3. Ueber den Begriff des dielectrischen Widerstandes; von P. Drude.

Zum Studium der Eigenschaften magnetischer Felder hat sich die Einführung des Begriffes „magnetischer Widerstand“ nützlich erwiesen, da man mit seiner Hülfe näherungsweise die Feldstärke berechnen kann für sogenannte magnetische Kreisläufe, die entweder ganz aus Eisenmassen gebildet sind, oder doch nur schmale Unterbrechungen in denselben aufweisen.

Der analoge Begriff des dielectrischen Widerstandes für electriche Felder bietet nicht dieselben practischen Vorthelle, weil es keine Isolatoren gibt, deren Dielectricitätsconstante um so viel die der Luft übertrifft, wie dies beim Eisen hinsichtlich der Magnetisirungsconstante der Fall ist. Trotzdem empfiehlt sich aber die Einführung des Begriffes des dielectrischen Widerstandes, weil durch ihn die Eigenschaften electriche Felder recht anschaulich dargestellt werden können und gewisse allgemeine Sätze der Electrostatik, die sonst eine genauere Ueberlegung oder Rechnung erfordern, unmittelbar herzuleiten sind. — Dies möchte ich in den folgenden Zeilen kurz besprechen.¹⁾

1. Die Anzahl dN von electriche Kraftlinien, welche ein an der beliebigen Stelle P befindliches Flächenelement dS durchschneidet, soll gesetzt werden gleich dem Inductionsfluss durch dS , d. h.

$$(1) \quad dN = \epsilon \mathfrak{F}_n dS,$$

wobei ϵ die Dielectricitätsconstante in P bedeutet, $\mathfrak{F}_n$ die Normalcomponente der electriche Kraft auf dS . ϵ kann eine beliebige stetige oder unstetige Function des Ortes sein. — Bei dieser Definition der Kraftlinienzahl ergibt sich bekanntlich der Satz, dass die Kraftlinien nur endigen an Stellen,

1) Einige der im Folgenden angestellten Betrachtungen sind schon in meinem Buche: „Physik des Aethers“, Enke, Stuttgart, p. 274—277. 1894, enthalten.

welche wahre electricische Ladung enthalten. Hat irgend ein Raumtheil die irgendwie in ihm vertheilte wahre Ladung e , so treten aus einer ihn umgebenden geschlossenen Fläche im Ganzen

$$(2) \quad N = 4 \pi e$$

Kraftlinien aus (bei positivem e), bez. ein (bei negativem e).

Es möge nun eine unendlich dünne, aber beliebig lange Kraftröhre betrachtet werden, deren Enden an den Stellen P_1 bez. P_2 liegen, und die keine wahre Ladung enthalten soll. Der Querschnitt an einer beliebigen Stelle P der Kraftröhre sei dq , die Dielectricitätsconstante dort sei mit ε bezeichnet. Dann ist nach (1) die Anzahl von Kraftlinien, welche dq durchsetzt, d. h. überhaupt in der Röhre vorhanden ist:

$$(3) \quad dN = \varepsilon \mathfrak{F} dq,$$

wobei $\mathfrak{F}$ die resultirende Feldstärke bedeutet. Denn in der Formel (1) wird die Normalcomponente $\mathfrak{F}_n$ gleich der Resultante $\mathfrak{F}$ des Feldes, wenn das Flächenstück dS senkrecht zu den Kraftlinien liegt.

Nennt man V das electricische Potential in P , wird ferner die positive Kraftlinienrichtung in P , d. h. die Axenrichtung der Kraftröhre, mit l bezeichnet, so ist

$$(4) \quad \mathfrak{F} = - \frac{\partial V}{\partial l},$$

d. h. nach (3)

$$(5) \quad \mathfrak{F} = - \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{dN}{\varepsilon dq}.$$

Multiplieirt man diese Gleichung mit einem Element dl der Axenlänge, und integrirt über die ganze Röhre von P_1 bis P_2 , so wird

$$- \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial l} dl = \int_1^2 \frac{dN}{\varepsilon dq} dl = dN \int_1^2 \frac{dl}{\varepsilon dq}.$$

