Zur Theorie der Involutionen.

Von Dr. Jan de Vries in Kampen.

Wird die Function n^{ten} Grades

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

durch $F_n(z)$ bezeichnet, so bestimmt die Gleichung

$$F_n(z) + \lambda f_n(z) = 0$$

die Punktgruppen einer Involution n^{ten} Grades, falls der Parameter z durch seine einzelnen Werte die Punkte eines rationalen Trägers eindeutig festlegt. Wird hingegen z , als complexe Größe, durch einen Punkt der Zahlenebene dargestellt, so definiert obige Gleichung eine „complexe“ Involution, in der die Punkte der Ebene zu n -punktigen involutorischen Gruppen vereinigt sind.¹⁾

1. In der Gleichung einer Involution n^{ten} Grades

$$(1) \quad f_1(z) f_{n-1}(z) + \lambda g_1(z) g_{n-1}(z) = 0,$$

wo $f_1(z) = z - a$, $g_1(z) = z - b$, werde dem λ ein bestimmter Wert $\beta : \alpha$ ertheilt. Die damit festgelegte Gruppe der J_n möge durch $(z - c) h_{n-1}(z) = 0$ dargestellt werden; alsdann gilt die Identität

$$(2) \quad \alpha(z - a) f_{n-1}(z) + \beta(z - b) g_{n-1}(z) \equiv (\alpha + \beta)(z - c) h_{n-1}(z)$$

oder wenn $z - a$ und $z - b$ bezw. durch $(z - c) + (c - a)$ bezw. $(z - c) + (c - b)$ ersetzt wird,

$$\begin{aligned} & [\alpha f_{n-1}(z) + \beta g_{n-1}(z)](z - c) + [\alpha(c - a) f_{n-1}(z) + \beta(c - b) g_{n-1}(z)] \equiv \\ (3) \quad & \equiv (\alpha + \beta)(z - c) h_{n-1}(z). \end{aligned}$$

¹⁾ Für die Darstellung der binären Formen durch Punktgruppen in der complexen Ebene wolle man vergleichen:

Beltrami „Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche“ (Mem. della Accademia di Bologna, Ser. II, tomo IX).

Russell „Geometry of the quartic“ (Proc. of the London Math. Society XIX).

Es sei nun

$$(4) \alpha(c-a)f_{n-1}(z) + \beta(c-b)g_{n-1}(z) \equiv [\alpha(c-a) + \beta(c-b)](z-c)\varphi_{n-2}(z),$$

wonach $\varphi_{n-2}(z) = 0$ die Punkte ergibt, welche den Punkt c zu einer Gruppe der durch

$$f_{n-1}(z) + \lambda g_{n-1}(z) = 0$$

definierten J_{n-1} ergänzen.

Aus (3) und (4) erhält man nun

$$(6) \alpha f_{n-1}(z) + \beta g_{n-1}(z) + [\alpha(c-a) + \beta(c-b)]\varphi_{n-2}(z) \equiv (\alpha + \beta)h_{n-1}(z).$$

Wird, behufs Elimination der $g_{n-1}(z)$, die Gleichung (6) mit $(z-b)$ multipliciert, und von ihr die (2) subtrahiert, so ergibt sich

$$(7) \quad \alpha(a-b)f_{n-1}(z) + [\alpha(c-a) + \beta(c-b)](z-b)\varphi_{n-2}(z) \equiv \\ \equiv (\alpha + \beta)(c-b)h_{n-1}(z).$$

Die Gruppe $(z-b)\varphi_{n-2}(z) = 0$ gehört demnach der durch

$$(8) \quad f_{n-1}(z) + \lambda h_{n-1}(z) = 0$$

dargestellten J_{n-1} an.

Nachdem nun auch die Gruppe $(z-a)\varphi_{n-2}(z) = 0$ der Involution $\gamma_{n-1}(z) + \lambda h_{n-1}(z) = 0$ angehören muss, erhält man den wichtigen Satz:

„Sind

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n \\ B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n \\ C_1 C_2 \dots C_{n-1} C_n \end{array}$$

drei Gruppen einer Involution J_n , so bestimmen die Gruppen

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 \dots A_{n-1} \\ B_1 B_2 \dots B_{n-1} \\ C_1 C_2 \dots C_{n-1} \end{array}$$

zu je zwei drei Involutionen $\mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{B}_{n-1} \mathfrak{C}_{n-1}$, welche eine $(n-2)$ -punktige Gruppe

$$D_1 D_2 \dots D_{n-2}$$

gemein haben; diese Gruppe ergänzt die Punkte $A_n B_n C_n$ bezüglich zu Gruppen der $\mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{B}_{n-1} \mathfrak{C}_{n-1}$.“

