VI. Ueber die Gesetze des Magnetismus nach Ampère's Theorie;

von K. W. Knochenhauer,

Lehrer an der Realschule zu Neustrelitz.

Indem ich Ampère's Theorie, nach der die Magnete gleich galvanischen Spiralen auf einander wirken, in leichtere und mir mehr übersichtliche mathematische Formeln übertrug, ergaben sich mir Resultate, welche mit den anerkannten Gesetzen des Magnetismus nicht übereinstimmen; ich erlaube mir deshalb den Gang der Rechnung hier anzugeben, da sich vielleicht hierdurch eine weitere Begründung der so sehr ansprechenden Theorie herbeiführen läßt, und andere, denen die erforderlichen Mittel zu Gebote stehen, sich zu neuen Experimenten veranlaßt fühlen möchten. Wie Ampère setze ich die gegenseitige Anziehung der zu ihrer Verbindungslinie R senkrechten Elemente ds, ds' zweier parallelen galvanischen Ströme von i, i' Intensität bei derselben Richtung $= \frac{ii' ds ds'}{R^2}$, bei entgegengesetzten $= -\frac{ii' ds ds'}{R^2}$, die Wirkung zweier Elemente der auf R nach derselben Richtung laufenden Ströme sey $= -\frac{kii' ds ds'}{R^2}$ und nach der entgegengesetzten $= \frac{kii' ds ds'}{R^2}$; ferner mögen, wie bei Ampère, zwei zu einander senkrechte Elemente weder Anziehung noch Abstossung veranlassen. Berechnet man hiernach die gegenseitige Wirkung zweier in derselben Ebene befindlichen Kreise, deren Peripherien vom Galvanismus durchflossen werden, so sey, Fig. 8 Taf. V, MN das Element ds' eines von M nach N gehenden galvanischen

Stromes von i' Intensität, und im Kreise um C bewege sich der Galvanismus mit i Intensität nach der Richtung $EBDGE$; es sey $CE=r$ sehr klein gegen AC , damit die höheren Potenzen als $\frac{r^4}{AC^4}$ vernachlässigt werden können, ist dann MN senkrecht auf AC und $\angle BAC = \vartheta$, so ist die Wirkung von ds' auf das Element bei B , beide senkrecht zu AB gelegt,

$$= \frac{ii' ds' \cos \vartheta \cdot AB d\vartheta}{AB^2},$$

und auf das Element bei D für dieselbe Bedingung

$$= - \frac{ii' ds' \cos \vartheta \cdot AD d\vartheta}{AD^2},$$

also auf beide zugleich, parallel zu CA genommen,

$$= ii' ds' \cos \vartheta \left[\frac{AB d\vartheta}{AB^2} - \frac{AD d\vartheta}{AD^2} \right] \cos \vartheta,$$

und auch den ganzen Kreis um C :

$$= 2ii' ds' \int \cos^2 \vartheta d\vartheta \left(\frac{AD-AB}{AB \cdot AD} \right),$$

integriert von $AC \sin \vartheta = 0$ bis r . Aber:

$$AD \cdot AB = AG \cdot AE = AC^2 - r^2$$

und:

$$AD - AB = 2BF = 2\sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta},$$

also:

$$\begin{aligned} & \int \cos^2 \vartheta d\vartheta \left(\frac{AD-AB}{AB \cdot AD} \right) \\ &= \frac{2}{AC^2 - r^2} \int \cos^2 \vartheta d\vartheta \sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta}. \end{aligned}$$

Setzen wir $AC \sin \vartheta = ry$, so wird:

$$\cos \vartheta d\vartheta = \frac{r dy}{AC}, \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{\frac{1}{2} r^2 y^2}{AC^2},$$

und:

$$\begin{aligned}
& \int \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta} \\
&= \int \frac{r^2 dy}{AC} \sqrt{1-y^2} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} r^2 y^2}{AC^2}\right) \\
&= \int \frac{r^2 dy}{AC \cdot \sqrt{1-y^2}} \left(1 - y^2 + \frac{\frac{1}{2} r^2 y^2}{AC^2} + \frac{\frac{1}{2} r^2 y^4}{AC^2}\right) \\
&= \frac{r^2}{AC} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \frac{r^2}{AC^2}\right),
\end{aligned}$$

nämlich von $y=0$ bis 1 genommen. Hiernach ergibt sich die gesuchte Anziehung:

$$\begin{aligned}
&= 2ii' ds' \int \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \left(\frac{AD-AB}{AB \cdot AD}\right) \\
&= \frac{4ii' ds'}{AC^2 - r^2} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \frac{r^2}{AC^2}\right) \frac{r^2}{AC} \\
&= ii' ds' \left(\frac{r^2 \pi}{AC^3} + \frac{1}{8} \frac{r^4 \pi}{AC^5}\right) \\
&= \frac{ii ds' C}{AC^3} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{r^2}{AC^2}\right) \dots \dots \dots (1)
\end{aligned}$$

wenn $C=r^2 \pi$ die Fläche des Kreises um C bezeichnet.