Man kann den Factor dN vor das Integralzeichen setzen, da er innerhalb der Kraftröhre constant ist. — Bezeichnet man also die Werthe des Potentials an den Endstellen der (unendlich dünnen) Kraftröhre mit V_1 bez. V_2 , setzt man ferner

$$(6) \quad \int_1^2 \frac{dl}{s \, dq} = w,$$

so wird

$$V_1 - V_2 = dN \cdot w,$$

oder

$$(7) \quad dN = \frac{V_1 - V_2}{w}.$$

w wollen wir den *dielectricischen Widerstand* der Krafttröhre zwischen den Stellen P_1 und P_2 nennen; wir erhalten also den Satz:

Die in einer unendlich dünnen Krafttröhre enthaltene Kraftlinienzahl ist gleich der Potentialdifferenz (electromotorischen Kraft) zwischen ihren Endstellen, dividirt durch ihren dielectricischen Widerstand.

2. Parallel geschaltete Krafttröhren sind solche, bei denen die Potentialdifferenz ihrer Endstellen dieselbe ist. Die Gesamtzahl der in einem System parallel geschalteter Krafttröhren enthaltenen Kraftlinien ist nach (7)

$$N = \sum dN = (V_1 - V_2) \sum \frac{1}{w},$$

d. h. für

$$(8) \quad N = \frac{V_1 - V_2}{W},$$

ist

$$(9) \quad \frac{1}{W} = \sum \frac{1}{w},$$

in Worten: *Für ein System parallel geschalteter Krafttröhren ist ihr reciprocer Gesamtwiderstand gleich der Summe der reciprocen Widerstände der einzelnen Röhren.*

Dass für hintereinandergeschaltete Krafttröhren, d. h. solche, deren eine sich vom Potentialwerth V_1 bis V_2 , deren zweite sich vom Potentialwerth V_2 bis V_3 etc. erstreckt, der Gesamtwiderstand gleich der Summe der Einzelwiderstände ist, folgt aus der Definition (6) des Widerstandes selbstverständlich.

3. Es mögen drei electricisch geladene Conductoren A_1, A_2, A_3 vorhanden sein, deren Potentialwerthe V_1, V_2, V_3 sein mögen. Es sei $V_1 > V_2 > V_3$. Es gibt dann drei Systeme parallel geschalteter Krafttröhren, nämlich eines, welches zwischen den Conductoren A_1 und A_2 , eines, welches zwischen

A_2 und A_3 , und eines, welches zwischen A_3 und A_1 verläuft.¹⁾ Der Widerstand einer Krafröhre des ersten Systems mag mit w_{12} , einer des zweiten mit w_{23} , einer des dritten mit w_{31} bezeichnet werden.

Dann ist nach (8) die Anzahl der Kraftlinien des ersten Systemes:

$$(10) \quad N_{12} = \frac{V_1 - V_2}{W_{12}} = (V_1 - V_2) \sum \frac{1}{w_{12}},$$

die Anzahl der Kraftlinien des zweiten Systems

$$(10') \quad N_{23} = \frac{V_2 - V_3}{W_{23}} = (V_2 - V_3) \sum \frac{1}{w_{23}},$$

die Anzahl der Kraftlinien des dritten Systemes

$$(10'') \quad N_{13} = \frac{V_1 - V_3}{W_{13}} = (V_1 - V_3) \sum \frac{1}{w_{13}}.$$

(In der letzten Gleichung steht $V_1 - V_3$ und nicht $V_3 - V_1$, weil V_1 grösser als V_3 vorausgesetzt ist, und die überhaupt vorhandene Kraftlinienzahl ihrer Bedeutung nach positiv ist.)

Bezeichnet man nun die im Ganzen aus dem Conductor A_1 austretende Kraftlinienzahl mit N_1 , so ist $N_1 = N_{12} + N_{13}$, denn sowohl die Kraftlinien N_{12} , wie die Kraftlinien N_{13} sind austretende Kraftlinien, da sie von höherem Potentialwerth V_1 auf A_1 zu kleineren Potentialwerthen übergehen.

