, \quad A_{d,d+1}^* = 0,$$

e la condizione (10) diventa

$$v_1 \sum_1^d A_{1i} u_i + \dots + v_d \sum_1^d A_{di} u_i = 0.$$

Da essa risulta che nel caso attuale resta determinato in π un sistema nullo, che chiameremo N_π e nel quale un punto ed un S_{d-2} fra loro corrispondenti sono tali che le sezioni fatte in C_n^d da due piani qualunque, passanti l'uno per il punto e l'altro per l' S_{d-2} , sono apolari.

18. Ciò posto, sia

$$\sum_1^{d+1} \xi_i x_i = 0 \tag{12}$$

l'equazione di un piano secante C_n^d in un gruppo dell'involuzione determinata da un S_{h-1} qualunque, di guisa che i parametri dei punti del gruppo stesso saranno le radici dell'equazione

$$\sum_1^{d+1} \xi_i a_{i,\lambda}^n = 0. \tag{13}$$

Indicando poi con $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,d+1}$ ($i = 1, 2, \dots, d-h+1$) le coordinate di $d-h+1$ piani che determinano l' S_{h-1} come loro comune intersezione, le forme

$$\sum_1^{d+1} u_{1,i} a_{i,\lambda}^n, \quad \sum_1^{d+1} u_{2,i} a_{i,\lambda}^n, \dots, \quad \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} a_{i,\lambda}^n$$

devono essere apolari al primo membro della (13). Scrivendo le condizioni perchè ciò avvenga, si hanno $d-h+1$ relazioni, ed eliminando da esse e dalla (12) le ξ_i , risulta che le equazioni dello spazio S_{d-h} , comune agli ∞^{h-1} piani contenenti gruppi della suddetta involuzione, si ottengono uguagliando a zero i determinanti di ordine $d-h+2$ tratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_{d+1} \\ \sum_1^{d+1} u_{1,i} A_{1,i} & \sum_1^{d+1} u_{2,i} A_{2,i} & \dots & \sum_1^{d+1} u_{d+1,i} A_{d+1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} A_{1,i} & \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} A_{2,i} & \dots & \sum_1^{d+1} u_{d-h+1,i} A_{d+1,i} \end{array} \right\|.$$

Di qui, ed anche senz'altro dalle cose del numero precedente, risulta:

L'involuzione determinata sopra C_n^d da uno spazio lineare qualunque S_{h-1} possiede ∞^{h-1} gruppi piani, i cui piani hanno in comune un S_{d-h} . Se n è pari, questo S_{d-h} è lo spazio polare reciproco del dato S_{h-1} rispetto alla quadrica Q ; se n è dispari e d pure dispari, l' S_{d-h} è lo spazio polare del dato S_{h-1} nel sistema nullo N ; se infine n è dispari e d è pari, l' S_{d-h} è contenuto nel piano π , ed è lo spazio polare, nel sistema nullo N_π , della traccia di S_{h-1} sopra π .

Colgo quest'occasione per aggiungere al mio lavoro più volte citato *Sui combinanti* ecc. (questi *Annali*, serie II, tom. 20) un complemento che non mi sembra del tutto sprovvisto d'interesse, e che mi è stato suggerito dallo studio di una Nota del sig. STEPHANOS (*), della quale ho avuto cognizione soltanto dopo la pubblicazione del lavoro suddetto. Nel § 5, n.º 28 di questo ho dimostrato che i covarianti elementari delle due forme

$$5(Ww)^2 W_\lambda^3 w_\lambda + 2(Qw) Q_\lambda w_\lambda^2, \quad w_\lambda^4 \quad (1)$$

coincidono, salvo fattori costanti, coi combinanti elementari W_λ^6 e Q_λ^5 , e che perciò, in particolare, l'equazione del piano osculatore alla quartica nel suo punto λ si ottiene uguagliando a zero il jacobiano delle (1). Ora, per notissime proprietà generali (**), il discriminante di questo jacobiano si spezza in due fattori, che sono razionali nei coefficienti delle due forme, e le cui espressioni, per due forme biquadratiche qualunque, furono date dal sig. STEPHANOS nella Nota ricordata. È manifesto che di questi due fattori l'uno, che è il

(*) *Sur le système complet des combinantes de deux formes binaires biquadratiques* (Comptes rendus, tom. 97, 2 luglio 1883).

