V. *Beiträge zur Krystallographie; von Carl Friedrich Naumann.*

Wenn die Krystallographie einerseits durch die von Weifs aufgestellte Lehre von den *Axen* einer analytisch geometrischen Behandlung entgegengeführt worden ist, so hat sie andererseits in dem, von demselben Krystallographen aufgestellten Gesetze der *Zonenbildung* eine Nachweisung darüber erhalten, warum die Natur vorzugsweise nur diese und jene, und keine andere, immer aber nur solche Formen producirt hat, welche unter dem Gesetze rationaler Ableitungszahlen stehen. Sie verdankt daher den Arbeiten jenes ausgezeichneten Forschers nicht nur eine rationellere mathematische Begründung, sondern auch eine Einsicht in das außerdem räthselhafte Naturgesetz, welches die Krystallformen beherrscht.

In meinem Lehrbuche der Krystallographie habe ich zwar die analytisch-geometrische Methode so viel als möglich anzuwenden gesucht, die Zonenlehre dagegen keiner Bearbeitung unterworfen. Ich werde daher diese Lücke in dem gegenwärtigen und einem nachfolgenden Aufsatze auszufüllen versuchen, und dabei auch die trefflichen Arbeiten berücksichtigen, welche Neumann und Quenstedt für diesen Theil der Krystallographie geliefert haben ¹⁾).

Einleitende Erläuterung.

Unter einer *Zone von Krystallflächen*, oder unter einer *Zone* schlechthin versteht Weifs einen Inbegriff

- 1) Ob jedoch die bisherige Nichtberücksichtigung der graphischen Methode in den krystallographischen Lehrbüchern zu dem Vorwurf berechne, daß sie nur *abstracte* Formen festhielten und durch *Theorien* das Gebiet der Krystallographie zu erweitern suchten, diess erlaube ich mir zu bezweifeln.

von lauter solchen Krystallflächen, welche einer und derselben Linie im Raume parallel sind. Diese Linie selbst nennt er die *Zonenaxe*, wofür wir das Wort *Zonenlinie*¹⁾ gebrauchen wollen, um das Wort *Axe* ausschliesslich den eigentlichen krystallographischen Axen vorzubehalten. Jede Zone wird natürlich durch die Zonenlinie, und diese wiederum durch je zwei beliebige Flächen der Zone bestimmt. Dabei ist es zwar an und für sich ziemlich gleichgültig, welche zwei Flächen man wählt; doch wird man durch ein Flächenpaar immer leichter und schneller zum Ziele gelangen, als durch ein anderes. Von denjenigen Flächen, welche die einfachste Bestimmung einer Zone gewähren, wollen wir künftig sagen, daß sie die Zone charakterisiren.

Immer aber bleibt es vom krystallographischen Gesichtspunkte aus die natürlichste, und vom analytisch-geometrischen Gesichtspunkte aus die richtigste Auffassungsweise der Zonenlinie, wenn man sie als den Durchschnitt zweier Flächen sich denkt. Denn die Flächen sind an allen Krystallformen das zunächst und unmittelbar Gegebene, und die ganze analytisch-geometrische Darstellungsweise der Linie beruht auf der Vorstellung, daß sie der Durchschnitt zweier Flächen sey²⁾.

Eine Zone wird durch die projicirenden Ebenen der
Zonenlinie charakterisirt.

Es seyen in einem rechtwinklichen oder orthoëdrischen Axensysteme irgend zwei Krystallflächen F und

- 1) Welches also hier in ganz anderm Sinne zu nehmen ist, als bei Neumann, in seinen Beiträgen zur Krystallonomie, S. 11 u. f.
- 2) Streng genommen sind es nicht die Gleichungen zweier Projectionen, wie fast in allen Lehrbüchern der analytischen Geometrie gesagt wird, sondern die Gleichungen zweier projicirenden Ebenen, wodurch die Linie bestimmt wird.