Ferner ist die im Ganzen aus dem Conductor A_2 austretende Kraftlinienzahl $N_2 = -N_{12} + N_{23}$, die im Ganzen aus dem Conductor A_3 austretende Kraftlinienzahl $N_3 = -N_{13} - N_{23}$.

Nennt man nun noch e_1, e_2, e_3 die auf den Conductoren vorhandenen Gesamtladungen, so wird nach (2) und den Formeln (10), (10'), (10''):

$$(11) \quad \begin{cases} 4\pi e_1 = V_1 \left(\frac{1}{W_{12}} + \frac{1}{W_{13}} \right) - V_2 \frac{1}{W_{12}} - V_3 \frac{1}{W_{13}}, \\ 4\pi e_2 = -V_1 \frac{1}{W_{21}} + V_2 \left(\frac{1}{W_{21}} + \frac{1}{W_{23}} \right) - V_3 \frac{1}{W_{23}}, \\ 4\pi e_3 = -V_1 \frac{1}{W_{31}} - V_2 \frac{1}{W_{32}} + V_3 \left(\frac{1}{W_{31}} + \frac{1}{W_{32}} \right). \end{cases}$$

1) Es wird vorausgesetzt, dass in der Unendlichkeit keine Kraftlinie endet. Es müssen sonst diese noch mit zu dem System der Conductoren hinzugerechnet werden.

Vergleicht man dieses Formelsystem mit

$$(12) \quad \begin{cases} e_1 = V_1 C_{11} + V_2 C_{12} + V_3 C_{13}, \\ e_2 = V_1 C_{21} + V_2 C_{22} + V_3 C_{23}, \\ e_3 = V_1 C_{31} + V_2 C_{32} + V_3 C_{33}, \end{cases}$$

in welchen die C_{11} , C_{22} , C_{33} die Capacitäten, die C_{hk} Inductionscoefficienten genannt werden, so ergibt sich der Satz, der auch sofort auf ein System beliebig vieler Conductoren auszu-dehnen ist:

Die Capacität eines Conductors ist gleich dem reciproken Gesamtwiderstande sämtlicher von ihm ausgehender Krafttröhren in Parallelschaltung, dividirt durch 4π .

Der Inductionscoefficient zwischen zwei Conductoren ist gleich dem negativen reciproken Gesamtwiderstand sämtlicher, zwischen ihnen verlaufender, parallel geschalteter Krafttröhren, dividirt durch 4π .

Hieraus und aus Vergleichung von (11) und (12) folgt dann ohne weitere Rechnung von selbst:

1) Die Capacitäten sind positive, die Inductionscoefficienten negative Grössen.

2) Es ist $C_{hk} = C_{kh}$.

3) Es ist $C_{11} = -(C_{12} + C_{13})$, allgemein $C_{11} + C_{12} + C_{13} + \dots + C_{hh} = 0$.

4) Aus 3) in Verbindung mit 1) folgt, dass die Capacität eines Conductors dem absoluten Betrage nach nie kleiner als seine Inductionscoefficienten sind.

5) Wenn man dasselbe System von Conductoren einmal im Vacuum betrachtet ($\epsilon = 1$), sodann in einem homogenen Isolator der Dielectricitätsconstanten ϵ , so vergrössern sich die Capacitäten und Inductionscoefficienten im Verhältniss ϵ (da die Widerstände W ϵ mal kleiner werden).

6) Da die Capacitäten und Inductionscoefficienten proportional den reciproken Widerständen sind, so folgt nach den Sätzen des § 2, dass sich die Capacitäten parallel geschalteter Condensatoren addiren, dass dagegen bei hintereinander geschalteten Condensatoren sich die reciproken Capacitäten addiren.

