Ueber die Lichtvertheilung auf einer unvollständig beleuchteten Planetenscheibe.

Von Dr. E. Anding.

Herr Prof. *Schur* hat in Nr. 3072 der A. N. die Mittheilung gemacht, dass gelegentlich der letzten Quadratur des Planeten Jupiter sich die früher von ihm und Anderen schon beobachtete Erscheinung wiederholte, dass derjenige Rand, welcher der Sonne zugewandt ist, scharf begrenzt, der andere verwaschen erscheine. Eine solche Vergleichung der Lichtvertheilung in der Phase hat ein Interesse für die Photometrie deshalb, weil die Lichtvertheilung auf einer vollen Scheibe niemals zur Prüfung eines supponirten photometrischen Grundgesetzes ausreicht, und weil es für gewisse Fälle, u. A. für die photometrische Theorie der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten von Wichtigkeit ist, die Modification der Lichtvertheilung durch das Auftreten eines, wenn auch kleinen, Phasenwinkels nicht zu unterschätzen. Ich werde also im Folgenden zeigen, dass die von Herrn Prof. *Schur* mitgetheilte Beobachtung nichts anderes ist, als dasjenige, was die unter plausiblen Annahmen abgeleiteten photometrischen Grundgesetze gerade fordern. Zuvor aber sollen diese Gesetze mit wenigen Worten abgeleitet werden.

Man bezeichne ein Oberflächenelement des beleuchteten Körpers mit df , ein Streckenelement normal zur Oberfläche mit ds , und nehme an, dass ein Lichtstrahl in den Körper unter dem Incidenzwinkel i eindringe, auf seinem Wege bis zum Raumelement $df ds$ theilweise absorbirt werde, durch dieses Element selbst zur Umkehr gezwungen und der unter dem Emanationswinkel ε fortschreitende Theil auf diesem zweiten Wege bis zur Oberfläche wieder theilweise absorbirt werde. Dann darf man, da es sich um ein räumliches Element handelt, auf die Schiefe des Incidenzwinkels nicht Rücksicht nehmen. Setzt man also die Dichtigkeit der einfallenden Strahlen normal zum Strahl $= 1$, so gelangt in das Element $df ds$ der Theil

$$e^{-k \frac{s}{\cos i}}$$

und es tritt in der Richtung ε die Lichtmenge aus:

$$e^{-k \frac{s}{\cos i}} \cdot c \cdot e^{-k \frac{s}{\cos \varepsilon}} df ds$$

wo k die positiv verstandene Absorptionsconstante und c gleichfalls eine Constante ist, vorausgesetzt, dass sich das Licht vom Element aus nach allen Seiten gleichförmig ausbreitet. Integriert man diesen Ausdruck

$$c e^{-k \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} s} df ds$$

von $s = 0$ bis $s = \infty$, so wird die in der Richtung ε austretende Lichtmenge

$$dQ = C \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} df \quad (1)$$

Dies ist das Lommel-Seeliger'sche Gesetz.

Man nehme jetzt an, dass zwischen den einzelnen Theilchen Wechselwirkungen stattfinden in unbeschränkter Anzahl, derart, dass jedes Theilchen jedem anderen Licht zusetzt, welches von dort wieder zerstreut wird u. s. w. Dann ist unter den auf ein beliebiges Theilchen auffallenden Strahlen einer, welcher direct von aussen kommt, unter den austretenden einer, der unter dem Winkel ε fortschreitet und direct nach aussen gelangt. Bei einem Theilchen A betrachte man den ersten, bei einem Theilchen B den zweiten Strahl; der letztere Strahl wird sich aus unzähligen Theilen zusammensetzen, deren jeder von einem anderen Anfangselement $A, A_1, A_2, \dots$ herrührt. Unter diesen fassen wir nur denjenigen Antheil ins Auge, der nach beliebig vielen Zwischenwegen $AE, EF, \dots FH, HB$ vom Anfangselement A herrührt und hier wiederum nur von demjenigen Theil, welchen A direct von aussen erhielt. Die Punkte A und B verbinde man durch eine gerade Linie, deren Mittelpunkt O heisse. O sei von der Oberfläche entfernt um s , A um $s - m$, B um $s + m$. Dann hat der in Frage kommende Antheil r des äusseren Strahles auf dem ersten Wege eine Absorption erlitten nach Maassgabe der Strecke $(s - m) : \cos i$, auf dem letzten Wege nach $(s + m) : \cos \varepsilon$. Also ist das ausgesandte Lichtelement proportional zu

$$c e^{-k \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} s} - k \frac{\cos i - \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} m \quad (a)$$

Dieser Ausdruck ist über sämtliche Theilchen A, B , welche zu demselben Punkt O gehören, zu integrieren. Hierzu setzen wir $m = r \cos \vartheta$ und multipliciren mit dem Raumelement $-r^2 dr d(\cos \vartheta) d\varphi$; ausserdem muss man zuvor multipliciren mit einer Function $f(s, r, \vartheta)$, welche die innere Schwächung ausdrückt und von der Art der Wechselwirkungen abhängig ist. Sie hat die Eigenschaft

$$f\left(s, r, \frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(s, r, \frac{\pi}{2} - x\right)$$