Legt man zweitens das Element MN und die Elemente bei D und B längs AB und AD , so ist die Wirkung nach AD zusammen:

$$= -kii' ds' \sin \vartheta \left(\frac{dAB}{AB^2} - \frac{dAD}{AD^2}\right),$$

denn weil AD mit ϑ abnimmt, so ist bei dAD das negative Zeichen erforderlich; folglich ist die Wirkung auf den ganzen Kreis um C parallel zu AC zerfällt:

$$= -2kii' ds' \int \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{AD^2 dAB - AB^2 dAD}{AB^2 \cdot AD^2}\right),$$

integriert wie vorhin. Aber:

$$AB^2 \cdot AD^2 = AC^4 - 2AC^2 r^2,$$

$$AD = AC \cos \vartheta + \sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$AB = AC \cos \vartheta - \sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta},$$

und:

$$AD^2 dAB - AB^2 dAD = \frac{(2AC^2 - 2AC^2 r^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta}}$$

also:

$$\begin{aligned} & -2kii' ds' \int \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{AD^2 dAB - AB^2 dAD}{AB^2 \cdot AD^2} \right) = \\ & -2kii' ds' \left(\frac{1}{AC^4} + \frac{2r^2}{AC^6} \right) \int \frac{(2AC^2 - 2AC^2 r^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{r^2 - AC^2 \sin^2 \vartheta}} \\ & = -2kii' ds' \left(\frac{1}{AC^4} + \frac{2r^2}{AC^6} \right) \left(\frac{1}{2} AC r^2 \pi - \frac{1}{16} \frac{r^3 \pi}{AC} \right) \\ & = -\frac{kii' ds' C}{AC^3} \left(1 + \frac{5}{8} \frac{r^2}{AC^2} \right) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die Wirkung eines Elementes $OP = ds'$, dessen Strom mit i' Intensität von O nach P geht, so stößt es, nach AB gelegt die Elemente B und D ebenfalls nach AB und AD gelegt, ab, zieht aber die Elemente der unteren Kreishälfte GHE an, und bringt auf diese Weise eine Wirkung senkrecht zu AC hervor, mit welcher es den Kreis nach der oberen Kreishälfte zu fortreibt. Für die Elemente bei B und D ist die Wirkung:

$$= kii' ds' \cos \vartheta \left(\frac{dAB}{AB^2} - \frac{dAD}{AD^2} \right) \sin \vartheta,$$

also auf den ganzen Kreis:

$$\begin{aligned} & = 2kii' ds' \int \cos \vartheta \sin \vartheta \left(\frac{dAB}{AB^2} - \frac{dAD}{AD^2} \right) \\ & = \frac{kii' ds' C}{AC^3} \left(1 + \frac{5}{8} \frac{r^2}{AC^2} \right) \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Endlich übt dasselbe Element OP , wenn es senkrecht zu AB gelegt wird, auf den Kreis um C eine der vorigen entsprechende Wirkung aus, indem es die senkrecht zu AD zerfallenen Elemente B und D abstößt und die der unteren Kreishälfte anzieht, eine Wirkung:

$$\begin{aligned}
& \int \cos \eta d\eta \cdot \frac{1}{8} r^2 \frac{CI^4 - CH^4}{CI^4 \cdot CH^4} \\
&= \frac{1}{8} r^2 \int \cos \eta d\eta \frac{8 CB^3 \cos^3 \eta \sqrt{r'^2 - CB^2 \sin^2 \eta}}{CB^8} \\
&= \frac{7 r^2}{CB^5} \int \cos^4 \eta d\eta \sqrt{r'^2 - CB^2 \sin^2 \eta} \\
&= \frac{1}{4} \frac{r^2 r'^2 \pi}{CB^5} = \frac{1}{4} r^2 \frac{C'}{CB^5}.
\end{aligned}$$