7) A_1 besitzt nur austretende Kraftlinien, d. h. an jeder Stelle seiner Oberfläche positive Ladung, A_3 besitzt nur ein-

tretende Kraftlinien, d. h. an jeder Stelle seiner Oberfläche negative Ladung, A_2 besitzt sowohl positive wie negative Ladung. Allgemein: Der Conductor mit grösstem Potential hat nur positiv geladene Oberfläche, der mit kleinstem nur negativ geladene, die übrigen Conductoren besitzen sowohl positiv wie negativ geladene Stellen ihrer Oberfläche.¹⁾

8) Aus (7) folgt, dass, wenn man einen ungeladenen Conductor isolirt in ein electrisches Feld bringt, er sich zu einem Potentialwerthe laden muss, welcher zwischen den extremen Werthen des Potentials der schon vorhandenen Conductoren liegt. Denn da seine Gesamtladung Null bleibt, so muss er sowohl positiv, wie negativ geladene Oberflächenstellen besitzen.

9) Durch einen in das Feld hineingebrachten Conductor B vergrössern sich sämmtliche Capacitäten der schon vorhandenen Conductoren A . Denn die von A ausgehenden Kraftlinien erhalten durch den Conductor B einen Nebenschluss mehr, folglich muss sich ihr Gesamtwiderstand verkleinern, also die Capacität von A vergrössern.

10) Ein in das Feld hineingebrachter Isolator von grösserer Dielectricitätsconstante als die des ursprünglichen Feldes vergrössert die Capacität und die Inductionscoefficienten hauptsächlich für diejenigen Conductoren, deren Kraftlinien vorzugsweise den Isolator schneiden, da durch die höhere Dielectricitätsconstante der Widerstand der dort verlaufenden Krafröhren verringert wird.

4. Die electrische Energie des Feldes ist

$$(13) \quad E = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon \mathfrak{F}^2 d\tau,$$

wobei $d\tau$ ein Volumenelement bedeutet und die Integration über das ganze Feld zu erstrecken ist.

Die in einer unendlich dünnen Krafröhre enthaltene Energie ist daher nach (3) und (4), wenn man setzt

$$(14) \quad \begin{aligned} d\tau &= dq \cdot dl \\ dE &= \frac{1}{8\pi} \int dN \cdot \mathfrak{F} dl = \frac{dN(V_1 - V_2)}{8\pi}, \end{aligned}$$

1) Dieser Satz und der folgende ergibt sich schon durch die Construction der Kraftlinien überhaupt, ohne dass man den Begriff des dielectricischen Widerstandes einführt.

wobei dN die Anzahl der in der Röhre enthaltenen Kraftlinien bezeichnet, V_1 und V_2 die Potentialwerthe am Anfang und Ende der Kraftröhre.

Die Energie, welche in einem System von Kraftröhren enthalten ist, die parallel zwischen zwei Conductoren A_1 und A_2 enthalten sind, ist

$$(15) \quad E_{12} = \frac{N_{12}(V_1 - V_2)}{8\pi},$$

oder gemäss der Formel (10):

$$(15') \quad E_{12} = \frac{N_{12}^2 \cdot W_{12}}{8\pi},$$

$$(15'') \quad E_{12} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{8\pi W_{12}}.$$

Sind überhaupt nur die beiden Conductoren A_1 und A_2 vorhanden, so ist E_{12} die ganze electrische Energie, W_{12} der dielectrische Widerstand des ganzen Feldes, N_{12} die Gesamtzahl der vorhandenen Kraftlinien.

Ponderomotorische Kräfte wirken stets in dem Sinne, dass E einem Minimum zustrebt, wobei vorauszusetzen ist, dass die Ladungen, d. h. die Kraftlinienzahl N_{12} , constant bleibt. Nach (15') folgt also, dass die ponderomotorischen Kräfte den dielectrischen Widerstand stets möglichst zu verkleinern suchen.

Von diesem Gesichtspunkte aus ist es leicht verständlich, dass die ponderomotorischen Wirkungen nach Maxwell durch einen Zug parallel den Kraftlinien und einen Druck senkrecht zu ihnen erklärt werden können; denn bei Verkürzung der Kraftröhren und Dehnung ihres Querschnittes nimmt ihr dielectrischer Widerstand ab.