Nun liefert die Integration nach φ nur einen constanten Factor und bei der Integration nach $\cos \vartheta$ entsprechen zwei entgegengesetzt gleichen Werthen $\cos \vartheta$ zwei gleiche Werthe f und zwei symmetrische Werthe des anderen Factors, nämlich das eine Mal

$$e^{-k \frac{\cos i - \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} (\cos \vartheta) r}$$

das andere Mal

$$e^{-k \frac{\cos i - \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} (-\cos \vartheta) r} = e^{-k \frac{\cos \varepsilon - \cos i}{\cos i \cos \varepsilon} (\cos \vartheta) r}$$

Mithin ist, wenn man noch die Integration nach r ausgeführt hat, das Resultat $= \psi(i, \varepsilon, s)$ eine symmetrische Function von $\cos i$ und $\cos \varepsilon$. Diese hat man statt des letzten Factors in (a) einzusetzen und über alle Punkte O derselben Verticalen, d. h. nach s zu integrieren. Demnach hat das entsprechende photometrische Gesetz die Form

$$dQ = df \int_0^\infty e^{-k \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} s} \psi(i, \varepsilon, s) ds \quad (2)$$

$$dx_a dy_a dz_a \int x \varphi(r_{ae}) dx_e dy_e dz_e \cdot x \varphi(r_{ef}) dx_f dy_f dz_f \cdot \cdot \cdot x \varphi(r_{hb}) dx_b dy_b dz_b$$

wo sich das Integral auf das ganze Volumen des Körpers und auf alle Variablen ausser $x_b y_b z_b$ erstreckt. Multiplicirt man diesen Ausdruck noch mit x und mit

$$e^{-k \frac{\cos i - \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} z_b}$$

$$P = x dx_a dy_a dz_a$$

$$Q = x dx_a dy_a dz_a \int e^{-k \frac{\cos i - \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} z_b} x \varphi(r_{ab}) dx_b dy_b dz_b$$

$$R = x dx_a dy_a dz_a \int \int e^{-k \frac{\cos i - \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} z_b} x \varphi(r_{ae}) dx_e dy_e dz_e \cdot x \varphi(r_{eb}) dx_b dy_b dz_b$$

und hier entspricht P der Formel (1), Q den Zwischenwirkungen erster Ordnung, R denjenigen der zweiten u. s. w. Um die gegenseitigen Werthe dieser Grössen abzuschätzen, betrachte man zwei aufeinanderfolgende Glieder, etwa R und S . Da man sich zu den Raumelementen einen constanten Factor zugefügt denken muss derart, dass das Integral

$$\int \varphi(e_{ef}) dx_f dy_f dz_f$$

auf den ganzen Raum ausgedehnt, $= 1$ wird, so muss dasselbe Integral nur auf den Körper ausgedehnt, kleiner als 1 sein, und hieraus lässt sich leicht schliessen, dass auch S schon aus diesem Grund kleiner als R sein muss. In anderer Weise, nämlich mit Zuziehung der Function φ , lässt sich dies auch für die ersten zwei Glieder zeigen. Da nun von Glied zu Glied der Factor x hinzutritt, so folgt, dass die Reihe ψ stärker convergirt, als die Reihe $1 + x + x^2 + \dots$. Man erkennt auch, dass die Convergenz um so schwächer wird, je rascher $\varphi(r)$ mit zunehmendem r abnimmt. Die Hauptsache aber ist, dass das Glied P , d. h. also die Formel (1) in der That eine erste Näherung von (2) ist.

Man könnte sich einen Körper denken von solcher Beschaffenheit, dass die Theilchen nur auf die unmittelbar benachbarten einzuwirken vermögen. Dieser Fall ist das andere Extrem der Formel (2), so wie die Formel (1) das erste war. Im gegenwärtigen Fall aber sind die vorigen Betrachtungen nicht statthaft, weil eine Absorption überhaupt nicht zu Stande kommt. Man denke sich das von der Oberfläche begrenzte körperliche Element in Schichten zerlegt, deren jede eine Dicke hat $=$ unendlich klein zweiter Ord-

und ist also symmetrisch in Bezug auf $\cos i$ und $\cos \varepsilon$.