F' gegeben, welche einer zu betrachtenden Zone angehören; ihre Gleichungen seyen ¹):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1.$$

Die zu betrachtende Zone wird nun allerdings durch die beiden Flächen F und F' , oder auch durch irgend ein anderes Paar ihrer Flächen bestimmt; allein, welche Flächen sind es, die sie charakterisiren? Offenbar nur diejenigen, welche sich analytisch-geometrisch als die projicirenden Ebenen der Zonenlinie, d. h. als die projicirenden Ebenen der Durchschnittslinie von F und F' bestimmen.

Die Gleichungen dieser projicirenden Ebenen erhalten wir, wenn wir aus den gegebenen Gleichungen für F und F' successiv die Coordinaten x , y und z eliminiren. Setzen wir, der besseren Uebersicht wegen,

$$bc' - b'c = \alpha, ca' - c'a = \beta, ab' - a'b = \gamma,$$

so erhalten wir die Gleichungen der projicirenden Ebenen:

$$\frac{x}{\alpha a a'} - \frac{y}{\beta b b'} = \frac{c - c'}{\alpha \beta} \quad (1)$$

$$\frac{z}{\gamma c c'} - \frac{y}{\alpha a a'} = \frac{b - b'}{\alpha \gamma} \quad (2)$$

$$\frac{y}{\beta b b'} - \frac{z}{\gamma c c'} = \frac{a - a'}{\beta \gamma} \quad (3).$$

Je zwei von diesen projicirenden Ebenen charakterisiren also die Zonen, weil sie diejenigen Flächen sind, welche die einfachste Bestimmung derselben gewähren. Dafs übrigens in je zweien dieser Gleichungen allemal die dritte enthalten ist, läfst sich leicht auf folgende Weise darthun. Man addire erst alle drei Gleichungen, so erhält man:

- 1) Der leichteren Orientirung wegen wird in Folgendem für jede Fläche durch den Buchstaben a der Parameter in der Axe der x , durch b der Parameter in der Axe der y , und durch c der Parameter in der Axe der z ausgedrückt. Accente unterscheiden die Parameter verschiedener Flächen.

$$\frac{a-a'}{\beta\gamma} + \frac{b-b'}{\gamma\alpha} + \frac{c-c'}{\alpha\beta} = 0 \quad (4).$$

Hierauf addire man zwei beliebige der Gleichungen (1), (2) und (3), und substituire für das, was rechter Hand vom Gleichheitszeichen erhalten wird, den aus der Gleichung (4) folgenden Werth, so gelangt man allemal auf die dritte Gleichung.

Aus dem Vorigen erhellt, dafs z. B. im Tesseral-systeme eine Zone allgemein durch die Flächen zweier Tetrakishexaëder charakterisirt seyn wird, unter denen sich jedoch auch das Hexaëder und Rhomben-Dodikaëder befinden können. Da es hierbei nur auf das Verhältnifs der Parameter ankommt, von denen der kleinere $=1$ angenommen wird, so kann man die rechter Hand vom Gleichheitszeichen stehenden Constanten in den Gleichungen (1), (2) und (3) vernachlässigen. So werden z. B. für die Zone

$$\text{der Fläche } \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 1, \text{ der Gestalt } 2\,O\,2,$$

$$\text{und der Fläche } \frac{x}{3} + y + z = 1, \text{ der Gestalt } 3\,O;$$

die Gleichungen der charakterisirenden Flächen:

$$\frac{x}{3} - y = 0, \text{ welche der Gestalt } \infty\,O\,3,$$

$$z - \frac{2x}{3} = 0, \text{ welche der Gestalt } \infty\,O\,\frac{3}{2},$$

$$\text{und } y + \frac{z}{2} = 0, \text{ welche der Gestalt } \infty\,O\,2$$

angehört.

Zonengleichung.