Also beides zusammengekommen wird:

$$\begin{aligned}
& 2ii' C \int \cos \eta d\eta \left(\frac{CI^2 - CH^2}{CI^2 \cdot CH^2} + \frac{1}{8} r^2 \frac{CI^4 - CH^4}{CI^4 \cdot CH^4} \right) \\
&= \frac{2ii' CC'}{CB^4} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{r'^2}{CB^2} + \frac{1}{4} \frac{r^2}{CB^2} \right) \quad \dots \quad (I)
\end{aligned}$$

Dieselben Elemente $CHd\eta$ und $CI d\eta$ üben ferner nach (2) eine Anziehung auf den Kreis um C :

$$= -kii' C \left[\frac{CHd\eta}{CH^3} - \frac{CI d\eta}{CI^3} + \frac{1}{8} r^2 \left(\frac{CHd\eta}{CH^5} - \frac{CI d\eta}{CI^5} \right) \right],$$

und so ist die Wirkung des ganzen Kreises um B auf den um C nach CB :

$$\begin{aligned}
&= -2kii' C \int \cos \eta d\eta \left[\frac{CI^2 - CH^2}{CI^2 \cdot CH^2} + \frac{1}{8} r^2 \frac{CI^4 - CH^4}{CI^4 \cdot CH^4} \right] \\
&= -\frac{2kii' CC'}{CB^4} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{r'^2}{CB^2} + \frac{1}{4} \frac{r^2}{CB^2} \right) \dots \dots \dots (II)
\end{aligned}$$

Nach (3) geben die Elemente dCH und dCI dem Kreise um C eine Richtung nach CF , nämlich senkrecht zu CH , und die Elemente der unteren Kreishälfte, z. B. dCK und dCM treiben den Kreis um C senkrecht zu CK nach CE ; hieraus erwächst eine gegenseitige Anziehung der beiden Kreise nach CB :

$$\begin{aligned}
&= 2kii' C \int \left[\frac{dCH}{CH^3} - \frac{dCI}{CI^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{3} r^2 \left(\frac{dCH}{CH^5} - \frac{dCI}{CI^5} \right) \right] \sin \eta \\
&= 2kii' C \int \left[\frac{2CB^3 \cos^4 \eta \sin^2 \eta d\eta}{\sqrt{r'^2 - CB^2 \sin^2 \eta}} \left(\frac{1}{CB^6} + \frac{3r'^2}{CB^8} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{3} r^2 \cdot \frac{2CB^2 \sin^2 \eta \cos \eta d\eta}{CB^3 \sqrt{r'^2 - CB^2 \sin^2 \eta}} \right] \\
&= \frac{2kii' CC'}{CB^4} \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{16} \frac{r'^2}{CB^2} + \frac{5}{16} \frac{r^2}{CB^2} \right) \dots \dots (III)
\end{aligned}$$

Eben diese Elemente geben nach (4) eine ähnliche Bewegung des Kreises um C , und daraus folgt eine Anziehung beider Kreise nach CB :

$$\begin{aligned}
&= \frac{2ii'r^2 C}{CB^5} \int (dCH - dCI) \sin \eta \\
&= \frac{1}{3} \frac{ii'r^2 CC'}{CB^6} = \frac{2ii' CC'}{CB^4} \cdot \frac{1}{3} \frac{r^2}{CB^2} \dots \dots (IV)
\end{aligned}$$

Nehmen wir die gefundenen vier Gleichungen zusammen, so finden wir die Anziehung zweier in derselben Ebene befindlichen Kreise, bei einer Entfernung ihrer Mittelpunkte $= CB = R$, und sofern sie von entgegengesetzten galvanischen Strömen durchflossen werden:

$$= \frac{(2-k)ii' CC'}{R^4} \left[1 + \frac{15}{8} \frac{r'^2}{R^2} + \frac{15}{8} \frac{r^2}{R^2} \right] \dots \dots (A)$$

Auf dieselbe Weise wollen wir die Anziehung ermitteln, welche zwei parallele, senkrecht über einander gelegte Kreise hervorbringen, wenn sie vom Galvanismus in derselben Richtung mit ii' Intensität durchströmt werden. Es sey, Fig. 10 Taf. V, $A = ds$ ein Element des oberen Kreises vom Radius r' , CF der Radius des unteren $= r$, und beide seyen wie oben gegen AB sehr klein. Die Projection von A falle nach B , so daß $CB = r'$, $\angle CBk = \vartheta$, so ist zuerst die Anziehung von ds' auf die Elemente bei H und bei I , als $BHd\vartheta$ und $BI d\vartheta$ genommen, wenn sie parallel zu AB zerlegt wird:

$$= ii' ds' \cos \vartheta \left[\frac{BH d\vartheta}{AH^2} \cdot \frac{AB}{AH} - \frac{BI d\vartheta}{AI^2} \cdot \frac{AB}{AI} \right],$$

also auf den ganzen Kreis:

$$= 2ii' ds' AB \int \cos \vartheta d\vartheta \left(\frac{BH}{AH^3} - \frac{BI}{AI^3} \right),$$

integriert von $\vartheta = 0^\circ$ bis 90° .