(**) Veggasi per es. SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, 2.^a ediz. française, 1890, pag. 235: per il caso di due biquadratiche vedi pure pag. 397-398.

risultante delle (1), rappresenta l'insieme dei quattro piani stazionari della curva, l'altro la sviluppabile osculatrice della medesima (*): il primo, sotto forma leggermente diversa, trovasi già, insieme col suo significato geometrico, alla fine del § 3 del mio lavoro.

Nel caso presente, per quanto ho dimostrato nel loc. cit., n.º 28, le forme che il sig. STEPHANOS chiama α e θ sono le seguenti:

$$\alpha_{\lambda}^6 = -\frac{5}{4} i W_{\lambda}^6, \quad \theta_{\lambda}^2 = -\frac{1}{2} i Q_{\lambda}^2,$$

epperò si trova che i due fattori in cui si decompone il discriminante di α^6 sono rispettivamente

$$\frac{1}{2^{10} \cdot 3^2} i^4 [3^4 \cdot 5^2 A^2 + 2^6 B^2 - 2^4 \cdot 5 A B - 2 \cdot 3 \cdot 5^3 (JJ')^4], \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2^{13} \cdot 3^2} i^6 [2^9 \cdot 5^3 A^3 + 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 A^2 B - 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 A B^2 + 2^8 B^3 \\ & - 3^3 \cdot 5^6 A (JJ')^4 - 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 (JJ')^2 (JJ'')^2 (J' J'')^2] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La quantità che nella (2) è chiusa fra parentesi differisce da quella che nel § 3, loc. cit., ho chiamato D per ciò, che in questa al posto del termine $(WQ)^2 (WQ')^2 (WQ'')^2$ compare il termine $(JJ')^4$. Ma si può dimostrare facilmente che ha luogo l'identità

$$3 \cdot 5^4 (JJ')^4 - 2^6 B^2 - 2^2 \cdot 5^2 A B - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 (WQ)^2 (WQ')^2 (WQ'')^2 = 0,$$

mediante la quale le due espressioni, salvo un fattore numerico, diventano identiche.

Uguagliando a zero la quantità che nella (3) sta racchiusa fra parentesi, si ottiene *l'equazione della superficie sviluppabile della curva, formata coi combinanti elementari della curva stessa.*

Una ricerca analoga potrebbe farsi sulla forma che nel loc. cit. ho chiamato V_{λ}^6 , e che, uguagliata a zero, rappresenta il complesso lineare speciale

(*) Un fatto analogo ha luogo per la forma binaria [di grado $d(n-d+1)$ nel parametro λ], che uguagliata a zero rappresenta il piano osculatore nel punto λ di una C_n^d qualunque. Il suo discriminante si spezza in due fattori, di cui l'uno rappresenta l'insieme dei $(d+1)(n-d)$ piani aventi colla curva un contatto d'ordine d , e l'altro rappresenta lo spazio di $d-1$ dimensioni e d'ordine $(d-1)(n-d+2)$ formato dagli S_{d-2} osculatori alla curva stessa.

avente per asse la tangente alla quartica nel suo punto λ . Il discriminante di V_λ^6 deve spezzarsi (*) in due fattori razionali, di cui l'uno rappresenta il complesso di 4.° grado costituito dalle rette che si appoggiano in un punto alla curva, e l'altro il complesso di 6.° grado formato dalle tangenti alla superficie sviluppabile della stessa. Anche per questo caso si può tenere la via sopra seguita, poichè nel loc. cit., n.° 29 ho dimostrato che V_λ^6 è il jacobiano del fascio di forme biquadratiche determinato sulla curva dai piani passanti per la retta, di cui s'intendono sostituite in V_λ^6 le coordinate. Tale fascio si può supporre individuato, per esempio, dal piano che dalla retta data proietta il punto di concorso delle corde principali, e dal piano passante per la retta stessa, e conjugato al precedente rispetto ad una qualunque delle quadriche studiate nel loc. cit., § 4.

Pavia, 15 novembre 1892.

(*) Cfr. Voss, *Ueber Raumcurven und Developpabeln* (Math. Ann., Bd. 13, pag. 233).