SULL'EQUAZIONE DI EULERO PER GLI INTEGRALI MULTIPLI ¹⁾.

Nota di **G. Vivanti** (Pavia).

Adunanza del 25 febbrajo 1912.

1. Le condizioni affinchè un integrale doppio:

$$\iint \Phi \left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) du dv,$$

contenente 3 funzioni x, y, z di 2 parametri u, v , abbia valore indipendente dalla scelta dei parametri, furono stabilite da G. KOBB ²⁾ e da A. KNESER ³⁾; esse sono le seguenti, dove scriviamo per brevità x_u, y_u , etc. in luogo di $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$, etc.:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_u} x_u + \frac{\partial \Phi}{\partial y_u} y_u + \frac{\partial \Phi}{\partial z_u} z_u = \Phi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_u} x_v + \frac{\partial \Phi}{\partial y_u} y_v + \frac{\partial \Phi}{\partial z_u} z_v = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_v} x_u + \frac{\partial \Phi}{\partial y_v} y_u + \frac{\partial \Phi}{\partial z_v} z_u = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_v} x_v + \frac{\partial \Phi}{\partial y_v} y_v + \frac{\partial \Phi}{\partial z_v} z_v = \Phi. \end{cases}$$

Ci proponiamo di mostrare come da queste condizioni possa dedursi la forma esplicita della Φ , considerando, per maggior generalità, un integrale n -plo contenente $n + 1$ funzioni di n parametri. La conoscenza della forma della Φ ci permetterà poi di costruire abbastanza facilmente, per n qualunque, l'equazione d'EULERO, che KOBB ha calcolato per il caso d'un integrale doppio.

¹⁾ Mentre sto correggendo le bozze, vengo a conoscere che alcuni dei risultati contenuti in questa Nota sono stati dati recentemente da J. RADON nel suo lavoro: *Über einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale* [Monatshefte für Mathematik und Physik, t. XXII (1911), pp. 53-63]. Pubblico tuttavia la presente Nota senza alterazione, e perchè nel lavoro citato la forma della funzione Φ è indicata senza alcuno schiarimento sul modo di ottenerla, e perchè spero poter ricavare in seguito dalle formole qui stabilite nuove conseguenze.

²⁾ G. KOBB, *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles* [Acta Mathematica, t. XVI (1892-93), pp. 65-140; t. XVII (1893), pp. 321-343].

³⁾ A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, Vieweg, 1900).

2. Indicheremo le funzioni con $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, i parametri con $v_1, v_2, \dots, v_n$, e porremo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_b} = x_{ib} \quad (i = 1, \dots, n+1; b = 1, \dots, n).$$

L'integrale da considerarsi potrà scriversi:

$$\int^{(n)} \Phi(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{11}, \dots, x_{n+1,1}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n+1,n}) dv_1 \dots dv_n.$$

Anzitutto è chiaro che il metodo seguito dagli autori citati per ottenere le equazioni (1) si estende senz'altro al caso di un numero qualunque di variabili, e che si giunge al seguente risultato:

$$(2) \quad X_{rr} \Phi \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ir}} x_{ir} = \Phi \quad (r = 1, \dots, n),$$

$$(3) \quad X_{rs} \Phi \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ir}} x_{is} = 0 \quad (r, s = 1, \dots, n; r \neq s).$$

Al sistema (2) può evidentemente sostituirsi l'altro:

$$(4) \quad X_{11} \Phi = \Phi,$$

$$(5) \quad X_{rr} \Phi - X_{11} \Phi = 0 \quad (r = 2, \dots, n).$$

Il sistema delle $n(n-1)$ equazioni (3), considerato come un sistema d'equazioni lineari omogenee alle derivate parziali rispetto alla funzione Φ , non è completo. Si trova infatti senza difficoltà:

$$(X_{rs} X_{tu}) \Phi = \varepsilon_{ru} X_{ts} \Phi - \varepsilon_{st} X_{ru} \Phi,$$

dove:

$$\varepsilon_{ib} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = b; \\ 0 & \text{per } i \neq b; \end{cases}$$

sicché l'equazione:

$$(X_{rs} X_{tu}) \Phi = 0$$

è un'identità se $r \neq u, s \neq t$, fa parte delle (3) se sussiste una sola di queste disuguaglianze, è una delle (5) se $r = u, s = t$. È facile vedere che il sistema (3), (5) è completo. Esso consta di $n^2 - 1$ equazioni con $n(n+1)$ variabili indipendenti, e però ammette $n+1$ integrali indipendenti; tali sono i minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

minori che indicheremo con $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$, e la cui espressione è:

$$\xi_b = (-1)^{n+1-b} \frac{d(x_1, \dots, x_{b-1}, x_{b+1}, \dots, x_n)}{d(v_1, \dots, v_n)} \quad 4).$$

4) Per stabilire l'indipendenza di $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ come funzioni di $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{n+1,n}$, basta

Ne segue che l'integrale generale del sistema (3), (5) è:

$$\Phi = \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}),$$

dove ψ denota una funzione arbitraria. Resta da determinare la forma di tale funzione in modo che sia soddisfatta anche l'equazione (4). Ora questa equazione esprime che Φ deve essere funzione omogenea di primo grado di $x_1, \dots, x_{n+1}$; d'altra parte $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ sono pure funzioni omogenee di primo grado degli stessi argomenti; quindi Φ deve essere funzione omogenea di primo grado di $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$.