Ferner folgt aus jenem Satze, dass Isolatoren, deren Dielectricitätsconstante grösser als die ihrer Umgebung ist, nach Stellen des kleinsten Querschnittes der Kraftröhren, d. h. der grössten Feldstärke hingezogen werden, weil dann der Widerstand des ganzen Feldes am meisten abnehmen muss; umgekehrt bewegen sich Isolatoren mit einer kleineren Dielectricitätsconstante, als die des übrigen Feldes ist, nach Orten der kleinsten Feldstärke.

Die geleistete Arbeit dA bei irgend einer Configurationsänderung des electrischen Systems ist

$$(16) \quad dA = -d_e E,$$

wobei der untere Index e andeuten soll, dass bei der Aenderung der Energie die Electricitätsmengen constant bleiben.

Nach (15') ist daher

$$(17) \quad dA = -\frac{N_{12}^2}{8\pi} dW_{12}.$$

Setzt man hierin für N_{12} seinen Werth nach (10), so entsteht

$$(18) \quad dA = -\frac{(V_1 - V_2)^2}{8\pi} \cdot \frac{dW_{12}}{W_{12}^2},$$

oder nach Formel (15''):

$$(19) \quad dA = +d_V E,$$

wobei der Index V andeutet, dass bei dieser Variation von E die Potentialwerthe V als constant betrachtet werden müssen.

Es ergibt sich aus (16) und (19), dass die Kraft K , bez. das Drehungsmoment D welche irgend ein Körper im electrischen Felde nach einer Richtung s oder um eine Axe σ erfährt, gegeben ist durch

$$(20) \quad \begin{cases} K = -\frac{\partial_e E}{\partial s} + \frac{\partial_V E}{\partial s}, \\ D = -\frac{\partial_e E}{\partial \varphi} + \frac{\partial_V E}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

wobei φ den Drehungswinkel um die Axe σ bedeutet, und die partiellen Differentialquotienten das Verhältniss der Aenderungen der electrischen Energie des ganzen Feldes bei einer Verschiebung des Körpers um ds , bez. einer Drehung um $d\varphi$ zu der Verschiebung ds , bez. Drehung $d\varphi$ bedeuten; bei diesen Aenderungen der Energie E kann man entweder annehmen, dass die Ladungen e constant bleiben, oder die Potentialwerthe V der geladenen Stellen; man muss dann also verschiedene Vorzeichen setzen.

Körper mit bestimmter electrischer Ladung (isolirte Körper), deren Umgebung überall dieselbe Dielectricitätsconstante ϵ besitzt, wirken aufeinander umgekehrt proportional mit ϵ , Körper mit bestimmtem Potential (die mit den Polen constanter Batterien verbunden sind) wirken aufeinander direct proportional der Dielectricitätsconstante ϵ der Umgebung. Diese beiden

Sätze folgen sofort aus den Formeln (17) und (18), da der Widerstand W_{12} des Feldes umgekehrt proportional zu seiner Dielectricitätsconstante ϵ ist.

Die in diesem Paragraphen für das Feld zweier Conductoren hergeleiteten Sätze lassen sich leicht durch etwas mehr Rechnung auf das Feld beliebig vieler Conductoren erweitern.

Zum Schluss möchte ich noch einmal hervorheben, dass die Einführung des Begriffes des dielectricischen Widerstandes nicht zur Erleichterung der wirklichen Berechnung electricischer Felder dient, da der Verlauf der Kraftlinien und daher auch der dielectricische Widerstand erst zu berechnen ist, wenn man die mathematische Form des Potentials ermittelt hat. — Aber ich glaube, dass jener Begriff zur Schätzung etwaiger ponderomotorischer Wirkungen, sowie besonders zur bequemen Herleitung der in § 3 unter 1) bis 10) angeführten Sätze gut anwendbar ist.

Leipzig, December 1895.