11. *Eine Bemerkung*
zu der Arbeit von Hrn. F. A. Schulze:
„Einige neue Methoden zur Bestimmung der
Schwingungszahlen höchster hörbarer
und unhörbarer Töne usw.“¹⁾;
von P. Debye.

In der kürzlich erschienenen, oben zitierten Arbeit, teilt Hr. F. A. Schulze u. a. einige Beobachtungen mit über eigenartige Klangfiguren bei eingeklemmten kreisrunden Papierscheibchen und verweist auf die ganz analogen von A. Elsas.²⁾ Er spricht die Meinung aus, daß die Berechnung dieser Figuren große Schwierigkeiten bieten würde. Wir möchten nun im folgenden kurz zeigen, wie die Berechnung der *erzwungenen* Schwingungen einer solchen Platte dazu führt, die betreffenden Figuren durch Übereinanderlagerung *freier* Schwingungen entstanden zu denken. In dieser Weise erhält man qualitativ die beobachteten Knotenkurven; eine quantitative Erklärung würde erst möglich sein, wenn über die Art der Anregung ganz bestimmte Angaben vorliegen.

Die Differentialgleichung für die zur Ebene der Platte senkrechte Entfernung von der Gleichgewichtslage lautet³⁾ in den Bezeichnungen von Hrn. Schulze bei Anwesenheit äußerer Normalkräfte $N = N_0 e^{iqt}$:

$$(1) \quad \Delta \Delta w + 12 \frac{q(1-\mu^2)}{E D^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 12 \frac{1-\mu^2}{E D^3} N_0 e^{iqt}.$$

Für die Berechnung der Eigenschwingungen ist $N_0 = 0$ zu setzen. Die in doppelt unendlicher Anzahl vorhandenen

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **24**, p. 785. 1907.

2) A. Elsas, Wied. Ann. **19**, p. 474. 1883.

3) Vgl. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, Deutsch von Timpe, p. 560 u. 564.

Lösungen¹⁾ sind im vorliegenden Fall dargestellt durch die Formel:²⁾

$$(2) \quad w = W_{n\nu} e^{ip_{n\nu}t} = \left\{ J_n(i\kappa) J_n\left(\kappa \frac{r}{R}\right) - J_n(\kappa) J_n\left(i\kappa \frac{r}{R}\right) \right\} \cos n\vartheta e^{ip_{n\nu}t},$$

wobei $\kappa = \kappa_{n\nu}$ irgend eine Wurzel der Gleichung (n ganzzahlig):

$$(3) \quad i J_n(\kappa) J_n'(i\kappa) - J_n'(\kappa) J_n(i\kappa) = 0.$$

Die Größen $\kappa_{n\nu}$ und $p_{n\nu}$ hängen zusammen mittels der Formel:

$$(4) \quad p_{n\nu} = \kappa_{n\nu}^2 \frac{D}{R^2} \sqrt{\frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{E}{\varrho}}.$$

Es liegt nun nahe für den Fall, daß N_0 von Null verschieden ist, die Lösung der Gleichung (1) als eine nach den „Eigenfunktionen“ $W_{n\nu}$ fortschreitende Reihe anzusetzen. Entwickelt man in dieser Absicht zunächst die Funktion N_0 in der Form:

$$(5) \quad N_0 = \sum c_{n\nu} W_{n\nu},$$

wobei die Summation über alle Werte von n und ν zu erstrecken ist, so erhält man für die Koeffizienten $c_{n\nu}$ auf Grund der für die Eigenfunktionen geltenden Orthogonalitätsbedingung³⁾:

$$(6) \quad c_{n\nu} = \frac{\int N_0 W_{n\nu} d\sigma}{\int W_{n\nu}^2 d\sigma},$$

wobei die Integration über die ganze Platte zu erstrecken ist. Das Integral im Nenner kann nach dem Greenschen Satz durch einen Grenzübergang ohne weiteres ausgeführt werden und liefert

1) F. A. Schulze, l. c. Die dortige Gleichung (1) soll offenbar lauten:

$$w_n = P \cos n\vartheta \left\{ J_n\left(\kappa \frac{r}{R}\right) + \lambda J_n\left(i\kappa \frac{r}{R}\right) \right\} \cos(pt - \varepsilon).$$

Das Resultat findet sich bei Lord Rayleigh, Theory of Sound, London 1. p. 366. 1894, wo aber nur die zwei ersten Wurzeln von (3) für den Fall $n = 0$ angegeben werden.

2) Statt $\cos n\vartheta$ kann natürlich in (2) auch $\sin n\vartheta$ gesetzt werden. Der Übersichtlichkeit halber wurde dieses im folgenden fortgelassen, obwohl bei ganz beliebiger Wahl von N_0 auch die Lösungen mit $\sin n\vartheta$ in Betracht zu ziehen wären.

3) Vgl. Lord Rayleigh, l. c. 1. p. 358.

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int W_{n\nu}^2 d\sigma &= \frac{\pi R^2}{4} \frac{R^3}{z^3} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} P \right) \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} P \right) \right], \\ &\quad r=R \end{aligned} \right.$$

unter P die geschweifte Klammer in (2) verstanden.