3. La condizione or ora trovata è anche sufficiente. Prendiamo un nuovo sistema di parametri $w_1, \dots, w_n$ legati ai primitivi dalle relazioni indipendenti:

$$w_i = \varphi_i(v_1, \dots, v_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

ed indichiamo con Δ il determinante funzionale delle w_i rispetto alle v_i , con $\eta_1, \dots, \eta_{n+1}$ le espressioni analoghe alle $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ formate per i nuovi parametri. Sarà:

$$x_{ih} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial v_h} \quad (i = 1, \dots, n+1; h = 1, \dots, n),$$

quindi:

$$\xi_k = \Delta \eta_k,$$

e conseguentemente, per l'omogeneità della Φ :

$$\Phi = \Delta \psi(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}).$$

mostrare che la matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{11}} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{12}} & \dots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{12}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n+1,n}} & \dots & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{n+1,n}} \end{vmatrix}$$

contiene almeno un determinante d'ordine massimo non identicamente nullo. Consideriamo il determinante D formato colle prime $n+1$ righe; poichè $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_{11}} = \dots = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{1n}} = 0$, esso si riduce a:

$$D = (-1)^n \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{21}} \frac{d(\xi_2, \dots, \xi_{n+1})}{d(x_{11}, \dots, x_{1n})}.$$

Ora è facile dimostrare che:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_{st}} = - \frac{\partial \xi_s}{\partial x_{rt}};$$

ne segue:

$$D = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{21}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{21}} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n+1,1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{2n}} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n+1,n}} \end{vmatrix}.$$

Ma quest'ultimo determinante è l'aggiunto di ξ_1 , sicchè il suo valore è ξ_1^{n-1} ; quindi:

$$D = \xi_1^{n-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{21}} \neq 0.$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \int^{(n)} \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) dv_1 \dots dv_n &= \int^{(n)} \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{1}{\Delta} dw_1 \dots dw_n \\ &= \int^{(n)} \psi(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) dw_1 \dots dw_n, \end{aligned}$$

ciò che dimostra l'asserto. Dunque: *Affinchè l'integrale considerato abbia valore indipendente dalla scelta dei parametri, è necessario e sufficiente che Φ sia funzione omogenea* ⁵⁾ *di primo grado di $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$.*

4. Nel caso della rappresentazione parametrica tengono il posto dell'equazione di EULERO le $n+1$ equazioni:

$$P_r \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ri}} \right) = 0 \quad (r = 1, \dots, n+1),$$

che si riducono ad una sola in causa delle n identità ⁶⁾:

$$\sum_{r=1}^{n+1} P_r x_{ri} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

dalle quali segue:

$$\frac{P_1}{\xi_1} = \dots = \frac{P_{n+1}}{\xi_{n+1}}.$$

Basta quindi calcolare una sola delle espressioni $P_1, \dots, P_{n+1}$.

Calcoliamo per esempio P_1 . Si ha anzitutto:

$$(6) \quad P_1 \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{1i}} \right) = 0.$$

Indicando con $\psi_1, \dots, \psi_{n+2}$ le derivate parziali prime della funzione ψ rispetto ai suoi argomenti, ed analogamente con ψ_{ih} le sue derivate seconde, risulta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \psi_{n+2},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{1i}} = \sum_{h=1}^{n+1} \psi_h \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{1i}} \right) = \sum_{h=1}^{n+1} \psi_h \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} \right) + \sum_{h=1}^{n+1} \frac{\partial \psi_h}{\partial v_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} \quad (i = 1, \dots, n),$$

sicchè la (6) diviene:

$$(7) \quad \psi_{n+2} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{n+1} \psi_h \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{n+1} \frac{\partial \psi_h}{\partial v_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} = 0.$$

⁵⁾ Più precisamente: *omogenea-positiva* [cfr. O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig und Berlin, Teubner, 1909), p. 194], giacchè si devono considerare solo quei cambiamenti di parametri per cui $\Delta > 0$, condizione che esprime la conservazione del senso positivo della normale all'ipersuperficie d'integrazione.

⁶⁾ A. KNESER, loc. cit. ³⁾.