Um die Function ψ noch anders schreiben zu können, nehmen wir an, ein Theilchen strahle von der empfangenen Lichtmenge $=$ Einheit mal Raumelement den Theil x nach allen Seiten gleichmässig aus, und das ausgestrahlte Licht werde geschwächt nach Maassgabe der Function $\varphi(r)$ der Entfernung (umgekehrt wie das Quadrat, und ausserdem andere Einflüsse, z. B. Absorption). Es seien, bezogen auf den Punkt O als Anfangspunkt, die Coordinaten von A : x_a, y_a, z_a , von E : x_e, y_e, z_e u. s. w., dann werden die von B sein $x_b = -x_a, y_b = -y_a, z_b = -z_a$. Dann gelangt vom Punkt A zum Punkt B die Lichtmenge

$$\psi(i, \varepsilon, s) = P + Q + R + \dots$$

und dehnt man die Integration auch auf die Variablen $x_b y_b z_b$ aus mit dem Unterschied, dass sich z_b nur zwischen den Grenzen $-s$ und $+s$ bewegt, so ist das Resultat ein Glied der Function ψ . Dieselbe hat also im Ganzen die Form:

nung. Da nur die Flächenausdehnung in Betracht kommt, so ist die Dichtigkeit des einfallenden Lichts mit $\cos i$ zu multipliciren. Diese in die erste Schicht gelangende Menge wird zur Hälfte nach Aussen ausgestrahlt, zur Hälfte in die zweite Schicht gesandt. Von diesem Theil gelangt die Hälfte in die erste Schicht zurück, um sich hier abermals zu spalten, die andere Hälfte gelangt in die dritte Schicht, von wo sie wieder zum Theil in die zweite gesandt wird u. s. w. Um zu entscheiden, ob der Körper alles Licht wieder ausstrahlt, oder ein Theil im Innern verloren geht, verfolge man denjenigen Theil, welcher sich nur zwischen den zwei ersten Schichten hin und zurück bewegt. Hierbei wird von der ersten Schicht nach aussen gesandt der Theil:

$$\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots) = \frac{2}{3}$$

während in die dritte Schicht der Theil gelangt:

$$\frac{1}{4} (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots) = \frac{1}{3}$$

vorausgesetzt, dass die von aussen kommende Erregung $= 1$ war. Auf Grund hiervon schliesst man, dass die dritte Schicht nach aussen einen Beitrag liefert $= \frac{1}{6}$, während ein zweites Sechstel in die sechste Schicht gelangt. Wiederum hieraus folgt, dass die sechste Schicht nach Aussen den Beitrag $= \frac{1}{12}$ schickt u. s. w. Es ist aber

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots = 1$$

mithin findet eine Lichtverschluckung nicht statt — abgesehen natürlich vom Ausstrahlungsvermögen der Theilchen. Diese Betrachtung ist in dieser Form aber nur statthaft, wenn die Schichtung zugleich eine physische ist. Allgemein dagegen darf man schliessen, dass der Emanationswinkel

nicht in Frage kommt, weil die Schiefe der Ausstrahlung immer nur auf Theilchen derselben Schicht einwirkt. Mit- hin heisst das photometrische Gesetz:

$$dQ = C \cos i \, df \quad (3)$$

Die Formeln (1) und (3) gehören zu denjenigen, auf welche ich im Vorwort zu meiner Abhandlung »Photometri- sche Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupiters- trabanten« Bezug nehme.

Endlich sei noch die Lambert'sche Formel angeführt:

$$dQ = C \cos i \cos \varepsilon \, df \quad (4)$$

obgleich eine plausible Hypothese, auf Grund deren man diese Formel entwickeln könnte, meines Wissens nicht bekannt ist.

Um jetzt die Lichtvertheilung auf einer Planetenscheibe zu untersuchen, hat man in jeder der vier Formeln zu setzen:

$$df \cos \varepsilon = d\varphi$$

wo $d\varphi$ das Flächenelement der als eben gedachten Scheibe ist. Ferner bezeichne man den grössten Kreis durch die beiden Punkte, welche die Sonne und die Erde im Zenith haben, als Aequator, auf welchem vom Zenithpunkt der Erde aus die Längen ω und von dessen einem Pol die Poldistanzen $90^\circ - \psi$ gemessen werden. Setzt man also in die so umgewandelte Formel (1), nämlich

$$dQ = C \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} d\varphi$$

die Ausdrücke

$$\cos i = \cos \psi \cos (\omega - \alpha)$$

$$\cos \varepsilon = \cos \psi \cos \omega$$

wo α der Phasenwinkel ist, nämlich der Winkel am Planeten im Dreieck: Sonne, Erde, Planet; so wird bis auf einen constanten Factor:

$$dQ = [1/2 + 1/2 \operatorname{tg} 1/2 \alpha \operatorname{tg} (\omega - 1/2 \alpha)] d\varphi \quad (1^a)$$

Hieraus folgt, da ψ nicht vorkommt, dass die Curven gleicher Lichtstärke Halbellipsen sind, welche die Verbindungs- linie der Pole als grosse Axe haben. Ferner muss, wenn, wie bei Jupiter, α klein ist, der Ausdruck im Allge- meinen nahezu constant $= 1/2$ sein; jedoch in der Nähe des der Sonne zugewandten Randes nimmt die Helligkeit rasch zu, um im Rand selbst ($\omega = 90^\circ$) $= 1$ zu werden, während nach dem anderen Rande hin zunächst langsame, schliesslich rasche Abnahme stattfindet und im Rand selbst die Helligkeit null wird; d. h. also der erste Rand erscheint scharf begrenzt, der letztere verwaschen.