Setzt man nun auch für w eine Reihe nach Eigenfunktionen, aber mit unbestimmten Koeffizienten, so erhält man aus (1) als vollständige Lösung des Problems für den Fall, daß äußere Kräfte $N_0 e^{iqt}$ die Bewegung erzwingen:

$$(8) \quad w = 12(1 - \mu^2) \frac{R^4}{E L^3} e^{iqt} \sum \frac{c_{n\nu}}{z_{n\nu}^4 \left(1 - \frac{q^2}{p_{n\nu}^2} \right)} W_{n\nu}.$$

Abgesehen von ganz speziellen Fällen der Anregung ersieht man aus (8), daß die Bewegung der Platte sich immer zusammensetzt aus allen möglichen Eigenschwingungen. Kommt die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft in die Nähe einer Eigenschwingungszahl ($q \cong p_{n\nu}$), so überwiegt in bekannter Weise das betreffende Glied der Reihe und würde nach (8), wenn die Schwingungszahlen genau übereinstimmen, sogar unendlich groß werden. In letzterer Aussage steckt aber eine unberechtigte Extrapolation, da für große Ausbiegungen Gleichung (1) nur annähernde Gültigkeit beansprucht.

Im allgemeinen wird man eine gute Annäherung für w erhalten, indem man nur einige Glieder der Reihe (8) berücksichtigt. In der Tat wollen wir zeigen, daß sich sämtliche von Hrn. Schulze erhaltenen Figuren (p. 795) durch Über-

einanderlagerung nur zweier Eigenschwingungen erhalten lassen. Zu diesem Zweck wurde in Fig. 1 zunächst die theoretische Form der ausgebogenen Platte gezeichnet längs des Halbstrahles $\vartheta = 0$ für den Fall, daß diese nur eine Eigenschwingung ausführt und zwar stellt Kurve I W_{00} (0 Knotendurchmesser, 0 Knotenkreise), Kurve II W_{20} (2 Knotendurchmesser, 0 Knotenkreise) und Kurve III W_{01} (0 Knotendurchmesser, 1 Knotenkreis)

Fig. 1.

dar.¹⁾ Von der unsymmetrischen Eigenschwingung W_{10} wurde abgesehen, obwohl die zugehörige Schwingungszahl in den untersuchten Bereich fällt, sie scheint sich in dem Fall von Hrn. Schulze nicht bemerkbar zu machen. Gehen wir nun aus von einer Schwingungszahl, die nahezu der zu W_{01} gehörigen gleich

Fig. 2.

ist, so wird nach (8) das entsprechende Glied der Reihe stark überwiegen, die Knotenkurve ist also, wie Kurve III Fig. 1 zeigt, nahezu ein Kreis (Fig. 2, Nr. 1'). Nimmt jetzt die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft allmählich ab, so wird der zu W_{10}

1) Die an sich willkürlichen Maximalamplituden sind durch Multiplikation mit geeigneten Konstanten auf den gleichen Wert gebracht.

gehörige Nenner der Reihe (8) fortwährend größer werden, die anderen Glieder der Reihe bekommen also Gelegenheit einen Einfluß auszuüben; insbesondere wird sich das Glied W_{20} (Kurve II, Fig. 1) bemerkbar machen, das wir deshalb allein berücksichtigen wollen. So entstand Fig. 2 Nr. 2', indem wir zu W_{01} noch die Eigenschwingung W_{20} mit einer fünfmal kleineren Maximalamplitude hinzufügten, Fig. 2, Nr. 3' entspricht dem Fall, daß die beiden Maximalamplituden gleich groß sind. Inzwischen ist die Schwingungszahl der erregenden Kraft in die Nähe der zu W_{20} gehörigen Eigenschwingungszahl gekommen; infolgedessen geht $(q/p_{20})^2$ bei weiterem Sinken dieser Frequenz von einem Werte > 1 zu einem Werte < 1 über, so daß der zu W_{20} gehörige Faktor der Reihe (8) sein Zeichen wechselt. Diesem Umstande entspricht das scheinbare Umklappen der Knotenfigur (Fig. 2, Nr. 4'). Sinkt nun q noch weiter, so tritt die Grundschwingung W_{00} (Kurve I, Fig. 1) allmählich in den Vordergrund und erzeugt schließlich eine Schwingung ohne Knotenkurven (Fig. 2, Nr. 5'). Neben diesen theoretischen Figg. 1' 5' wurden in Fig. 2 die experimentell gefundenen nochmals abgedruckt, die, wie man sieht, in allen Stücken mit ersteren übereinstimmen. Daß sich der stetige Übergang der Klangfiguren ineinander nur bei Papier zeigte, hat offenbar seinen Grund in dem sehr kleinen Elastizitätsmodul. Formel (8) zeigt ja, daß, wenn man die zu einem bestimmten Gliede gehörigen Amplituden für zwei Plättchen aus verschiedenen Substanzen 1 und 2 mit gleichen Dimensionen bei gleichen anregenden Kräften vergleicht, diese sich verhalten wie

$$\frac{1 - \mu_1^2}{1 - \mu_2^2} \frac{E_2}{E_1},$$

wenn der Quotient q/p in beiden Fällen derselbe ist. Für Papier und Glas wird dieses Verhältnis ungefähr 30.

Wenn die Plättchen sehr dünn sind, müssen sich nach (8), wegen des Faktors D^3 im Nenner, ähnliche Erscheinungen zeigen, wie bei Papier. Die Beobachtungen bei Glimmerplättchen, wo auch Abweichungen von den regelmäßigen Klangfiguren auftraten, könnten wohl in dieser Weise erklärt werden.

München, Math.-phys. Sammlung, 20. Januar 1908.

(Eingegangen 23. Januar 1908.)