Unter der Zonengleichung verstehen wir die Bedingungsgleichung, welche für die Parameter irgend einer Fläche F'' erfüllt seyn muß, wenn solche in die Zone zweier Flächen F und F' gehören soll.

Um diese Zonengleichung zu finden, denke man die

Zonenlinie oder die Durchschnittslinie der Flächen F und F' sich selbst parallel auf den Mittelpunkt des Axensystems transportirt; ihre Gleichungen werden dann:

$$\frac{x}{\alpha a a'} - \frac{y}{\beta b b'} = 0$$

$$\frac{z}{\gamma c c'} - \frac{x}{\alpha a a'} = 0$$

$$\frac{y}{\beta b b'} - \frac{z}{\gamma c c'} = 0.$$

Da nun diese Linie der Fläche F'' parallel seyn soll, so wird sie ganz in die Fläche fallen müssen, sobald wir auch diese letztere sich selbst parallel auf den Mittelpunkt verlegen. Dann ist jeder Punkt der Linie zugleich auch ein Punkt der Fläche, deren Gleichung nun

$$\frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} + \frac{z}{c''} = 0$$

geschrieben wird. Setzen wir also die, aus den beiden ersten Gleichungen der Zonenlinie folgenden Werthe der Coordinaten y und z in die letztere Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{\alpha a a'}{a''} + \frac{\beta b b'}{b''} + \frac{\gamma c c'}{c''} = 0$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung.

In dieser Form ist die Gleichung sehr bequem für die allgemeine Entwicklung der Zone. Für die specielle Entwicklung der Combinationen aber pflegt sie oft in folgender Form bequemer zu seyn:

$$\frac{1}{a'' b' c} + \frac{1}{b'' c' a} + \frac{1}{c'' a' b} = \frac{1}{a'' b c} + \frac{1}{b'' c a} + \frac{1}{c'' a b},$$

weil man es hier auf den ersten Blick übersieht, welche Glieder verschwinden, wenn gewisse Parameter den Werth ∞ haben, wie solches so häufig der Fall ist. Diese Zonengleichung hat übrigens ganz allgemeine Gültigkeit, in den verschiedenen klinoëdrischen wie in dem orthoëdrischen Axensysteme; auch sieht man, daß sie von den Dimensionen der Grundgestalt gänzlich unabhängig ist.

Allgemeine Entwicklung der Zonen.

Unter der allgemeinen Entwicklung einer gegebenen Zone verstehen wir eine erschöpfende Angabe aller derjenigen Flächen, welche rings um das Axensystem in dieser Zone möglich sind, oder auch eine Angabe der krystallographischen Zeichen aller derjenigen Gestalten, welche Flächen zu dieser Zone liefern können. Bei dieser Entwicklung dient die Zonengleichung in der Form

$$\frac{\alpha a a'}{a''} + \frac{\beta b b'}{b''} + \frac{\gamma c c'}{c''} = 0$$

zum sichersten Leitfaden. Da hierbei die Größen a , b , c , a' , b' und c' , und folglich auch die Größen α , β und γ als bestimmte, die Größen a'' , b'' und c'' dagegen als unbestimmte Größen zu betrachten sind, so wird man nun zuvörderst untersuchen, für welche Vorzeichen der Größen a'' , b'' und c'' die Gleichung unmöglich wird. — Dieß wird offenbar für diejenigen Vorzeichen der Fall werden, durch welche alle Glieder der Gleichung entweder positiv oder negativ würden, weil eine Summe von lauter positiven oder lauter negativen Größen niemals $= 0$ seyn kann. Man lernt so zuvörderst diejenigen Raum-Octanten kennen, in welchen es überhaupt gar keine Flächen für die Zone giebt, und welche keine andere seyn werden, als diejenigen, in welche die auf den Mittelpunkt transportirte Zonenlinie fällt. Für die übrigen Raum-Octanten, in welchen also möglicherweise Flächen *existiren* können, untersucht man nun weiter, wie sich diese Flächen nach den verschiedenen Größenverhältnissen der Werthe von a'' , b'' und c'' bestimmen werden, und welche krystallographischen Zeichen ihnen demgemäfs entsprechen. Mit der Aufstellung dieser, theils allgemeinen, theils besonderen Flächenzeichen ist die Aufgabe einer allgemeinen Entwicklung der Zone selbst als aufgelöst zu betrachten. Da sich die Entwicklung je nach der besonderen Beschaffenheit des Krystallsystems, und je nach der besonderen Lage der beiden Flächen F und