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{BH}{AH^3} - \frac{BI}{AI^3} = & -\frac{BI - BH}{AB^3} + \frac{BI^3 - BH^3}{AB^3} \\ & - \frac{1}{8} \frac{BI^3 - BH^3}{AB^3}, \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} BI &= \sqrt{r^2 - r'^2 \sin^2 \vartheta} + r' \cos \vartheta, \\ BH &= \sqrt{r^2 - r'^2 \sin^2 \vartheta} - r' \cos \vartheta, \end{aligned}$$

also ist:

$$\begin{aligned} & 2ii' ds' AB \int \cos \vartheta d\vartheta \left(\frac{BH}{AH^3} - \frac{BI}{AI^3} \right) \\ &= 2ii' ds' \int \left[-\frac{2r' \cos^2 \vartheta d\vartheta}{AB^2} \right. \\ & \quad + \frac{9r^2 r' \cos^2 \vartheta d\vartheta}{AB^4} - \frac{9r'^3 \cos^2 \vartheta d\vartheta}{AB^4} \\ & \quad + \frac{12r'^3 \cos^4 \vartheta d\vartheta}{AB^4} - \frac{1}{8} \left(\frac{10r^4 r' \cos^2 \vartheta d\vartheta}{AB^6} \right. \\ & \quad - \frac{20r^2 r'^3 \cos^2 \vartheta d\vartheta}{AB^6} + \frac{10r'^5 \cos^2 \vartheta d\vartheta}{AB^6} \\ & \quad + \frac{40r^2 r'^3 \cos^4 \vartheta d\vartheta}{AB^6} - \frac{40r'^5 \cos^4 \vartheta d\vartheta}{AB^6} \\ & \quad \left. + \frac{32r'^5 \cos^6 \vartheta d\vartheta}{AB^6} \right) \Big] = \frac{ii' ds'}{AB^2} \left[-r' \pi \right. \\ & \quad \left. + \frac{r^2 r' \pi}{AB^2} - \frac{r^4 r' \pi}{AB^4} - \frac{r^2 r'^3 \pi}{AB^4} \right] \dots (1) \end{aligned}$$

Die Anziehung von ds auf die Elemente bei H und bei I , als dBH und dBI genommen, und wenn sämtliche Elemente senkrecht auf die Verbindungslinie gebracht werden, ist parallel zu AB :

$$= ii' ds' \sin \vartheta \frac{AB}{AH} \cdot \frac{d BH}{AH^2} \cdot \frac{AB^2}{AH^2} \\ - ii' ds' \sin \vartheta \frac{AB}{AI} \cdot \frac{d BI}{AI^2} \cdot \frac{AB^2}{AI^2},$$

also auf den ganzen Kreis um C :

$$= 2ii' ds' \int \sin \vartheta \left[\frac{d \cdot BH \cdot AB^3}{AH^5} - \frac{d BI \cdot AB^3}{AI^5} \right],$$

integriert wie vorhin:

$$= 2ii' ds' \int \sin \vartheta \left[d BH \left(\frac{1}{AB^2} - \frac{5}{2} \frac{BH^2}{AB^4} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{35}{8} \frac{BH^4}{AB^6} \right) - d BI \left(\frac{1}{AB^2} - \frac{5}{2} \frac{BI^2}{AB^4} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{35}{8} \frac{BI^4}{AB^6} \right) \right] = \frac{ii' ds'}{AB^2} \left[r' \pi - \frac{5}{2} \frac{r^2 r' \pi}{AB^2} \right. \\ \left. + \frac{35}{8} \frac{r^2 r'^3 \pi}{AB^4} + \frac{35}{8} \frac{r^4 r' \pi}{AB^4} \right] \dots \dots \dots (2)$$

