Zur Theorie der Raumcurven.

Von O. Stolz in Innsbruck.

Obwohl die Coordinatenmethode auf dem Princip der Zeichen, d. i. auf der Einführung relativer Raumgrößen an Stelle der absoluten beruht, so ist dieses Princip in der analytischen Geometrie doch noch nicht überall da, wo es der Natur der Aufgabe nach verwendbar ist, durchgedrungen. Man darf eine solche Unterlassung bedauern, da die mittelst relativer Raumgrößen hergestellten Formeln die geometrische Anschauung vollständig zu ersetzen vermögen. Seit mehr als zwanzig Jahren in meinen geometrischen Vorlesungen bestrebt, das Princip der Zeichen so oft es nur angeht, zu benützen, erlaube ich mir, einige elementare Formeln über die Raumcurven mitzutheilen, welche gemäß desselben zugerichtet sind.

1. Als Ausgangspunkt meiner Entwicklung sollen die Begriffe und Formeln dienen, welche ich einer früheren Arbeit *) zugrunde legte. Zum Verständnis des Folgenden wird es genügen, daraus nachstehendes zu wiederholen.

Die positive Richtung der Normale einer gegebenen Ebene wird so angenommen, dass die für die Ebene festgesetzte positive Drehung von ihr aus gesehen der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint. Umgekehrt wird nach dieser Regel aus der vorgeschriebenen positiven Normalenrichtung der positive Drehungssinn der Ebene ermittelt. **) Die positive Richtung in allen einander parallelen Geraden verläuft nach derselben Seite einer sie alle schneidenden Ebene.

*) Vgl. Schlömilch, Zeitschrift, XVI Bd., S. 168 ff.

**) Sind die positiven Richtungen der Normalen zweier Ebenen festgesetzt, so folgt daraus nicht, wie Baltzer (Theorie der Determinanten, §. 16, 5) will, dass der Winkel beider Ebenen eindeutig definiert ist. Er ist es vielmehr erst dann, wenn auch in der Schnittlinie der beiden Ebenen die positive Richtung angenommen ist.

Von den drei aufeinander senkrechten positiven Achsenrichtungen xyz soll jede positive Normale für die von den beiden anderen gebildete Ebene sein. Das rechtwinklige Koordinatensystem heiße von erster oder zweiter Art, je nachdem die unter einander gleichen Winkel $\hat{y}z$, $\hat{z}x$, $\hat{x}y + 90^\circ$ oder -90° betragen.

Bedeutend $\lambda \mu \nu$ die Richtungscosinusse eines Strahles a durch 0, $\lambda' \mu' \nu'$ die eines zweiten Strahles a' durch 0, $l m n$ die Richtungscosinusse der positiven Normale auf die von den Strahlen $a a'$ gebildete Ebene, so bestehen die Formeln *)

$$\begin{aligned} l \sin \hat{a}a' &= \varepsilon(\mu \nu' - \nu \mu') & m \sin \hat{a}a' &= \varepsilon(\nu \lambda' - \lambda \nu') \\ n \sin \hat{a}a' &= \varepsilon(\lambda \mu' - \mu \lambda'), \end{aligned} \quad (1)$$

worin ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem das Koordinatensystem xyz von der ersten oder zweiten Art ist. Die nämliche Bedeutung hat ε in allen späteren Formen.

2. Es seien nun die Gleichungen einer Raumcurve

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t). \quad (2)$$

Wir betrachten einen besonderen Wert τ von t , wofür die drei Functionen $\varphi \psi \chi$ holomorph sind. Demnach haben wir, wenn wir $\varphi(\tau) = \xi$ $\psi(\tau) = \eta$ $\chi(\tau) = \zeta$ setzen,

$$\left. \begin{aligned} x - \xi &= \varphi'(\tau) \cdot (t - \tau) + \frac{1}{2} \varphi''(\tau) (t - \tau)^2 + \dots \\ y - \eta &= \psi'(\tau) (t - \tau) + \frac{1}{2} \psi''(\tau) (t - \tau)^2 + \dots \\ z - \zeta &= \chi'(\tau) (t - \tau) + \frac{1}{2} \chi''(\tau) (t - \tau)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Der ausgewählte Punkt M mit den Coordinaten $\xi \eta \zeta$ soll nicht-singulär, d. i. mindestens eine der Zahlen $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$, $\chi'(\tau)$ von Null verschieden sein. Den Bogen s der Curve (2) rechnen wir von M ab und lassen ihn zugleich mit t von $s=0$ an wachsen. Dann erhalten wir für seinen Differentialquotienten nach t im Punkte M , welchen wir kurz mit $\frac{ds}{d\tau}$ bezeichnen, den positiven Wert

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2 + \chi'(\tau)^2}. \quad (4)$$

*) Von diesen in der analytischen Geometrie unentbehrlichen Formeln verdient schon der besondere Fall Beachtung, welcher eintritt, wenn die eine der Richtungen $a a'$ mit einer der Achsenrichtungen xyz zusammenfällt.