F auf das Verschiedenste modificirt, so läßt sich auch im Allgemeinen nicht viel mehr darüber sagen, als hier geschehen ist. Doch mag ein Beispiel zur Erläuterung des Gesagten dienen.

Beispiel. Man soll die Zone der Höhenlinie einer Octaëderfläche ¹⁾ entwickeln. Es ist natürlich gleichgültig, welche Höhenlinie man zu Grunde legt; wir wollen daher diejenige auf der Octaëderfläche

$$x + y + z = 1$$

wählen, welche die Axe der x schneidet; dann wird

$$a = b = c = 1,$$

$$a' = \infty, b' = 1, c' = -1,$$

und folglich die Zonengleichung:

$$-\frac{2}{a''} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c''} = 0,$$

oder auch

$$-\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$

weil die Unterscheidung der Parameter durch Accente nicht mehr nöthig ist. Man ersieht nun sogleich, daß diese Gleichung für alle, in den beiden Raum-Octanten der $+x$, $-y$ und $-z$, der $-x$, $+y$ und $+z$ gelegene Flächen unmöglich ist. Dagegen sind in den übrigen sechs Raum-Octanten Flächen möglich, und es wird für alle Flächen im Octanten

$$\left. \begin{array}{l} \text{der } +x, +y, +z \text{ die Zonengl. } -\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \\ -x, -y, -z \quad \quad \quad +\frac{2}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \end{array} \right\} \text{I.}$$

$$\left. \begin{array}{l} +x, +y, -z \quad \quad \quad -\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \\ -x, -y, +z \quad \quad \quad +\frac{2}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \end{array} \right\} \text{II.}$$

1) Die Diagonalzone des Octaëders, nach Weifs.

$$\left. \begin{array}{l} \text{der } +x, -y, +z \text{ die Zonengl. } -\frac{2}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \\ -x, +y, -z \quad \quad \quad +\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \end{array} \right\} \text{III.}$$

Natürlich geben je zwei eingeklammerte Gleichungen dasselbe Resultat; es sind daher auch nur drei Fälle zu untersuchen. Man überzeugt sich nun leicht, daß diese Gleichungen nur unter folgenden Bedingungen realisirt werden können:

die Gleichung I, wenn a den *mittleren* Werth hat,
die Gleichung II, wenn b den *kleinsten* Werth hat, und
die Gleichung III, wenn c den *kleinsten* Werth hat.

Da nun die, von mir im Tesseralsysteme gebrauchte Beziehung voraussetzt, daß der größte Parameter allgemein mit m , der mittlere mit n , und der kleinste mit 1 bezeichnet wird, so wird auch in der

Gleichung I nothwendig $a = n$,

II $b = 1$,

III $c = 1$

zu setzen seyn. Giebt man nun den andern Parametern respective die Werthe m und 1, oder m und n , so erhält man endlich das Resultat, daß im Octanten der $+x, +y, +z$

zwei Flächen der Gestalt $m O \frac{2m}{m+1}$,

in jedem der beiden Octanten der $+x, +y, -z$ und $+x, -y, +z$ aber

zwei Flächen der Gestalt $m O \frac{m}{m-2}$

und

zwei Flächen der Gestalt $m O \frac{2m}{m-1}$,

überhaupt aber, daß in der, durch die Höhenlinie der Octaëderfläche bestimmten Zone nur Flächen solcher Gestalten vorkommen können, welche unter einem der drei vorstehenden Zeichen enthalten sind. Diese Zeichen be-