Endlich geben dieselben Elemente, längs AH und AI zerlegt, eine Anziehung nach AB :

$$= -kii' ds' \sin \vartheta \left(\frac{BH^2 d BH}{AH^5} - \frac{BI^2 d BI}{AI^5} \right) AB,$$

und auf den ganzen Kreis um C :

$$= -2kii' ds' \int \sin \vartheta AB \left(\frac{BH^2 d BH}{AH^5} \right. \\ \left. - \frac{BI^2 d BI}{AI^5} \right) = -\frac{kii' ds'}{AB^2} \left[\frac{r^2 r' \pi}{AB^2} \right. \\ \left. - \frac{5}{2} \frac{r^2 r'^3 \pi}{AB^4} - \frac{5}{2} \frac{r^4 r' \pi}{AB^4} \right] \dots \dots \dots (3)$$

Integriert man ds' auf den ganzen Kreis, dessen Radius $=r'$ und dessen Flächeninhalt $=r'^2 \pi = C'$ so wie $r^2 \pi = C$ ist, so geht in den Formeln (1), (2) und (3) ds' in $2r' \pi$ über, und die Gesamtanziehung auf einander ist:

$$= \frac{2ii' C C'}{AB^4} \left[2 - k - 5 \frac{r'^2}{AB^2} - 5 \frac{r^2}{AB^2} + \frac{5k}{2} \frac{r'^2}{AB^2} \right. \\ \left. + \frac{5k}{2} \frac{r^2}{AB^2} \right],$$

oder wenn $AB=R$:

$$= \frac{(2-k)ii'CC'}{R^4} \left[2 - \frac{5r'^2}{R^2} - \frac{5r^2}{R^2} \right] \dots (B)$$

Ich habe in den beiden Hauptformeln (A) und (B) die Glieder mit $\frac{r^2}{R^2}$ und $\frac{r'^2}{R^2}$ entwickelt, um des gleichmäßigen Fortschreitens gewiß zu seyn; bei der Anwendung auf Magnete können sie füglich übergangen werden. Da in beiden Formeln $(2-k)$ als Factor erscheint, so ist der Werth von k gleichgültig, und so werde ich der Kürze halber $(2-k)ii'=I$ setzen, so daß wir für Kreise in derselben Ebene bei entgegengesetzten Strömen eine Anziehung $= \frac{ICC'}{R^4} \dots (A')$, und für parallele und senkrecht über einander liegende Kreise bei gleichlaufenden Strömen und von derselben Intensität wie die vorigen eine Anziehung $= \frac{2ICC'}{R^4} \dots (B')$ haben.

Jeden Magnetstab betrachten wir als eine Reihe galvanischer Kreise, welche senkrecht zur Axe stehen, und in welchen, wenn der Nordpol vom Beobachter abliegt, der galvanische Strom auf der vorliegenden Seite des Stabes von der Linken zur Rechten geht. Es seyen nun, Fig. 11 Taf. V $N'S'$ und NS zwei Magnetstäbe, welche in einer geraden Linie mit dem Nordpole $N'N$ nach derselben Seite zu liegen. Die galvanischen Kreise seyen im ersten $=C'$, im zweiten $=C$, die Längen $N'S'=L'$ und $NS=L$, so ist ihre Wirkung auf einander:

$$= \iint \frac{2ICC'dL'dL}{AB^4}, \text{ integrirt bis auf die Endpunkte der Stäbe } N', S', N \text{ und } S. \text{ Nun ist } dL'=dAB, \text{ also:}$$

$$\iint \frac{2ICC'dL'dL}{AB^4} = \iint \frac{2ICC'dLdAB}{AB^4}$$

$$= \int \frac{2}{3} \frac{ICC'dL}{BS'^3} - \int \frac{2}{3} \frac{ICC'dL}{BN'^3},$$

und da $dL=dBS'=dBN'$ ist:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2}{3} \frac{I C C' d B S'}{B S'^3} - \int \frac{2}{3} \frac{I C C' d B N'}{B N'^3} = \frac{1}{3} \frac{I C C'}{S' N^2} \\
&- \frac{1}{3} \frac{I C C'}{S' S^2} - \frac{1}{3} \frac{I C C'}{N' N^2} + \frac{1}{3} \frac{I C C'}{N' S^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (a)
\end{aligned}$$