Zur anschaulichen Uebersicht sei für die bei Jupiter in Betracht kommenden Phasenwinkel die nachstehende Tabelle mitgetheilt, in welcher die letzte Decimale bis auf 0.6 Einheiten sicher ist.

Das Argument der Tafel ist die scheinbare Distanz der Aequatorpunkte vom Centrum, ausgedrückt im schein- baren Radius der voll gedachten Kreisscheibe als Einheit. Um den Verlauf in Bogensekunden zu übersehen, hat man, wenn bei der mittleren Entfernung 5.203 des Jupiter der Aequatorhalbmesser desselben $= 18''.7$ gesetzt wird:

für $\alpha = 0^\circ \quad 2^\circ \quad 4^\circ \quad 6^\circ \quad 8^\circ \quad 10^\circ \quad 11^\circ 4' 50''$ (Quad.)
Halbm. $= 23''.2 \quad 23''.1 \quad 22''.9 \quad 22''.5 \quad 21''.8 \quad 20''.7 \quad 19''.1$

Helligkeit $= 0.500 +$

$\sin \omega$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 4^\circ$	$\alpha = 6^\circ$	$\alpha = 8^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 12^\circ$
0.0	—0.000	—0.001	—0.001	—0.002	—0.004	—0.006
0.1	+0.001	+0.001	+0.001	+0.001	+0.001	—0.000
0.2	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	+0.005
0.3	0.003	0.005	0.007	0.008	0.010	0.011
0.4	0.004	0.007	0.010	0.012	0.015	0.017
0.5	0.005	0.009	0.013	0.017	0.020	0.023
0.55	0.006	0.011	0.015	0.020	0.024	0.027
0.60	0.006	0.012	0.018	0.023	0.027	0.031
0.65	0.007	0.014	0.020	0.026	0.031	0.036
0.70	0.008	0.016	0.023	0.030	0.036	0.042
0.75	0.010	0.018	0.027	0.035	0.042	0.048
0.80	0.011	0.022	0.031	0.040	0.049	0.057
0.82	0.012	0.023	0.034	0.043	0.052	0.061
0.84	0.013	0.025	0.036	0.047	0.056	0.065
0.86	0.014	0.027	0.039	0.050	0.061	0.070
0.88	0.016	0.030	0.043	0.055	0.066	0.077
0.90	0.017	0.033	0.048	0.061	0.073	0.085
0.91	0.018	0.035	0.050	0.064	0.077	0.089
0.92	0.019	0.037	0.054	0.068	0.082	0.094
0.93	0.021	0.040	0.057	0.073	0.087	0.101
0.94	0.023	0.043	0.062	0.079	0.094	0.108
0.95	0.025	0.047	0.068	0.086	0.102	0.117
0.955	0.026	0.050	0.071	0.090	0.107	0.122
0.960	0.028	0.053	0.075	0.095	0.112	0.128
0.965	0.030	0.056	0.080	0.100	0.119	0.135
0.970	0.032	0.061	0.085	0.107	0.126	0.144
0.975	0.035	0.066	0.092	0.115	0.136	0.154
0.980	0.039	0.073	0.101	0.126	0.148	0.167
0.982	0.042	0.076	0.106	0.131	0.154	0.173
0.984	0.044	0.080	0.111	0.137	0.160	0.180
0.986	0.047	0.085	0.117	0.144	0.168	0.188
0.988	0.050	0.091	0.124	0.153	0.177	0.198
0.990	0.054	0.098	0.133	0.163	0.188	0.209
0.991	0.057	0.102	0.139	0.169	0.194	0.216
0.992	0.060	0.107	0.145	0.176	0.201	0.223
0.993	0.064	0.113	0.152	0.184	0.210	0.232
0.994	0.068	0.120	0.160	0.193	0.219	0.241
0.995	0.074	0.129	0.171	0.204	0.231	0.253
0.996	0.081	0.140	0.183	0.218	0.245	0.267
0.997	0.092	0.155	0.201	0.236	0.263	0.285
0.998	0.108	0.177	0.226	0.261	0.288	0.310
0.999	0.140	0.219	0.269	0.304	0.329	0.349
1.000	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

Auf der negativen Seite der Scheibe ist der Verlauf im Grossen und Ganzen ein ähnlicher, nur dass die Abnahme am Rande weniger rasch erfolgt, als die Zunahme am posi- tiven Rande, wodurch das verwaschene Aussehen noch ver- stärkt wird.