stimmen also im Allgemeinen diejenigen Hexakisoctäeder, welche Flächen in die angegebene Zone liefern, und man sieht, daß in dem

$$\text{Zeichen } m O \frac{2m}{m+1}, \text{ auch } O \text{ und } \infty O 2$$

$$m O \frac{m}{m-2}, \quad \infty O \quad 3 O 3$$

$$m O \frac{2m}{m-1}, \quad \infty O 2 \quad 3 O 3$$

enthalten sind. Die gegebene Zone ist also durch Angabe dieser krystallographischen Zeichen *vollständig* entwickelt, denn es ist unmöglich, daß noch Flächen anderer Gestalten vorkommen.

Berechnung der Winkel, welche die Flächen einer Zone mit einander bilden.

Die gegenseitigen Neigungswinkel der Flächen einer und derselben Zone lassen sich auf eine sehr leichte Weise finden, wenn man solche von einer der projicirenden Ebenen der Zonenlinie abhängig macht.

Man wähle dazu irgend eine beliebige dieser drei Ebenen (z. B. die projicirende Ebene durch die Axe der x); die Zonenlinie selbst, welche wir uns auf den Mittelpunkt transportirt denken, und deren Gleichungen daher wieder

$$\frac{x}{\alpha a a'} - \frac{y}{\beta b b'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\alpha a a'} - \frac{z}{\gamma c c'} = 0$$

sind, diese Zonenlinie wird in der gewählten Ebene ihren Neigungswinkel A gegen die Coordinatebene (yz) haben, welcher das Complement ihres Neigungswinkels gegen die Axe ist; folglich wird

$$\sin A = \frac{\alpha a a'}{\sqrt{\alpha^2 a^2 a'^2 + \beta^2 b^2 b'^2 + \gamma^2 c^2 c'^2}}.$$

Man berechne nun zuvörderst den Neigungswinkel ω irgend einer in die Zone gehörenden Fläche F'' ge-

gen die gewählte projecirende Ebene. Derselbe findet sich leicht mittelst des gefundenen $\sin A$, sobald man nur noch die Cotangente des in der Coordinatebene (γz) liegenden Winkels s kennt, welchen die Intersection (γz) der Fläche F'' mit der Projection (γz) der Zonenlinie bildet. Es ist nun aber

$$\cot s = \frac{\beta b b' b'' - \gamma c c' c''}{\beta b b' c'' + \gamma c c' b''}$$

und

$$\cot w = \cot s \sin A.$$

Hat man auf diese Weise für irgend zwei Flächen der gegebenen Zone die Winkel w und w' gefunden, so ist der Neigungswinkel W der Flächen selbst bestimmt durch

$$W = w \pm w',$$

daher auch

$$\tan W = \frac{(\cot s' \pm \cot s) \sin A}{\cot s \cot s' \sin^2 A \mp 1}.$$

Es ist aber $\sin A$ für eine und dieselbe Zone eine constante und irrationale Gröfse; folglich haben die Tangenten aller, in einer und derselben Zone vorkommenden Winkel ein rationales Verhältnifs, indem sie rationale Multipla oder Submultipla der Gröfse $\sin A$ nach dem, jedenfalls rationalen Factor

$$\frac{\cot s - \cot s'}{\cot s \cot s' \sin^2 A \mp 1}$$

sind ¹⁾).

Graphische Darstellung der Zonen, nach Neumann.