Die positive Richtung t der Curventangente in M sei der Halbstrahl derselben, welcher auf jener Seite der Normalebene der Curve in M liegt, in welche sich die Curve bei wachsenden t begibt. Dafür gelten bekanntlich die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} \cos \hat{x}t &= \varphi'(\tau) = \frac{dx}{d\tau} & \frac{ds}{d\tau} \cos \hat{y}t &= \psi'(\tau) = \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{ds}{d\tau} \cos \hat{z}t &= \chi'(\tau) = \frac{dz}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} \frac{d^2z}{d\tau^2} - \frac{dz}{d\tau} \frac{d^2y}{d\tau^2} &= P & \frac{dz}{d\tau} \frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2z}{d\tau^2} &= Q \\ \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= R, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so ist die Gleichung der Osculationsebene der Curve (2) in M

$$P(x - \xi) + Q(y - \eta) + R(z - \zeta) = 0. \quad (7)$$

Es sei ferner

$$P^2 + Q^2 + R^2 = S^2 \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 \quad (S > 0). \quad (8)$$

Versteht man endlich unter T, U, V die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{d^2x}{d\tau^2} \cdot \frac{ds}{d\tau} - \frac{d^2s}{d\tau^2} \frac{dx}{d\tau} & U &= \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{ds}{d\tau} - \frac{d^2s}{d\tau^2} \cdot \frac{dy}{d\tau} \\ V &= \frac{d^2z}{d\tau^2} \cdot \frac{ds}{d\tau} - \frac{d^2s}{d\tau^2} \cdot \frac{dz}{d\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

so hat man bekanntlich für die Coordinaten $\alpha \beta \gamma$ des Krümmungscentrums C der Curve (2) in M

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \xi &= T \frac{ds}{d\tau} : S^2 & \beta - \eta &= U \frac{ds}{d\tau} : S^2 \\ \gamma - \zeta &= V \frac{ds}{d\tau} : S^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dabei ist

$$\left. \begin{aligned} T \frac{ds}{d\tau} &= Q \frac{dz}{d\tau} - R \frac{dy}{d\tau} & U \frac{ds}{d\tau} &= R \frac{dx}{d\tau} - P \frac{dz}{d\tau} \\ V \frac{ds}{d\tau} &= P \frac{dy}{d\tau} - Q \frac{dx}{d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. Die positive Richtung n_1 der Binormale der Curve (2) in M wird auf folgende Art festgesetzt. Es soll dafür

diejenige Seite der zu ihr parallelen Krümmungsachse durch C gewählt werden, von welcher aus der Übergang von M zu einem Nachbarpunkte N der Projection der Curve auf die Osculationsebene (7), der einem hinlänglich kleinen positiven Werte von $t-\tau$ entspricht, als positive, d. i. von rechts nach links gerichtete Drehung erscheint. Dieser Vorschrift gemäß ist also das noch unbekannte Zeichen in den Formeln

$$\begin{aligned} S \frac{ds}{d\tau} \cos \hat{x} n_1 &= \iota P & S \frac{ds}{d\tau} \cos \hat{y} n_1 &= \iota Q \\ S \frac{ds}{d\tau} \cos \hat{z} n_1 &= \iota R, \end{aligned} \quad (12)$$

worin $\tau = \pm 1$ ist, zu bestimmen. Man hat zufolge der Formel über die Projection der Flächen

$$2. OMN. \cos \hat{z} n_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = -\varepsilon \begin{vmatrix} \alpha - \xi & \beta - \eta \\ x_1 - \xi & y_1 - \eta \end{vmatrix}, \quad (13)$$

unter $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten von N verstanden. N sei die Projection des Punktes M mit den Coordinaten $x = \varphi(t)$ u. s. w. auf die Ebene (7). Demnach ergeben sich neben der Gleichung

$$P(x_1 - \xi) + Q(y_1 - \eta) + R(z_1 - \zeta) = 0$$

die folgenden

$$x_1 - x = P\omega \quad y_1 - y = Q\omega \quad z_1 - z = R\omega;$$

es ist also

$$x_1 - \xi = x - \xi + P\omega \quad y_1 - \eta = y - \eta + Q\omega \quad z_1 - \zeta = z - \zeta + Q\omega.$$