Um jetzt die allgemeine Formel (2) zu discutiren, schreiben wir sie wegen der zwei abgeleiteten Haupteigen- schaften, nämlich erstens, dass sie symmetrisch ist, zwei-

tens, dass die Formel (1) eine Näherung von ihr ist, in folgender Form:

$$dQ = C \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} df + F(\cos i \cos \varepsilon) df$$

wo also F symmetrisch ist nach $\cos i$ und $\cos \varepsilon$. Nimmt man wieder auf die scheinbare Fläche Bezug, so wird

$$dQ = C \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} (\omega - \frac{1}{2} \alpha) \right) d\varphi + \frac{1}{\cos \psi \cos \omega} F(\cos \psi \cos (\omega - \alpha), \cos \psi \cos \omega) d\varphi \quad (2^a)$$

Man setze $\omega = \frac{1}{2} \alpha + x$. Da aber wegen der Symmetrie

$$F(\cos \psi \cos (x - \frac{1}{2} \alpha), \cos \psi \cos (x + \frac{1}{2} \alpha)) = F(\cos \psi \cos (x + \frac{1}{2} \alpha), \cos \psi \cos (x - \frac{1}{2} \alpha))$$

und wiederum, da nur die Cosinus auftreten

$$F(\cos \psi \cos (x + \frac{1}{2} \alpha), \cos \psi \cos (x - \frac{1}{2} \alpha)) = F(\cos \psi \cos (-x - \frac{1}{2} \alpha), \cos \psi \cos (-x + \frac{1}{2} \alpha))$$

so hat F für $+x$ und $-x$ denselben Werth. Nun ist aber der hinzutretende Factor

$$\frac{1}{\cos \psi \cos (x + \frac{1}{2} \alpha)} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{\cos \psi \cos (-x + \frac{1}{2} \alpha)}$$

im ersten Fall grösser, als im zweiten, mithin wird die Eigenthümlichkeit des ersten Gliedes, dass von Punkten, die sich in dieser Weise entsprechen, stets der nach dem positiven Rand hin liegende der hellere ist, nicht gestört. Speciell auch für den positiven Rand, wo $\omega = 90^\circ$, und für den negativen, wo $\omega = -90^\circ + \alpha$, hat F denselben Werth; dagegen verhalten sich die hinzutretenden Factoren wie $1:0$, d. h. also wieder: der positive Rand muss scharf begrenzt, der negative verwaschen erscheinen. Denn da das erste Glied diese Eigenschaft zeigt, so könnte dieselbe durch Hinzutreten des zweiten Gliedes nur dann gestört werden, wenn das erste Glied an beiden Rändern verschwände und ebenso das zweite an beiden Rändern $= 0$ wäre. Hieraus würde aber folgen, dass das erste Glied überhaupt verschwinden müsste, und dies kann nicht der Fall sein, da bewiesen wurde, dass das erste Glied allein einen endlichen Theil des ganzen Ausdrucks bildet, welcher selbstverständlich im Allgemeinen endlich ist. Es zeigt also die Formel (2^a) bezüglich der Ränder dieselbe Eigenthümlichkeit wie (1^a).

Die Formel (2) gehört nicht zu denjenigen, welche bei voller Beleuchtung eine gleichmässig helle Scheibe ergeben. Hierzu würde erforderlich sein, dass das Gesetz die Form hat

$$dQ = \cos \varepsilon \Phi[(\cos i - \cos \varepsilon) \varphi(\cos i, \cos \varepsilon)] df$$

Dieser Form entspricht aber die Formel (1), und ebenso die Formel (3), welche jetzt zu betrachten ist. In

$$dQ = C \cos i df = C \frac{\cos i}{\cos \varepsilon} d\varphi$$

setze man wieder

$$\cos i = \cos \psi \cos (\omega - \alpha), \quad \cos \varepsilon = \cos \psi \cos \omega;$$

dann kann man schreiben:

$$dQ = C \cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \omega) d\varphi \quad (3^a)$$

Die Curven gleicher Helligkeit sind also wieder dieselben Ellipsen wie bei (1^a), und die Helligkeit nimmt wieder vom positiven zum negativen Rand ununterbrochen ab. Die Verschiedenheit der Ränder markirt sich noch schärfer, indem die Helligkeit am positiven Rand längs eines unendlich schmalen

Streifens unendlich wird, während sie unendlich klein ist am negativen Rande längs eines Streifens, dessen Breite zwar gleichfalls unendlich klein, aber von niedriger Ordnung ist als am anderen Rande. Für $\alpha = 6^\circ$ wird beispielsweise, wenn die Helligkeit im Zenithpunkt der Erde $= 1$ gesetzt wird, mit dem Argument: $\sin \omega =$ die längs dem Aequator gemessene scheinbare Distanz von diesem Punkt in Einheiten des scheinbaren Halbmessers