In Fig. 12 liegen dieselben Magnetstäbe in einer Ebene senkrecht gegen einander, und zwar so, daß NS verlängert nach N' trifft. Ihre Wirkung auf einander nach NS zerlegt, ist:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \iint \frac{2 I C' \frac{A N'}{B A} d L' \cdot C \frac{B N'}{B A} d L}{B A^4} \right. \\
&\quad \left. + \iint \frac{I C' \frac{B N'}{B A} d L \cdot C \frac{A N'}{B A} d L}{B A^4} \right\} \frac{B N'}{B A} \\
&= \iint \frac{3 I C C' d L d L' A N' \cdot B N'^2}{B A^6},
\end{aligned}$$

oder da $d L' = \frac{B A \cdot d B A}{A N'}$ ist:

$$\begin{aligned}
&= \iint \frac{3 I C C' d L B N'^2 d B A}{B A^6} = \int \frac{3}{3} \frac{I C C' d L B N'^2}{B N'^3} \\
&- \int \frac{3}{3} \frac{I C C' d L B N'^2}{B S'^3} = \int \frac{3}{3} \frac{I C C' d L}{B N'^3} \\
&- \int \frac{3}{3} \frac{I C C' d L B N'^2}{B S'^3}.
\end{aligned}$$

Aber: $d L = d B N' = \frac{B S' d B S'}{B N'}$, und nehmen wir dazu

$\frac{B N'}{B S'} = \text{const} = \cos n' = \cos n''$, wie es bei größeren Entfernungen der Fall ist, so haben wir:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{3} \frac{I C C' dL}{B N'^3} - \int \frac{1}{3} \frac{I C C' dL B N'^2}{B S'^3} \\
&= \int \frac{1}{3} \frac{I C C' d B N'}{B N'^3} - \int \frac{1}{3} \frac{I C C' \cos n' d B S'}{B S'^3} \\
&= \frac{1}{10} \frac{I C C'}{N' S^2} - \frac{1}{10} \frac{I C C'}{N' N^2} - \frac{1}{10} \frac{I C C' \cos n'}{S' S^2} \\
&+ \frac{1}{10} \frac{I C C' \cos n''}{S' N^2} \quad \left. \vphantom{\int \frac{1}{3} \frac{I C C' dL}{B N'^3}} \right\} \quad (b)
\end{aligned}$$

Ist $\frac{B N'}{B S'}$ nicht $= \text{const.}$, so wird:

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{1}{3} \frac{I C C' dL B N'^2}{B S'^3} = - \int \frac{1}{3} \frac{I C C' d B S' \sqrt{B S'^2 - N' S'^2}}{B S'^4} \\
&= - \frac{1}{3} \frac{I C C' \cos n'}{S' S^2} + \frac{1}{3} \frac{I C C' \cos n''}{S' N^2} + \frac{1}{3} \frac{I C C' \cos n'}{N' S'^2} \\
&- \frac{1}{3} \frac{I C C' \cos n''}{N' S'^2}.
\end{aligned}$$

Endlich liegen, Fig. 13 Taf. V, die beiden Magnetstäbe parallel neben einander. Ihre Wirkung auf einander nach BD zerlegt, ist:

$$\begin{aligned}
& \iint \frac{-2 I C \frac{A C}{B A} dL \cdot C' \frac{A C}{B A} dL'}{B A^4} \cdot \frac{A C}{B A} \\
&+ \iint \frac{I C \frac{B C}{B A} dL \cdot C' \frac{B C}{B A} dL'}{B A^4} \cdot \frac{A C}{B A}.
\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
& \iint \frac{2 I C C' dL dL' A C^3}{B A^7} = \iint \frac{2 I C C' dL d B A \cdot A C^2}{B A^6} \\
&= \iint \frac{2 I C C' dL d B A (B A^2 - B C^2)}{B A^6} \\
&= \int \frac{2}{3} \frac{I C C' dL}{B N'^3} - \int \frac{2}{3} \frac{I C C' dL}{B S'^3} - \int \frac{2}{3} \frac{I C C' dL B C^2}{B N'^3} \\
&+ \int \frac{2}{3} \frac{I C C' dL B C^2}{B S'^3},
\end{aligned}$$

und:

$$\iint \frac{ICC' dL dL' \cdot BC^2 \cdot AC}{BA^7} = \iint \frac{ICC' dL \cdot BC^2 \cdot dBA}{BA^6}$$

$$= - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL BC^2}{BN'^5} + \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL BC^2}{BS'^5}.$$