Für ω wird aus den vorstehenden Gleichungen gefunden.

$$P(x - \xi) + Q(y - \eta) + R(z - \zeta) + S^2 \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 \omega = 0.$$

Setzt man hier für $x - \xi$ u. s. w. die Reihen (3) ein, so zeigt sich zufolge der Bedeutung von PQR (Gl. 6), dass ω mit dem Gliede $(t-\tau)^3$ beginnt. Demnach ist

$$x_1 - \xi = \frac{dz}{d\tau} (t - \tau) + \dots \quad y_1 - \eta = \frac{dy}{d\tau} (t - \tau) + \dots$$

Führt man diese Werte für $x_1 - \xi$ und $y_1 - \eta$ in (13) ein und benützt die Formeln (10) bis (12), so ergibt sich leicht die Gleichung

$$2. CMN = \iota \varepsilon \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^3 \frac{t-\tau}{S} + (t-\tau)^2 \mathfrak{P}(t-\tau),$$

worin $\mathfrak{P}$ das Zeichen für eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen ist. Soll nun, wie verlangt ist, das Dreieck CMN bei hinlänglich kleinen positiven Werten von $t-\tau$ positiv sein, so muss $\iota = \varepsilon$ sein. Mithin bekommen wir für die Richtungs-cosinusse der positiven Binormale n_1 die folgenden Ausdrücke

$$S \frac{ds}{d\tau} \cos x \hat{n}_1 = \varepsilon P \quad S \frac{ds}{d\tau} \cos y \hat{n}_1 = \varepsilon Q \quad S \frac{ds}{d\tau} \cos z \hat{n}_1 = \varepsilon R. \quad (14)$$

4. Nachdem die positive Normale auf die Osculationsebene (7) in M festgesetzt ist, wird die Richtung n_2 in dieser Ebene durch die Bedingung, dass $t \hat{n}_2 = \frac{1}{2} \pi$ sei, vollkommen bestimmt. n_2 ist die positive Hauptnormale der Curve (2) in M . Ihre Richtungs-cosinusse lassen sich aus den Formeln (1) mit Hilfe der Gleichungen (5), (14) und (11) berechnen.

In der rechtwinkligen Ecke erster Art t, n_1, n_2 ist $t \hat{n}_2 = n_2 \hat{n}_1 = n_1 \hat{t} = \frac{1}{2} \pi$. Also erhält man aus (1), wenn man die Richtung a mit n_1 , a' mit t zusammenfallen lässt, auf die angegebene Weise

$$\left. \begin{aligned} S \frac{ds}{d\tau} \cos x \hat{n}_2 &= \left(Q \frac{dx}{d\tau} - R \frac{dy}{d\tau} \right) : \frac{ds}{d\tau} = T \\ S \frac{ds}{d\tau} \cos y \hat{n}_2 &= U \quad S \frac{ds}{d\tau} \cos z \hat{n}_2 = V. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Hieraus ergibt sich der Krümmungshalbmesser in M : $\varrho = MC$ mittelst einer der Gleichungen $\alpha - \xi = \varrho \cos x \hat{n}_2$ u. s. w. Also findet man für ϱ stets einen positiven Wert.*)

$$\varrho = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 : S. \quad (16)$$

Mit anderen Worten: Das Krümmungscentrum C der Curve (2) in M liegt auf der positiven Seite der in M getheilten Hauptnormale.

*) Die Annahme $S = 0$ ist hierbei ausgeschlossen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Curve (2) eine Gerade sei, ist das Verschwinden von S in allen Punkten derselben.

Als ein besonderer Fall von (16) sei angemerkt die Formel für den Krümmungsradius in M einer Curve, welche in einer Ebene mit der positiven Normale p liegt:

$$\varrho = \frac{\varepsilon \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^3 \cos x p}{P} = \frac{\varepsilon \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^3 \cos y p}{Q} = \frac{\varepsilon \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^3 \cos z p}{R}.$$

Beim ersten Ausdrucke kann man bleiben, wenn die Richtungen x und p nicht aufeinander senkrecht stehen u. s. w.

