SULLA RIFRAZIONE DI UNA SUPPOSTA ATMOSFERA LUNARE.

NOTA

DEL PROF. F. O. MOSSOTTI.

Questione. Si domanda se è possibile che un raggio di luce che parte da una stella e traversa l'atmosfera lunare sia rifratta in modo che l'immagine della stella, che esso dipinge, si proietti sopra il disco della luna.

Risposta. Le equazioni del movimento di una molecola luminosa che penetra un mezzo composto di coppe sferiche concentriche di poter rifrangente variabile, espresso da $k\Delta$, quando si prenda per origine delle coordinate il centro della sfera, sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{d\Delta}{dr} \frac{x}{r}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = k \frac{d\Delta}{dr} \frac{y}{r}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = k \frac{d\Delta}{dr} \frac{z}{r}$$

le quali forniscono direttamente i quattro integrali

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

$$x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} = c'$$

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c''$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = k\Delta + v^2;$$

v essendo la velocità della luce nel vuoto.

Le prime tre moltiplicate rispettivamente per x , — y , e z e sommate danno

$$cx - c'y + c''z = 0$$

Quest'equazione ci mostra che la traiettoria descritta dal raggio di luce è un piano che passa per l'origine delle coordinate o pel centro della sfera.

Poichè la curva descritta dalla molecola luminosa giace in un piano, prendiamo questo piano per quello delle xy ; in tal caso z e $\frac{dz}{dt}$ saranno sempre nulle, e si avranno semplicemente le due equazioni

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c; \quad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 + k\Delta.$$

Permutando le differenziali, così che siano prese relativamente ad s ed eliminando $\frac{ds}{dr}$ fra le due equazioni si avrà

$$(1) \quad x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{v^2 + k\Delta}}$$

Questa equazione è quella che va a fornirci la risposta al quesito.

Chiamiamo $180^\circ - \theta$ l'angolo che la tangente della traiettoria fa coll'asse delle x , così che sia

$$(2) \quad \frac{dx}{ds} = -\cos \theta \qquad (3) \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta$$

e riferiamo la curva alle coordinate polari, ponendo

$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi$$

con queste denominazioni la precedente equazione darà

$$r \sin (\varphi + \theta) = \frac{c}{\sqrt{v^2 + k\Delta}}$$

che servirà a determinare la costante arbitraria c . In fatti è facile di verificare che l'angolo $\varphi + \theta$ è quello che fa la tangente alla traiettoria col raggio r ; supponiamo che al limite dell'atmosfera dove $k\Delta = 0$ ed $r = 1 + \tau$ sia ζ il valore di questo angolo, si avrà

$$(1 + \tau) \sin \zeta = \frac{c}{v}, \quad c = v(1 + \tau) \sin \zeta$$

e quindi

$$r \sin (\varphi + \theta) = \frac{(1 + \tau) \sin \zeta}{\sqrt{1 + \frac{k}{v^2} \Delta}}$$

Dalle equazioni (2) e (3) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \left(\cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{dr}{ds}; & \frac{dy}{ds} &= \left(\sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{dr}{ds} \\ x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} &= r^2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{ds} & \frac{ds^2}{dr^2} &= 1 + r^2 \frac{d\varphi^2}{dr^2} \end{aligned}$$

sostituendo questi valori, e quello di c , nell'equazione (1) si avrà finalmente l'equazione della traiettoria del raggio di luce riferito alle coordinate polari, che sarà

$$d\varphi = \frac{dr}{r \sqrt{\frac{(1 + \frac{k}{v^2} \Delta) r^2}{(1 + \tau)^2 \sin^2 \zeta} - 1}}$$

Per semplificare un poco quest'equazione, prendiamo per unità il raggio della sfera solida, o della luna, e supponiamo che k rappresenti il poter rifrangente alla sua superficie cosichè quando $r = 1$ si abbi pure $\Delta = 1$; considerando Δ come una funzione di r , e posto per brevità, $\frac{k}{v^2} = i$, facciamo

$$\frac{1 + i \Delta}{1 + i} = \frac{\varphi(r)}{r^2}$$

Con queste posizioni l'equazione precedente prenderà la forma

$$d\varphi = \frac{d \log r}{\sqrt{\varphi(r) - \frac{(1 + \tau)^2}{1 + i} \sin^2 \zeta}}$$

Consideriamo un raggio di luce che parte da un punto della superficie lunare, e sorte dall'atmosfera. Sia M il minimo valore che può avere la funzione $\varphi(r)$ in tutta l'estensione dell'atmosfera; affinchè il radicale della precedente equazione si mantenga sempre reale, ed il raggio di luce possa di fatto uscire, dovrà essere

$$\frac{(1 + \tau)^2}{1 + i} \sin^2 \zeta < M$$

Dunque il più gran valore di $\sin^2 \zeta_0$, sotto il quale un raggio di luce, che parte dalla superficie della luna, può sortire dall'atmosfera, sarà dato dall'equazione

$$\sin^2 \zeta_0 = \frac{i + \tau}{(1 + \tau)^2} M.$$

Suppongasi ora che un raggio di luce entri nell'atmosfera lunare per attraversarla e sortire dalla parte opposta: Questo raggio nel suo corso si avvicinerà al centro della luna sino ad un certo punto per poi allontanarsi, di modo che r avrà un minimo, e sarà per questo punto $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, dunque per questo valore l'equazione (3) darà

$$\varphi(r) = \frac{(1 + \tau)^2}{1 + i} \sin^2 \zeta$$

o sia

$$\sin^2 \zeta = \frac{1 + i}{(1 + \tau)^2} \varphi(r)$$

Ma il secondo membro ha per valore minimo $\sin^2 \zeta_0$ dunque dovrà sempre essere

$$\sin^2 \zeta > \sin^2 \zeta_0$$

e come i due raggi di luce non possono uscire dall'atmosfera della stessa parte delle