Weil drei $(n-1)$ -punktige Gruppen im allgemeinen, eine Involution zweiter Stufe J_{n-1}^2 bestimmen, kann das obige Ergebnis auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

„Drei einer Involution n^{ten} Grades entnommene $(n-1)$ -punktige Gruppen gehören einer zweistufigen Involution $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades an, welche durch den Besitz einer $(n-2)$ -punktigen neutralen Gruppe ausgezeichnet ist.“

(Eine J_{n-1}^2 besitzt bekanntlich im allgemeinen $\frac{1}{2} (n-2) (n-3)$ neutrale Paare.)

2. Um zu einer Umkehrung des obigen Satzes zu gelangen, setzen wir

$$(9) \quad f_{n-1}(z) + \lambda h_{n-1}(z) \equiv (1 + \lambda) (z - b) \varphi_{n-2}(z)$$

$$(10) \quad g_{n-1}(z) + \mu h_{n-1}(z) \equiv (1 + \mu) (z - a) \varphi_{n-2}(z).$$

Durch Elimination der Function $h_{n-1}(z)$ ergibt sich

$$(11) \quad \mu f_{n-1}(z) - \lambda g_{n-1}(z) \equiv [(\mu - \lambda) z + \lambda(1 + \mu) a - \mu(1 + \lambda) b] \varphi_{n-2}(z).$$

Weiter erhellt aus (9) und (10) die Identität

$$(12) \quad \begin{aligned} (1 + \mu) (z - a) f_{n-1}(z) - (1 + \lambda) (z - b) g_{n-1}(z) &\equiv \\ &\equiv [(\mu - \lambda) z + \lambda(1 + \mu) a - \mu(1 + \lambda) b] h_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (11) erhalten wir somit den Satz:

„Sind auf einem rationalen Träger oder in der complexen Ebene drei $(n-1)$ -punktige Gruppen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in solcher Lage, dass die drei Involutionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche sie zu je zwei bestimmen, die $(n-2)$ -punktige Gruppe δ gemein haben, und ist P_i der Punkt, welcher δ zu einer Gruppe der durch γ_i und γ_j definierten Involution ergänzt, so bilden $(P_1 \gamma_1)$, $(P_2 \gamma_2)$ und $(P_3 \gamma_3)$ drei Gruppen einer Involution n^{ten} Grades.“

Oder auch:

„Wenn eine zweistufige Involution m^{ten} Grades eine $(m-1)$ -elementige neutrale Gruppe besitzt, so gehören drei ihrer Gruppen allemal einer Involution $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades an.“

Für eine Tangenteninvolution an einem Kegelschnitt erhellt aus Obigem der Satz:

„Sind drei vollständige m -Seite einem Kegelschnitte umgeschrieben und einer Curve m^{ter} Ordnung eingeschrieben,

so gibt es drei Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren jede die Ecken von zwei dieser m -Seite enthält. Diese drei Curven haben die Ecken eines vollständigen $(m-1)$ -Seits gemein, welches ebenfalls dem Kegelschnitte umgeschrieben ist.“

3. Der obige Satz soll nun zur Vervollständigung der complexen kubischen Involutionen angewandt werden.

Zunächst stelle ich hier die auf die quadratischen Involutionen bezüglichen Constructionen zusammen.¹⁾ Sie fließen aus der Bemerkung, dass die Gleichung

$$z^2 - 2\lambda z + a^2 = 0,$$

welche jede J_2 darstellen kann, für jedes Punktepaar die Relation

$$z_1 z_2 = a^2$$

ergibt.

Legt man nun die reelle Axe durch die Doppelpunkte und den Nullpunkt in ihre Mitte, so lässt sich diese Gleichung durch

$$z_1 = r e^{\varphi i}, \quad z_2 = \frac{a^2}{r} e^{-\varphi i}$$

ersetzen.

Hieraus erhellt, dass ein Punktepaar $P_1 P_2$ in Bezug auf die Doppelpunkte $A_1 A_2$ und deren Mitte O durch die Relationen:

$$(13) \quad \begin{aligned} \overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} &= \overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} \\ \times A_1 O P_1 + \times A_1 O P_2 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt erscheint.