Immaginiamo sviluppata la somma:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \right).$$

Ciascuno dei suoi $(n-1)!n(n-1) = n!(n-1)$ termini contiene come fattore una derivata seconda di una delle x . La derivata $\frac{\partial^2 x_r}{\partial v_i \partial v_i}$ figura nello sviluppo di $\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \right)$ e in quello di $\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \right)$; cerchiamone i coefficienti nei due sviluppi. Si ha:

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{is}} = (-1)^{n-h+s} \frac{d(x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_{n+1})}{d(v_1, \dots, v_{s-1}, v_{s+1}, \dots, v_n)};$$

il coefficiente di $\frac{\partial x_r}{\partial v_i}$ in questo determinante è, per $s \neq t$:

$$(8) \quad (-1)^\varepsilon \frac{d(x)}{d(v)},$$

dove tra le x mancano x_1 , x_r e x_h , e tra le v mancano v_s e v_t , e dove:

$$\varepsilon = \begin{cases} n-h+s+r+t & \text{per } r \leq h, \\ n-h+s+r+t-1 & \text{per } r > h, \end{cases}$$

supposto, per fissare le idee, $s < t$. La (8) è pure il coefficiente di $\frac{\partial^2 x_r}{\partial v_i \partial v_i}$ in $\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \right)$, ed è anche, per ragione di simmetria, il coefficiente di $\frac{\partial^2 x_r}{\partial v_i \partial v_i}$ in $\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \right)$, colla sola differenza che, per essere $t > s$, si ha:

$$\varepsilon = \begin{cases} n-h+s+r+t-1 & \text{per } r \leq h, \\ n-h+s+r+t & \text{per } r > h. \end{cases}$$

I due coefficienti sono dunque eguali e di segno opposto, sicchè:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \right) = 0,$$

e la (7) si riduce a:

$$(9) \quad \psi_{n+2} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{n+1} \frac{\partial \psi_h}{\partial v_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} = 0.$$

Derivando la ψ_h rispetto a v_i , si ottiene:

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial v_i} = \sum_{k=1}^{n+1} \psi_{hk} \frac{\partial \xi_k}{\partial v_i} + \sum_{k=1}^{n+1} \psi_{h,n+1+k} x_{ki};$$

d'altra parte, per essere la ψ , e quindi ogni sua derivata rispetto ad uno degli ultimi $n+1$ argomenti, omogenea di primo grado rispetto a $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$:

$$\psi_{n+2} = \sum_{h=1}^{n+1} \psi_{n+2,h} \xi_h = \sum_{h=1}^{n+1} \psi_{h,n+2} \xi_h,$$

sicchè la (9) diviene:

$$(10) \quad \sum_{h=1}^{n+1} \psi_{h,n+2} \xi_h - \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \psi_{hk} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} \frac{\partial \xi_k}{\partial v_i} - \sum_{h=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \psi_{h,n+1+k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ii}} x_{ki} = 0.$$

Per una nota proprietà dei determinanti si ha, per $h > 1$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} x_{1i} = \xi_h,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{ki}} x_{ki} = 0 \quad (k = 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n+1);$$

inoltre:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} x_{hi} = (-1)^{n-h+1} \frac{d(x_h, x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_{n+1})}{d(v_1, \dots, v_n)}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{d(x_2, \dots, x_{n+1})}{d(v_1, \dots, v_n)} = -\xi_1.$$

Per $h = 1$ si ha invece:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} x_{ki} = 0,$$

perchè ξ_1 non contiene le derivate di x_1 . Ne segue:

$$S \equiv \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \psi_{h,n+1+k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{1i}} x_{ki} = \sum_{h=2}^{n+1} \psi_{h,n+2} \xi_h - \xi_1 \sum_{h=2}^{n+1} \psi_{h,n+1+h},$$

quindi:

$$(11) \quad \sum_{h=1}^{n+1} \psi_{h,n+2} \xi_h - S = \xi_1 \sum_{h=1}^{n+1} \psi_{h,n+1+h}.$$

Finalmente, essendo la ψ omogenea di primo grado rispetto a $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$, le $\psi_1, \dots, \psi_{n+1}$ sono omogenee di grado zero rispetto agli stessi argomenti; cioè si ha:

$$\sum_{h=1}^{n+1} \psi_{hk} \xi_h = 0 \quad (k = 1, \dots, n+1),$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} & \psi_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & \psi_{n+1,k} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora, poichè in un determinante nullo i complementi algebrici degli elementi omologhi di due linee parallele sono proporzionali, si avrà, applicando il teorema alle colonne i^{esima} ed ultima:

$$(12) \quad \frac{k_i}{\xi_i} = \dots = \frac{k_{n+1}}{\xi_{n+1}},$$

dove:

$$k_i = \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2n} & \psi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,i-1} & x_{n+1,i+1} & \dots & x_{n+1,n} & \psi_{n+1,k} \end{vmatrix},$$

ed analogo significato hanno le altre k . Il coefficiente di ψ_{hk} in k_i è:

$$(-1)^{n+h-1} \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{h-1,1} & \dots & x_{h-1,i-1} & x_{h-1,i+1} & \dots & x_{h-1,n} \\ x_{h+1,1} & \dots & x_{h+1,i-1} & x_{h+1,i+1} & \dots & x_{h+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,h-1} & x_{n+1,h+1} & \dots & x_{n+1,n} \end{vmatrix},$$