Also zusammen:

$$\begin{aligned} & - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL BC^2}{BN'^5} + \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL BC^2}{BS'^5} \\ & + \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dL}{BN'^3} - \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dL}{BS'^3} \\ & = - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' BC^2 dBN'}{BN' \cdot BD} + \int \frac{1}{3} \frac{ICC' BC^2 dBS'}{BS' \cdot BE} \\ & + \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dBN'}{BN'^2 \cdot Bd} - \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dBS'}{BS'^2 \cdot BE} \\ & = + \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos n'}{SN'^2} - \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos n''}{N' N^2} \\ & - \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos n'}{BC^2} + \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos n''}{BC^2} \\ & - \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos s''}{S' N^2} + \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos s'}{S' S^2} \\ & + \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos s''}{BC^2} - \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos s'}{BC^2} \\ & = \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos n'}{SN'^2} - \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos n''}{N' N^2} \\ & - \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos s''}{S' N^2} + \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos s'}{S' S^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL BC^2}{BN'^5} + \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL BC^2}{BS'^5} \\ & + \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dL}{BN'^3} - \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dL}{BS'^3} \\ & = - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' BC^2 dBN'}{BN' \cdot BD} + \int \frac{1}{3} \frac{ICC' BC^2 dBS'}{BS' \cdot BE} \\ & + \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dBN'}{BN'^2 \cdot Bd} - \int \frac{2}{3} \frac{ICC' dBS'}{BS'^2 \cdot BE} \\ & = + \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos n'}{SN'^2} - \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos n''}{N' N^2} \\ & - \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos n'}{BC^2} + \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos n''}{BC^2} \\ & - \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos s''}{S' N^2} + \frac{1}{3} \frac{ICC' \cos s'}{S' S^2} \\ & + \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos s''}{BC^2} - \frac{4}{15} \frac{ICC' \cos s'}{BC^2} \end{aligned}} \right\} \quad (c)$$

so fern die Entfernung der beiden Magnete von einander beträchtlich genug ist, um $\cos n' = \cos n''$ und $\cos s' = \cos s''$ zu setzen.

Die drei Formeln (a), (b) und (c) entsprechen in ihrer Form den bekannten Gesetzen der magnetischen Wirkungen, aber ihre Coëfficienten sind $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{15}$, und $\frac{1}{3}$, also ungleich, statt daß sie übereinstimmen sollten. Setzt man in (A) den Coëfficient $= a'$ und in (B) $= b'$, so werden die Coëfficienten in den Gleichungen (a), (b), (c)

$= \frac{b'}{6}$, $\frac{a'+b'}{10}$ und $\frac{a'+b'}{15}$, bleiben also, was man auch für Werthe von a' und b' annehmen wollte, das heißt, welche gegenseitige Wirkungen man auch den galvanischen Elementen beilegen wollte, jedesmal ungleich.

Noch bedenklicher wird das Resultat, wenn wir auf die Schwingungszeiten einer und derselben Nadel bei verschiedenen Entfernungen von einem anderen Magnete achten. Als den einfachsten Fall nehme ich in Fig. 11 Taf. V $NS=L$ als die um ihren Mittelpunkt C bewegliche Nadel. Nun verhalten sich die Quadrate der Schwingungszeiten, zunächst für unendlich kleine Schwingungsbogen, bei verschiedenen Entfernungen umgekehrt wie die statischen Momente; für die gegebene Lage haben wir aber das statische Moment:

$$\begin{aligned}
 &= \iint \frac{2ICC' dL dL'}{BA^4} \times CB = \iint \frac{2ICC' dL dBA}{BA^4} \times CB \\
 &= \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL}{BS'^3} \times CB - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dL}{BN'^3} \times CB \\
 &= \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dBS'}{BS'^3} (S'C - BS') \\
 &\quad - \int \frac{1}{3} \frac{ICC' dB N'}{BN'^3} (N'C - BN') \\
 &= \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'N^2} \cdot S'C - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'S^2} \cdot S'C - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'N} + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'S} \\
 &\quad - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'N^2} \cdot N'C + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'S^2} \cdot N'C + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'N} - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'S} \\
 &= \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'N^2} \cdot \frac{1}{2} L + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'S^2} \cdot \frac{1}{2} L - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'N} + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'S} \\
 &\quad - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'N^2} \cdot \frac{1}{2} L - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'S^2} \cdot \frac{1}{2} L + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'N} - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{N'S}.
 \end{aligned}$$

Ist $S'N$ gegen L sehr groß oder sind die Magnete weit von einander entfernt, so wird unsere Formel:

$$= \frac{1}{3} \frac{ICC'}{(S'C - \frac{1}{2}L)^2} \cdot \frac{1}{2}L + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{(S'C + \frac{1}{2}L)^2} \cdot \frac{1}{2}L \\ - \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'C - \frac{1}{2}L} + \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'C + \frac{1}{2}L},$$

und ähnlich für den Pol N' , $= \frac{1}{3} \frac{ICC'}{S'C^3} L^3$. Demgemäfs

sind die Quadrate der Schwingungszeiten bei gröfseren Entfernungen den Biquadraten der Entfernungen proportional, statt den Quadraten. Diefs Resultat war in so weit vor auszusehen, als bei gröfseren Entfernungen sämtliche galvanischen Kreise des beweglichen Magneten ziemlich mit gleicher Kraft nach derselben Seite gezogen werden, und demnach eine Schwingung unmöglich ist.