Neumann's graphische Darstellung beruht zunächst auf dem Satze, dafs die Normalen sämtlicher Flächen einer und derselben Zone in eine Ebene, und folglich die Durchschnittspunkte aller dieser Normalen mit irgend einer beliebigen, als Constructionsfläche dienenden Ebene

1) Neumann's Beiträge zur Krystallonomie, Heft I, S. 20 ff. und besonders S. 31.

in eine gerade Linie fallen¹⁾). Diese Durchschnittspunkte der Flächennormalen mit der Constructionsfläche bezeichnet Neumann mit dem Namen der *Flächenorte*, und die Aufgabe seiner graphischen Methode besteht wesentlich darin, sämtliche Flächenorte eines gegebenen Gestalten-Inbegriffs auf dem, die Constructionsfläche darstellenden Papiere genau einzutragen, um sich ein anschauliches Totalbild aller möglichen Zonen zu verschaffen, welche zwischen den Flächen der gegebenen Gestalten hervortreten. Denn es wird dann offenbar so viele verschiedene Zonen geben, als sich gerade Linien durch je drei oder mehre Flächenorte ziehen lassen, worüber man sogleich, entweder durch den bloßen Augenschein, oder durch Hülfe eines Lineales belehrt wird, wenn nur die Construction mit gehöriger Genauigkeit ausgeführt wurde.

Da nun die Wahl der Constructionsfläche ganz beliebig ist, so scheint es am zweckmäßigsten, dazu die Parallelfäche einer der Coordinatebene, z. B. der Ebene (yz) zu wählen, welche die dritte Axe, also die Axe der x , in der Entfernung 1 vom Mittelpunkt schneidet. Die Gleichung der so bestimmten Constructionsfläche wird also:

$$x=1.$$

Ist nun die Gleichung irgend einer Krystallfläche:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

so sind die Gleichungen ihrer Normale aus dem Mittelpunkt

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0, \quad \frac{x}{c} - \frac{z}{a} = 0.$$

Man braucht nun blofs diese beiden mit x behafteten Gleichungen der Flächennormale, mit der Gleichung der

1) Neumann's Beiträge zur Krystallonomie, Heft I, S. 1 ff.; diese geraden Linien sind es, welche von Neumann Zonenlinien genannt werden.

Constructionsfläche zu combiniren, um sogleich die Coordinaten y und z des Flächenortes zu erhalten, und findet demgemäß:

$$\frac{y}{b} = a, \quad z = \frac{a}{c},$$

wobei natürlich auf die Vorzeichen der Parameter a , b und c sorgfältig Rücksicht zu nehmen ist.

Diese Werthe von y und z sind es, welche bei der graphischen Darstellung benutzt werden. Man zieht nämlich zwei sich rechtwinklich schneidende Linien, welche die Axen der y und z vorstellen, trägt hierauf für jede Fläche die entsprechenden Werthe $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{c}$ in diese Axen ein, vollendet das Parallelogramm, und erhält so den verlangten Flächenort. Sind auf diese Weise alle Flächenorte eingetragen, so machen sich die Zonen von selbst darstellig, indem diese Flächenorte nach verschiedenen Richtungen reihenweise in gerade Linien geordnet erscheinen. Jede einzelne Fläche fällt in so viele verschiedene Zonen, als sich verschiedene Reihen von Flächenorten nachweisen lassen, zu denen auch *ihr* Flächenort gehört.

Um sich in zweifelhaften Fällen, wo die Coincidenz in eine und dieselbe gerade Linie nicht ganz scharf zu erkennen ist, zu überzeugen, ob die Flächenorte dreier Flächen wirklich diese Lage besitzen, dazu bedarf es nur einer Anwendung der Zonengleichung, in welcher man die Parameterwerthe der drei Flächen substituirt; wird dadurch die Gleichung erfüllt, so fallen auch die Flächenorte in eine und dieselbe gerade Linie; wo nicht, so liegen sie außerhalb einer solchen Linie.

Da übrigens je zwei Gegenflächen eine und dieselbe Normale haben, so wird bei der Construction nur auf die obere Hälfte einer jeden Gestalt, oder auf diejenigen Flächen Rücksicht zu nehmen seyn, für welche der Parameter a positiv ist.

Graphische Darstellung der Zonen, nach Quenstedt.