5. Geht man vom Punkte M der Curve (2) zu einem Nachbarpunkte M derselben mit der Binormale n und bezeichnet der Curvenbogen MM mit s , so hat man für die zweite Krümmung der Curve in M

$$k_2 = \lim_{s=0} \frac{n_1 \hat{n}}{s}. \quad (17)$$

Hierbei ist jedoch die positive Richtung in dem Schnitte der Osculationsebenen in M und M so zu wählen, dass sie bei $\lim s = 0$ mit der positiven Tangentenrichtung t in M zusammenfällt, und $n_1 \hat{n}$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zu nehmen. Aus (17) ergibt sich leicht der (abgesehen vom Zeichen) bekannte Ausdruck:

$$k_2 = \frac{\varepsilon A}{S^2 \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2} \quad A = \begin{vmatrix} \frac{dz}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dz}{d\tau} \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} & \frac{d^2y}{d\tau^2} & \frac{d^2z}{d\tau^2} \\ \frac{d^3x}{d\tau^3} & \frac{d^3y}{d\tau^3} & \frac{d^3z}{d\tau^3} \end{vmatrix}. \quad (18)$$

6. Hat man die Schraubenlinie zu construieren, welche in allen ihren Punkten die nämlichen Krümmungen hat, wie die Curve (2) in M , so muss man auch anzugeben imstande sein, ob dieselbe rechts- oder linksgewunden ist. Lassen wir bei dieser Untersuchung das Coordinatensystem xyz von erster Art sein, setzen also durchaus $\varepsilon = 1$, so haben wir für die Gleichungen einer gewöhnlichen Schraubenlinie

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = r \varphi \tan \alpha \quad (19)$$

und zwar ist dieselbe rechts- oder linksgewunden, je nachdem der Neigungswinkel α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ liegt.

Die positive Zahl r ist der Radius des erzeugenden Cylinders, φ der Winkel zwischen der positiven x -Richtung und der Pro-

jection, des Radiusvector des Punktes xyz auf die xy -Ebene. Die positiven Richtungen der Tangente, Binormale und Hauptnormale in einem Punkte M der Schraube (19) werden wie oben bestimmt. Die Hauptnormale n_2 ist die Richtung, welche von M senkrecht auf die Achse z des Cylinders gefällt wird.

Zieht man durch M eine Parallele z' zur Achse z des Cylinders, so hat man $\mathcal{E}t = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Um die Tangente t der Schraubenlinie in M zu construieren, ist mithin in der rectifizierenden Ebene tn_1 derselben von z' aus der Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ im positiven Sinne (d. i. im negativen Sinne für einen den Cylinder von außen betrachtenden Beobachter) aufzutragen. Endlich ergeben sich für die Krümmungen der Schraube in M die Werte

$$k_1 = \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos \alpha^2}{r} \quad k_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}. \quad (20)$$

Demnach ist die Torsion k_2 für die rechtsgewundene Schraube positiv, für die linksgewundene negativ.

Um nun diejenige Schraubenlinie zu construieren, welche überall dieselben Krümmungen, nämlich k_1 und k_2 , wie die Curve (2) in M , wird man zunächst die Gleichungen (20) nach α und r auflösen, wornach sich ergibt

$$\tan \alpha = \frac{k_2}{k_1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \\ r = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Die positiven Richtungen der Tangente, Bi- und Hauptnormale der gesuchten Schraubenlinie in M sind die nämlichen, wie die der Curve (2), also t, n_1, n_2 . Trägt man auf n_1 die Strecke $MR = r$ auf, so findet man einen Punkt R der Achse a des erzeugenden Cylinders. Die Richtung derselben wird durch eine zu a parallele Gerade a' bestimmt, welche man in der rectifizierenden Ebene tn_1 mittelst des Winkels

$$t^{\wedge} a' = - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

verzeichnet. Dadurch ist die Schraubenlinie durch M vollkommen bestimmt; sie erscheint, je nachdem k_2 positiv oder negativ ist, als rechts- oder linksgewunden.

7. Ich schließe diese Mittheilung mit der Anführung einer anscheinend nicht gehörig bekannten Formel für die erste Krümmung $k_1 = 1:\varrho$ einer Curve, welche durch einen gegebenen Punkt M (§ 71) einer Fläche geht

und ganz in derselben liegt, in diesem Punkte. Es soll aber der Punkt M nicht bloß als Flächenpunkt, sondern auch als Punkt der betrachteten Curve nicht-singulär sein, so dass z. B. der Schnitt der Fläche mit der tangierenden Ebene in M ausgeschlossen ist. Die Gleichung der Fläche sei auf die Form gebracht

$$\left. \begin{aligned} z - \zeta &= p(x - \xi) + q(y - \eta) \\ &+ \frac{r}{2}(x - \xi)^2 + s(x - \xi)(y - \eta) + \frac{t}{2}(y - \eta)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Unsere Curve ist vollkommen bestimmt durch ihre Projection auf die xy -Ebene, deren Gleichungen seien wie in (3)