Am auffallendsten ist das Resultat, wenn wie in Fig. 14 Taf. V ein Magnet NS quer vor einem anderen $N'S'$ liegt, und man auf die Drehung des ersteren um seinen Mittelpunkt C achtet. Nach unseren Formeln ist das Drehungsmoment, positiv genommen nach der Richtung von N nach N' zu, von der Hälfte CN :

$$= \iint \frac{2IC \frac{CB}{AB} dL \cdot C' \frac{AC}{AB} dL}{AB^4} \cdot \frac{AC}{AB} \times BC \\ + \iint \frac{IC \frac{AC}{AB} dL \cdot C' \frac{CB}{AB} dL}{AB^4} \cdot \frac{AC}{AB} \times BC \\ = \iint \frac{3ICC' dL AC^2 dAC}{AB^7} \times BC^2 \\ = \iint 3ICC' dL AC^2 dAC \left[\frac{1}{AC^7} - \frac{7}{2} \frac{BC^2}{AC^9} \right. \\ \left. + \frac{7 \cdot 9}{2^2 \cdot 2} \frac{BC^4}{AC^{11}} - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} \frac{BC^6}{AC^{13}} \dots \right] BC^2$$

in sofern wir der Leichtigkeit wegen BC stets sehr klein nehmen wollen.

$$= \int 3 I C C' dL \left[\frac{1}{\frac{1}{4} C N'^4} - \frac{7}{2.6} \frac{C B^2}{C N'^6} + \frac{7.9}{2^2.2.8} \frac{C B^4}{C N'^8} - \frac{7.9.11}{2^3.2.3.10} \frac{C B^6}{C N'^{10}} \right] B C^2,$$

wobei nur auf den einen Pol N' Rücksicht genommen ist:

$$\begin{aligned} &= \int 3 I C C' d B C \left[\frac{1}{\frac{1}{4} C N'^4} - \frac{7}{2.6} \frac{C B^2}{C N'^6} + \dots \right] B C^2 \\ &= 3 I C C' \left[\frac{1}{3.4} \frac{C N^3}{C N'^4} - \frac{7}{2.5.6} \frac{C N^5}{C N'^6} \right. \\ &\quad + \frac{9}{2^2.2.8} \frac{C N^7}{C N'^8} - \frac{7.11}{2^3.2.3.10} \frac{C N^9}{C N'^{10}} \\ &\quad \left. + \frac{7.9.13}{2^4.2.3.4.12} \frac{C N^{11}}{C N'^{12}} - D C \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir für einen speciellen Fall $CN = CN'$, so ist jeder positive Werth gröfser, als der ihm vorhergehende negative, und das ganze Resultat ist positiv, nämlich:

$> \frac{1}{4} \frac{I C C'}{C N'}$. Die andere Seite des Magneten SN von C nach S wird von einer gleichen Kraft rückwärts vom Magneten $N'S'$ gestofsen, und so haben wir einen Fall, wo die Nordpole zweier Magnete sich anziehen ¹⁾.

- 1) Nicht zu übersehen ist, dafs die obigen Resultate nur mit Zugrundlegung von Hrn. Ampère's älterer, von diesem selbst schon als ungenügend erkannter Hypothese, aufgefunden worden sind, und dafs sie demnach über die Frage, ob die spätere Vorstellung dieses Physikers, nach welcher jedes Theilchen des Magneten der Mittelpunkt eines auf der Magnetaxe senkrechten galvanischen Kreises ist, den Erscheinungen vollkommen entspreche, keinen Aufschluss geben. Die Zulässigkeit dieser späteren Hypothese ist oft bezweifelt, aber niemals gründlich geprüft, und selbst Hr. Ampère hat in einem neueren Aufsatze (*Ann. de chim. et de phys.* T. XXXVII p. 113) das Problem der Wirkung zwischen einem Magneten und dem Schließdraht einer voltaschen Säule nicht eigentlich im Sinne seiner Hypothese gelöst, ohne Zweifel der damit verknüpften Schwierigkeiten wegen. Es wäre daher immer noch ein Verdienst, die Hauptfolgerungen aus dieser neueren Hypothese streng zu entwickeln, denn nur erst dann ist man im Stande ein begründetes Urtheil über ihren Werth zu fällen.