$\sin \omega$	Helligkeit $= 1 +$	$\sin \omega$	Helligkeit $= 1 +$
0.0	0.000	0.91	0.231
0.1	0.011	0.92	0.247
0.2	0.021	0.93	0.266
0.3	0.033	0.94	0.290
0.4	0.046	0.95	0.320
0.5	0.061	0.96	0.360
0.6	0.079	0.97	0.419
0.7	0.103	0.98	0.517
0.8	0.140	0.99	0.737
0.9	0.225	1.00	∞

Endlich kann man auch die Lambert'sche Formel

$$dQ = C \cos i \cos \varepsilon df$$

in der Form schreiben:

$$dQ = C \cos (\omega - \alpha) \cos \psi d\varphi \quad (4^a)$$

Die Curven gleicher Helligkeit sind hier, wie man aus der Form: $dQ = C \cos i d\varphi$ sieht, Ellipsen, deren Mittelpunkt und Axengrösse veränderlich sind, während das Axenverhältniss constant $= 1 : \cos \alpha$ ist. Gleichzeitig nimmt im Gegensatz zu den drei vorigen Gesetzen die Helligkeit vom Punkte $\omega = \alpha$ aus nach beiden Seiten hin ab. Herr Prof. *Seeliger*, welcher ebenso wie Herr Dr. *Oertel*, aus Anlass der Notiz des Herrn Prof. *Schur* die Jupiterscheibe beobachtet hat, theilt mir mit, dass dieser Verlauf augenscheinlich nicht nach der Lambert'schen Formel, vielmehr weit eher im Sinne einer Abnahme vom positiven zum negativen Rand vor sich geht.

Würde $\alpha = 0$ sein, so würde das Lambert'sche Gesetz die Helligkeit geben:

$\sin \omega$	Helligkeit	$\sin \omega$	Helligkeit
0.0	1.000	0.91	0.415
0.1	0.995	0.92	0.392
0.2	0.980	0.93	0.368
0.3	0.954	0.94	0.341
0.4	0.916	0.95	0.312
0.5	0.866	0.96	0.280
0.6	0.800	0.97	0.243
0.7	0.714	0.98	0.199
0.8	0.600	0.99	0.141
0.9	0.420	1.00	0.000

Ist α nicht $= 0$, so giebt dieselbe Tafel den Verlauf für $\psi = 0$, wenn man $\sin \omega$ mit $\cos \alpha$, d. h.

bei $\alpha = 0^\circ \quad 2^\circ \quad 4^\circ \quad 6^\circ \quad 8^\circ \quad 10^\circ \quad 12^\circ$
mit $1 - 0.000 \quad 0.001 \quad 0.002 \quad 0.005 \quad 0.010 \quad 0.015 \quad 0.022$

multiplicirt, ferner den zugehörigen Tafelwerth mit

0.000 0.035 0.070 0.105 0.139 0.174 0.208 (b)

multiplicirt, und zur Summe beider Producte aus der Tafel die Helligkeit entnimmt. Am negativen Rande ist die Helligkeit stets $= 0$, während sie am positiven $=$ den Werthen (b) ist. Selbst hier findet also am positiven Rande eine schärfere Begrenzung als am negativen statt, was sich noch verstärkt, wenn man wieder auf die Breitenordnung der Streifen Rücksicht nimmt.

Herr Prof. *Seeliger*, welcher mich zu dieser Mittheilung auffordert, macht mich darauf aufmerksam, dass diese Verhältnisse modificirt werden durch die Beugung am Objectivrande des Fernrohrs. Ich werde diese Wirkung in folgender Weise abschätzen: Einem leuchtenden Punkt entspricht als gebeugtes Bild ein leuchtendes Scheibchen, dessen Intensität vom Centrum nach dem Rande hin nach einem constanten Gesetz abnimmt, und zu welchem sich eine Reihe leuchtender Ringe von abnehmender Intensität hinzufügt. Ist das Object eine Scheibe, so werden sich die Beugungsbilder der einzelnen Punkte derselben gegenseitig überdecken. In der Nähe des Randes, aber noch innerhalb der geometrischen Scheibe ist die Anzahl der einen gleichen Einfluss üübenden Bildpunkte kleiner, oder diese Punkte sind weiter entfernt. Die Intensität nimmt also nach dem Rande hin ab, wird im Rand selbst etwa $= 1/2$, um sodann weiter und zwar symmetrisch zum Rande abzunehmen. Dieses Verhalten findet statt, wenn die geometrische Scheibe gleichmässig leuchtet. Die Werthe der unten folgenden Tabelle sind aus H. Struve's Intensitätstafel (*Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben*, Petersburg 1882, S. 54 und 55) interpolirt und auf centrale Helligkeit $= 1$ reducirt. Das Argument ist wieder die Distanz vom Centrum in Einheiten des geometrischen Halbmessers.