$$\left. \begin{aligned} x - \xi &= \varphi'(\tau) \cdot (T - \tau) + \frac{\varphi''(\tau)}{2}(T - \tau)^2 + \dots \\ y - \eta &= \psi'(\tau) \cdot (T - \tau) + \frac{\psi''(\tau)}{2}(T - \tau)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke für $x - \xi$ und $y - \eta$ in (21) erhält man die dritte Gleichung der Curve. Zugleich erhellt, dass die Zahl

$$\psi'(\tau)^2 + \varphi'(\tau)^2 = w^2$$

nicht Null sein darf, also w positiv gewonnen werden kann. Bezeichnet p die positive Richtung der Tangente der ebenen Curve (22) im Punkte $\xi\eta$ und α den Winkel x_p , so werde

$$\begin{aligned} r \cos \alpha^2 + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin \alpha^2 &= H \\ 1 + (p \cos \alpha + q \sin \alpha)^2 &= N. \end{aligned}$$

$$H(q \cos \alpha - p \sin \alpha) + (1 + p^2 + q^2) \frac{\psi''(\tau) \cos \alpha - \varphi''(\tau) \sin \alpha}{w^2} = w$$

gesetzt. Alsdann ergibt sich mit Hilfe von (16) leicht der Ausdruck

$$(1 + p^2 + q^2) k_1^2 = \left(\frac{H}{N}\right)^2 + \frac{\omega^2}{N}. \quad (23)$$

Daraus ist ersichtlich, dass k_1 lediglich von der Stellung der Osculationsebene der durch M gehenden Curve in M abhängt. *) Mittelst der Formel (23) leitet man ohne Mühe die Extreme von k_1 und den Satz von Meusnier ab.

*) Vgl. J. Bertrand, Calcul différentiel etc. I, S. 656.

Es dürfte nicht überflüssig sein, den Ausdruck (23) auf die durch zwei Parameter u, v dargestellte Fläche

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v)$$

umzuformen. Jede auf ihr liegende Curve wird durch zwei Gleichungen

$$u = f(T) \quad v = g(T)$$

dargestellt. Der Kürze halber werden die ersten und zweiten Differentialquotienten von u, v nach T für den besonderen Wert $T = \tau$ mit $u'v', u''v''$ bezeichnet. Sonst gebrauchen wir die von Gauß*) benutzten Bezeichnungen.

Multipliziert man zunächst die Formel (23) mit C^2 , so gehe sie in

$$(EG - F^2) k_1^2 = \left(\frac{K}{N}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{N^2} \quad (24)$$

über. Hier ist, wie bekannt,

$$N = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 \\ K = Du'^2 + 2Du'v' + D''v'^2.$$

Zur Darstellung von Ω führen wir die Abkürzungen

$$Eu' + Fv' = U \quad Fu' + Gv' = V \\ mu'^2 + 2mu'v' + m''v'^2 = \mathfrak{M} \\ nu'^2 + 2nu'v' + n''v'^2 = \mathfrak{N}$$

ein. Dann finden wir

$$\Omega = (EG - F^2)(u'v'' - v'u'') + U\mathfrak{N} - V\mathfrak{M}.$$

Wenn die Curve in einer die Normale der Fläche in M enthaltenden Ebene

$$z - \zeta = \alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta)$$

liegt, in welchem Falle

$$\alpha p + \beta q + 1 = 0$$

ist, so hat man in der Formel (23) $\omega = 0$ zu setzen und es ergibt sich daraus für die erste Krümmung der Curve in M

$$\frac{1}{\varrho} = k = \frac{r(q - \beta)^2 - 2s(q - \beta)(p - \alpha) + t(p - \alpha)^2}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}(1 + \alpha^2 + \beta^2)}.$$

*) Vgl. Disquis. gen. circa superficies curvas. Art. 4, 10, 11. Ich habe lediglich an Stelle von p, q bei Gauß u, v geschrieben.

Dabei ist die positive Richtung n der Flächennormale in M , nach welcher das Zeichen von q und k zu bestimmen ist, durch die Cosinusse

$$\cos x^{\wedge}n = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \cos y^{\wedge}n = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \cos z^{\wedge}n = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

gegeben. $\sqrt{1+p^2+q^2}$ gilt durchaus als positiv.

In der Formel (24) wird der Normalschnitt in M durch die Gleichung $\Omega = 0$ charakterisiert. Dann hat man, wenn die Flächennormale n durch die Cosinusse

$$\cos x^{\wedge}n = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}} \quad \cos y^{\wedge}n = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}} \quad \cos z^{\wedge}n = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$$

bestimmt ist, die bekannte Formel

$$k \sqrt{EG-F^2} = K : N. \quad (\sqrt{EG-F^2} > 0).$$