Für zwei Punktepaare ergibt sich daher

$$(14) \quad \overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = \overline{OQ_1} \cdot \overline{OQ_2}$$

$$(15) \quad \times P_1 O Q_1 + \times P_2 O Q_2 = 0.$$

Ohne Mühe erhält man hieraus die nachstehenden Constructionen:

a) In der Ebene sind zwei Punktepaare $P_1 P_2, Q_1 Q_2$ gegeben; man soll die Doppelpunkte der durch sie bestimmten complexen quadratischen Involution construieren.

Es sei S der Schnittpunkt der Geraden $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$. Durch $SP_1 Q_2$ und durch $SP_2 Q_1$ werden Kreise gelegt, welche sich noch in O schneiden. Auf der Geraden, welche den Winkel $P_1 O P_2$ halbiert, werden die Strecken $\overline{OA_1}$ und $\overline{OA_2}$ aufgetragen,

¹⁾ Vergl. die Arbeit von Herrn P. H. Schoute im 4. Bande der „Aufgaben“ der Math. Gesellschaft in Amsterdam. (Seite 69).

welche der mittleren Proportionale der $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP_2}$ gleich sind; alsdann sind A_1 und A_2 die verlangten Doppelpunkte. Diese Construction wird hinfällig, wenn die vorgegebenen Punktepaare alliniert sind.

Falls sie einander trennen, sind die Doppelpunkte den Kreisen gemein, welche über $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ als Durchmesser beschrieben werden.

Im Gegenfalle bestimmt man die Grenzpunkte des Büschels, welchem diese Kreise angehören. (Hesse.)

b) Man soll einen gegebenen Punkt C_1 zu einem Paare der Involution ergänzen, welche durch zwei gegebene Punktepaare bestimmt ist.

Nachdem die Doppelpunkte $A_1 A_2$ construiert sind, werde C_1 in Bezug auf den über $A_1 A_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreis invertiert; durch Spiegelung des neuen Punktes gegen die Gerade $A_1 A_2$ erhält man alsdann den Punkt C_2 .

c) Es sind die Punkte zu construieren, welche das gemeinschaftliche Paar zweier gegebenen Involutionen bilden.

Sind $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Doppelpunkte der beiden J_2 , so bestimme man die Doppelpunkte der Involution, der $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ als Paare angehören.

4. Mit Hilfe des in §. 2 abgeleiteten Satzes ergeben sich nun für complexe cubische Involutionen die nachstehenden Constructionen.

α) In der Ebene sind die Punktetripel $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3$ gegeben. Es sollen die Punkte $C_1 C_2$ bestimmt werden, welche den Punkt C_3 zu einem Tripel der durch $A_i B_i$ definierten Involution ergänzen.

Nachdem man den Punkt D_3 erhalten, welcher mit C_3 ein Paar der durch $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ bestimmten J_2 bildet, ergeben sich die gewünschten Punkte in dem gemeinschaftlichen Paare der Involutionen $(A_1 A_2, B_3 D_3)$ und $(B_1 B_2, A_3 D_3)$.¹⁾

Die Construction entspricht dem Schema:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \\ C_1 C_2 C_3 \end{array} \right\} J_3 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \\ C_3 D_3 \end{array} \right\} J_2 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 A_2 \\ C_1 C_2 \\ B_3 D_3 \end{array} \right\} J_2 \quad \left. \begin{array}{l} B_1 B_2 \\ C_1 C_2 \\ A_3 D_3 \end{array} \right\} J_2$$

β) Von einer cubischen Involution in complexer Ebene kennt man die Paare $A_1 A_2, B_1 B_2$ und das Tripel $C_1 C_2 C_3$. Man soll die Punkte A_3 und B_3 bestimmen, welche jene Paare zu Tripeln ergänzen.

¹⁾ Eine andere Lösung dieser Aufgabe findet sich in meiner Arbeit „Involutions cubiques dans le plan complexe“. (Rendiconti di Palermo V, 300).

Nach obigem Schema hat man zunächst wieder den Punkt D_3 zu construieren, der mit C_3 ein Paar der Involution $(A_1 A_2, B_1 B_2)$ bildet; sodann die Punkte, welche D_3 zu Paaren der Involutionen $(B_1 B_2, C_1 C_2)$ und $(A_1 A_2, C_1 C_2)$ ergänzen.