Da sich die Abnahme hauptsächlich in einem Intervall von etwa 0.20 vollzieht, so ist sie rascher, als wenn man die Giltigkeit des Lambert'schen Gesetzes voraussetzen und auf die Beugung nicht Rücksicht nehmen würde. Die Tabelle gilt übrigens für

$$\frac{2\pi}{\lambda} R \rho = 50$$

wo λ die Wellenlänge, R der Halbmesser des Objectivs und ρ der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes in Radiuseinheiten ist. Setzt man $\lambda = 580 \mu\mu$, so wird der Factor von ρ Bogensekunden dann $= 1$, wenn $2R = 16.9$ Pariser Linien ist. Bei Jupiter gilt also die Tafel für ein beiläufig 3zölliges Rohr. Bei einem anderen Fernrohr kann man den Einfluss genau genug übersehen, wenn man das vom geometrischen Rand aus gezählte Argument mit dem Verhältniss multiplicirt, in welchem die Oeffnung vergrößert ist, und dann dieselbe Tabelle benutzt.

Tabelle.

0.00	1.000	2.00	0.001
...	...	...	...
0.80	0.987	1.20	0.012
0.90	0.962	1.10	0.034
0.91	0.956	1.09	0.039
0.92	0.948	1.08	0.044
0.93	0.944	1.07	0.048
0.94	0.938	1.06	0.055
0.95	0.924	1.05	0.068
0.96	0.893	1.04	0.098
0.97	0.834	1.03	0.155
0.98	0.744	1.02	0.243
0.99	0.626	1.01	0.359
1.00	0.492	1.00	0.492

Ist jetzt die Intensität des geometrischen Bildes nicht constant, sondern nimmt sie von dem einen nach dem anderen Rande hin zu, so denke man sich für einen ausserhalb des geometrischen Randes liegenden Punkt die Intensitäten der Beugungsbilder als Ordinaten von Curven aufgetragen, deren Abscissen die Entfernungen vom Rande sind. Nimmt nun im geometrischen Bild die Intensität nach dem Rande hin zu, so werden die Intensitätscurven auf einer zur Abscissenaxe senkrechten Graden kleinere Ordinaten ausschneiden, als wenn die Scheibe mit der constanten Randintensität leuchten würde; und da diese Curven affin sind, so kann man leicht schliessen, dass das Verhältniss der Randintensität des gebeugten Bildes zur äusseren Intensität desselben in unserem Fall kleiner ist, als im Fall einer gleichmässig hellen geometrischen Scheibe. Nimmt dagegen die Helligkeit des geometrischen Bildes nach dem Rande hin ab, so ergibt sich das Umgekehrte. Das Ergebniss ist also, dass der Einfluss der Beugung die dem geometrischen Bild eigenthümliche Lichtgruppierung am Rande in stärkerem Maasse verwischt, als es nach der vorigen Tafel scheinen könnte. Man wird sich diese Bemerkung vor Augen halten müssen, wenn man die durch die photometrischen Gesetze gegebenen Lichtvertheilungen durch die Beobachtung prüfen will.

Man kann dieses Resultat auch analytisch einsehen. Sei $H(x, y)$ die Helligkeit des geometrischen Bildes im Punkt xy , $x = \psi(y)$ und $x = \varphi(y)$ die Gleichung des Randes auf der einen und auf der anderen Seite, $\pm \rho$ die 2 äussersten Werthe von y , $x_0 y_0$ ein Punkt des gebeugten Bildes ausserhalb des Randes, f die Brennweite, ξ der Winkelabstand des Punktes $x_0 y_0$ vom Punkte xy , J_1 die erste Bessel'sche Function, also

$$\mathcal{F}_n(z) = \frac{z^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right)$$

endlich

$$\mathcal{F}(\xi) = 4\pi^2 R^4 \left\{ \frac{\mathcal{F}_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} R \xi\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} R \xi} \right\}^2$$

so ist die Helligkeit im Punkt $x_0 y_0$

$$L = \int_{-\rho}^{+\rho} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} H(x, y) \mathcal{F}\left(\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{f}\right) dx dy$$

Also wird, wenn man nach x_0 differentiirt und dabei beachtet, dass

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_0} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}$$

sodann aber nach x partiell integrirt:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \int_{-\rho}^{+\rho} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(H(x, y) \mathcal{F} \right) + \int_{-\rho}^{+\rho} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial H}{\partial x} \mathcal{F} dx dy$$

Da beide Glieder entgegengesetztes Zeichen haben, so folgt zunächst für den positiven Rand, d. h. für denjenigen, nach welchem hin die Intensität des geometrischen Bildes zunimmt, dass der Differentialquotient nicht so stark negativ

ist, als wenn H constant wäre. Um diesen Schluss auch für den negativen Rand zu ziehen, muss man entweder die Mehrdeutigkeit der bei der Differentiation auftretenden Quadratwurzel beachten, oder wenn man dies umgehen will, H sich als nach der positiven Seite hin abnehmend denken.