Es unterliegt keinen Zweifel, daß das gemeinschaftliche Kreuzen vieler *Linien* in einem und demselben Punkte, für die Anschauung ein weit bestimmteres und leichter ergreifbares Verhältniß ist, als die Lage vieler *Punkte* in einer und derselben geraden Linie. Dieses und der Umstand, daß doch die *Flächen* und nicht ihre Normalen das eigentlich und zunächst Gegebene an den Krystallformen sind, bestimmte Quenstedt, eine *andere* graphische Methode auszudenken¹⁾, welche auf dem Satze beruht, daß sich sämtliche Flächen einer Zone, wenn solche sich selbst parallel auf einen und denselben Punkt transportirt werden, in *einer und derselben Linie* schneiden, welche natürlich keine andere als die Zonenlinie ist. Wird also eine solche Zone von irgend einer beliebigen Ebene geschnitten, so stellt sich der Durchschnitt als ein System von geraden Linien dar, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Die beliebige gewählte (als Constructionsfläche dienende) Ebene nennt Quenstedt die Sectionsebene, und die Durchschnitte der Flächen mit ihr die Flächenlinien oder Sectionslinien. Er transportirt sämtliche Flächen auf denjenigen Punkt der verticalen Axe (also der Axe der x), welcher um die Länge 1 vom Mittelpunkt entfernt ist, und wählt zur Sectionsebene die Coordinatenebene durch die beiden anderen Axen. Ich erlaube mir hierin eine kleine Aenderung, indem ich die sämtlichen Flächen auf dem Mittelpunkt des Axensystems transportire, und zur Sectionsfläche diejenige Fläche wähle, deren Gleichung

$$x=1$$

ist. Die Aufgabe läuft nun wesentlich darauf hinaus, die sämtlichen Flächenlinien eines gegebenen Gestalten-Inbegriffs auf dem die Sectionsebene darstellenden Papiere zu construiren, um sich durch solche Construction ein

1) Poggendorff's Annalen. Bd. XXXIV. S. 503 und 651.

Bild zu verschaffen, aus welchem man sogleich und mit einem Blicke ersehen können, nicht nur, *welche* Flächen zu einer und derselben Zone gehören, sondern auch, in wie *viele* verschiedene Zonen eine und dieselbe Fläche falle. Jeder Kreuzungspunkt von drei oder mehrn Flächenlinien bestimmt nämlich *eine* Zone, und es wird so viele *verschiedene* Zonen geben, als sich dergleichen Kreuzungspunkte herausstellen. Eine und dieselbe Fläche aber fällt in so viele Zonen, als ihre Flächenlinie durch verschiedene Kreuzungspunkte (Zonenpunkte) geht.

Die Ausführung der Sache ist eben so einfach, als die ihr zu Grunde liegende Idee. Die Gleichung der Sectionsfläche ist abermals

$$x=1.$$

Sey nun die Gleichung irgend einer, auf den Mittelpunkt transportirten Krystallfläche

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

so wird die Gleichung ihrer Sectionslinie

$$\frac{ay}{b} + \frac{az}{c} = -1,$$

folglich sind $-\frac{b}{a}$ und $-\frac{c}{a}$ die Parameterwerthe, welche die Lage der entsprechenden Flächenlinie in der Constructionsfläche bestimmen.

Man ziehe also auf dem Papier zwei sich rechtwinklig kreuzende Linien, welche die Axen der y und der z vorstellen, nehme für jede Krystallfläche in der Axe der y den Parameter $\frac{b}{a}$, in der Axe der z den Parameter $\frac{c}{a}$, und ziehe die durch diese Parameter bestimmte Linie, so ist die verlangte Flächenlinie entworfen. Sind auf diese Weise die Flächenlinien aller Gestalten eingetragen, so ist auch zugleich die Uebersicht der zwischen ihnen bestehenden Zonen construirt worden. In zweifelhaften Fällen führt auch hier die Zonengleichung zur Entscheidung.