γ) Zwei cubische Involutionen, welche das vorgegebene Tripel $A_1 A_2 A_3$ gemein haben, sind beziehungsweise durch die Tripel $B_1 B_2 B_3$ und $C_1 C_2 C_3$ bestimmt. Man soll das Punktepaar construieren, welches sie noch gemein haben.

Es werde C_3 durch die Punkte $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ zu einem Tripel der $J_3 (A_i, B_i)$ und B_3 durch $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ zu einem Tripel der $J_3 (A_i, C_i)$ ergänzt. Alsdann findet man das verlangte Punktepaar $D_1 D_2$ in dem gemeinschaftlichen Paare der beiden $J_2 (B_1 B_2, \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$ und $(C_1 C_2, \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2)$.

Zum Beweise beachte man, dass D_1 und D_2 als neutrales Paar der J_3^2 angehören, welche durch die Tripel A_i, B_i, C_i definiert ist. Jene beiden zur Construction benutzten J_2 enthalten offenbar die Paare, welche mit B_3 , bez. C_3 , Tripel der J_3^2 bilden.

δ) Die Bestimmung des neutralen Paares einer durch drei vorgegebene Tripel definierten zweistufigen cubischen Involution.

Diese Aufgabe ist demnach schon unter γ) gelöst.

Das dort angedeutete Verfahren kann durch ein einfacheres ersetzt werden, wenn man, statt dreier beliebiger Tripel, die dreifachen Punkte der J_3^2 kennt.

Beachtet man nämlich, dass diese drei Punkte eine cubische Form darstellen, deren Hesse'sche Covariante für die Punkte des neutralen Paares verschwindet, so erhält man dieses Paar in den Schnittpunkten der Apollonischen Kreise (isodynamische Centra, nach der Bezeichnung des Herrn Neuberg) des durch die dreifachen Punkte gebildeten Dreiecks. (Beltrami l. c.)

ϵ) Es sollen die vorgegebenen Punkte $P_1 P_2$ zu einem Tripel ergänzt werden, welches der durch drei bekannte Tripel $A_i B_i C_i$ festgelegten J_3^2 angehört.

Nachdem man die Punkte $\Pi_2 \Pi_3$, bez. $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ bestimmt hat, welche mit P_1 ein Tripel der $J_3 (A_i, B_i)$, bez. (A_i, C_i) bilden, erhält man P_3 als dem Punkte P_2 zugeordnet in der $J_2 (\Pi_2 \Pi_3, \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3)$.

5. Auch für gewisse Aufgaben in der Theorie der biquadratischen Involutionen in complexer Ebene erweist sich der Satz des §. 2 als ein wichtiges Hilfsmittel.

Aus dem Schema

$$\left. \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \\ C_1 C_2 C_3 C_4 \end{array} \right\} J_4 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \\ C_4 D_1 D_2 \end{array} \right\} J_3 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 \\ C_1 C_2 C_3 \\ B_4 D_1 D_2 \end{array} \right\} J_3 \quad \left. \begin{array}{l} B_1 B_2 B_3 \\ C_1 C_2 C_3 \\ A_4 D_1 D_2 \end{array} \right\} J_3$$

ergeben sich die Constructionen a) und b).

a) Eine J_4 ist bestimmt durch drei in der Ebene vorgegebene Tripel. Man soll sie zu Quadrupeln der J_4 ergänzen.

Die Punkte $D_1 D_2$ erhält man nach δ) in dem neutralen Paare der J_3 , welcher die gegebenen Tripel angehören.

Den Punkt C_4 , welcher mit $D_1 D_2$ ein Tripel der durch $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3$ festgelegten J_3 bildet, construirt man nach dem Schema:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 A_2 \\ D_1 D_2 \\ B_3 T_4 \end{array} \right\} J_2 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \\ T_4 C_4 \end{array} \right\} J_2$$

also durch zweimalige Bestimmung des Punktes, welcher einem gegebenen Punkte in einer J_2 zugeordnet ist.¹⁾

b) Von einer Complexen J_4 kennt man das Quadrupel $A_1 A_2 A_3 A_4$, das Tripel $B_1 B_2 B_3$ und das Paar $C_3 C_4$. Es sind die Punkte $C_1 C_2$ zu construiren, welche $C_3 C_4$ zu einem Quadrupel ergänzen.

Nachdem man die Punkte $D_1 D_2$ erhalten, welche mit C_4 ein Tripel der J_3 ($A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3$) bilden, ergeben sich $C_1 C_2$ als das Paar, welches dem Punkte C_3 in der J_3 ($B_1 B_2 B_3, A_4 D_1 D_2$) zugeordnet ist.