Herr Prof. *Schur* citirt in seiner Notiz seine Abhandlung über die Masse des Planeten Jupiter. An der betreffenden Stelle spricht er die Ansicht aus, dass jenes Verhalten der Ränder auf eine Atmosphäre zu deuten scheine. Dem gegenüber muss aber bemerkt werden, dass auch ein fester Körper, sobald seine Oberfläche nur die mindesten Unebenheiten hat, dieselbe Erscheinung zeigen muss und zwar infolge des Schattenwurfs. Ist nämlich die Elevation der schattenwerfenden Flächen nicht grösser als 90° , so sieht ein Beobachter den positiven Rand voll erleuchtet, während auf dem negativen die Lichtstellen durch Schatten unterbrochen sind. Bei grossem Phasenwinkel (α) ist diese Erscheinung beim negativen Rand sofort durch einen Blick ins Fernrohr erklärt, aber selbst um die Zeit des Vollmondes ist, wie der Verf. seit Jahren beobachtet, mit blossem Auge durch die Vergleichung der gegenseitigen Intensität der Ränder weit eher und viel schärfer zu entscheiden, ob man vor oder nach dem Vollmond steht, als sich dies durch die veränderte Gestalt der Mondscheibe ausspricht.

München 1892 Februar.

E. Anding.

Beobachtungen des Cometen 1890 II auf der Göttinger Sternwarte.

Am grossen Heliometer von Dr. L. Ambronn.

1890	M. Z. Gött.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Vgl.	α app.	$\log p.\Delta$	δ app.	$\log p.\Delta$	Red. ad l. app.	*
April 14	14 ^h 36 ^m 59 ^s .1	— 0 ^m 8 ^s .29	— 1' 22".8	4	21 ^h 9 ^m 57 ^s .64	9.572 _n	+18° 8' 10".8	0.768	— 0 ^m 69 — 14".3	1
15	14 12 5.6	— 0 43.69	— 5 14.6	4	21 9 41.24	9.583 _n	+18 44 6.9	0.787	— 0.66 — 14.4	2
15	14 34 4.0	+ 0 14.21	+ 6 40.5	4	21 9 39.89	9.573 _n	+18 44 10.5	0.763	— 0.66 — 14.3	3
Mai 8	11 43 14.4	— 1 50.68	— 0 44.6	4	20 50 13.19	9.657 _n	+35 56 19.0	0.752	+ 0.16 — 16.5	4
16	11 23 47.1	+ 0 17.88	— 15 15.0	4	20 32 53.38	9.701 _n	+43 25 3.4	0.652	+ 0.63 — 16.6	5
16	11 49 27.8	— 1 45.41	— 0 25.1	4	20 32 56.63	9.692 _n	+43 26 5.8	0.578	+ 0.61 — 16.3	6
17	11 32 58.1	+ 0 0.70	— 3 3.7	4	20 30 9.49	9.703 _n	+44 23 43.9	0.610	+ 0.69 — 16.5	7
17	11 50 18.2	— 0 45.66	— 2 55.3	4	20 30 7.45	9.695 _n	+44 24 27.8	0.569	+ 0.68 — 16.5	8
18	10 20 29.4	— 0 11.38	+ 5 43.2	4	20 27 19.26	9.717 _n	+45 19 26.3	0.713	+ 0.75 — 16.4	9
19	12 5 19.6	— 0 34.81	— 1 14.0	4	20 23 54.87	9.691 _n	+46 22 29.3	0.465	+ 0.83 — 16.3	10
22	10 55 41.4	— 2 8.41	+ 7 29.9	4	20 13 16.44	9.743 _n	+49 16 25.8	0.556	+ 1.05 — 15.8	11
23	10 28 19.3	— 3 15.21	+ 20 35.7	4	20 9 17.34	9.757 _n	+50 13 58.7	0.593	+ 1.12 — 15.6	12
24	11 2 14.2	— 0 17.39	— 11 4.9	4	20 4 51.60	9.750 _n	+51 13 20.6	0.466	+ 1.24 — 15.4	13
25	10 48 14.9	— 0 1.32	— 4 38.9	4	20 0 18.32	9.762 _n	+52 11 3.3	0.467	+ 1.33 — 15.1	14
Juni 8	10 32 26.7	+ 0 14.09	+ 0 44.2	4	18 19 51.29	9.720 _n	+63 21 29.6	9.704 _n	+ 2.94 — 6.1	15
8	10 55 5.0	+ 0 4.45	+ 1 14.0	4	18 19 41.65	9.762 _n	+63 21 59.4	9.840 _n	+ 2.94 — 6.2	15

Bemerkungen.

April 14. In P.W. 194° Nebelhülle etwas ausgedehnter. Leichte Verdichtung.
 » 15. Kernartiger Theil etwas ausgeprägter. Ausdehnung der Nebelhülle wie April 14. Bei der zweiten Beobachtung Comet sehr schwach.

Mai 8. Helligkeit des Cometen stark wechselnd; ausgeprägte centrale Verdichtung.
 » 25. Sehr unruhige Bilder.
 Juni 8. Comet recht hell, ausgesprochener Kern.