6. Es sollen nun einige Sätze angeführt werden, welche sich auf die eindeutige Bestimmung der Involutionen durch unvollständige Gruppen beziehen.

Kennt man von einer J_n die n -punktige Gruppe $f_n(z) = 0$ und die κ -punktige Gruppe $f_\kappa(z) = 0$, so verlangt die Festlegung der J_n durch weitere unvollständige Gruppen die eindeutige Bestimmung der $(n-\kappa)$ Coefficienten einer Function $(n-\kappa)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_{n-\kappa}(z)$, welche die Aufstellung der Involutionsgleichung

$$(16) \quad f_n(z) + \lambda f_\kappa(z) \varphi_{n-\kappa}(z) = 0$$

ermöglicht.

Für ein gegebenes Punktepaar $z = p_1, z = p_2$ ergibt sich aus (16), durch Elimination des zugehörigen λ , die Gleichung:

$$(17) \quad f_n(p_1) f_\kappa(p_2) \varphi_{n-\kappa}(p_2) = f_n(p_2) f_\kappa(p_1) \varphi_{n-\kappa}(p_1),$$

welche linear ist in Bezug auf die $(n-\kappa)$ unbekannten Coefficienten.

Ist die unvollständige Gruppe $p_1 p_2 \dots p_l$ gegeben, so erhält man aus ihr $(l-1)$ Gleichungen der Form (17).

Für die J_4 auf rationalem Träger wurde diese Construction von Herrn E. Weyr angegeben. („Über biquadratische Involutionen.“ Sitzungsber. d. Wiener Akad. LXXXIII, S. 316.)

Wenn nun $\sum_{i=1}^{i=x} (m_i - 1) = n - x$, so erhellt, dass die $(n - x)$ Coefficienten (im allgemeinen) durch $(n - x)$ lineare Gleichungen bestimmt erscheinen, wenn außer den beiden oben erwähnten Gruppen von n , bez. x Punkten noch j weitere Gruppen gegeben sind, welche bez. $m_1, m_2, \dots, m_j$ Punkte enthalten.

Weil die x -punktige Gruppe mit jenen j Gruppen gleichberechtigt ist, ergibt sich, bei demgemäß geänderter Bezeichnung, der Satz:

Eine Involution n^{ten} Grades ist im allgemeinen eindeutig bestimmt durch eine n -punktige Gruppe und l weitere Gruppen, welche bez. $n_1, n_2, \dots, n_l$ Punkte enthalten, wofern nur

$$\sum_{i=1}^{i=l} n_i = n + l - 1.$$

Speciell ergibt sich hieraus, dass J_n durch eine vollständige Gruppe und $(n - 1)$ Paare definiert werden kann.

7. In der Gleichung einer J_n

$$(18) \quad f_x(z) \varphi_{n-x}(z) + \lambda f_l(z) \varphi_{n-l}(z) = 0$$

mögen die Functionen φ mit unbekannten Coefficienten gedacht werden. Diese $(2n - x - l)$ Unbekannte können nun linear bestimmt werden, wenn noch eine aus $(2n - x - l + 1)$ Punkten bestehende Gruppe der J_n gegeben ist.

Hieraus ergibt sich der Satz:

Eine Involution n^{ten} Grades ist eindeutig bestimmt durch drei Gruppen, welche bez. n_1, n_2, n_3 Punkte enthalten, wenn nur $n_1 + n_2 + n_3 = 2n + 1$.

Speciell gilt dann:

Eine Involution $(3s + 1)^{\text{ten}}$ Grades ist eindeutig bestimmt durch drei aus je $(2s + 1)$ Punkten gebildete Gruppen.

8. Denkt man sich einen Kegelschnitt als Träger einer Tangenteninvolution, so liefern die unter 6. und 7. hergeleiteten Sätze die Theoreme:

„Sind einem Kegelschnitte ein x -Seit, ein l -Seit und ein m -Seit umgeschrieben, wo $x + l + m = 2n + 1$, so lässt sich durch deren Eckpunkte eine Curve der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung legen.“

„Sind einem Kegelschnitte ein n -Seit und l weitere Vielseite mit bez. $n_1, n_2, \dots, n_l$ -Seiten umgeschrieben, (wo $\sum n_i = n + l - 1$), so liegen die Ecken der $(l + 1)$ Vielseite in einer Curve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung.“