Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege.

Von

C. RODENBERG in Hannover.

In vorliegender Note soll gezeigt werden, wie man die verschiedenen Polarflächen einer gegebenen Grundfläche, welche in einem beliebig ausgedehnten Raume enthalten gedacht wird, constructiv festlegen kann.

Das abzuleitende Verfahren basirt auf folgendem bekannten Satze: Wenn zwei Flächen sich in einem Punkte berühren, so ist dieser ein Doppelpunkt der Schnittcurve, und umgekehrt, jeder Doppelpunkt der Schnittcurve ist auch ein Berührungspunkt der beiden Oberflächen.

§ 1 enthält die Definition der Polaren eines Punktes in Bezug auf eine gegebene ebene Curve mit Hilfe zweier Projectionskegel aus zwei Punkten des Raumes; und daran anschliessend die Entwicklung einiger, für das Spätere nothwendigen, Sätze. Im § 2 wird die obige Definition für eine Fläche im Raume von p Dimensionen verallgemeinert und gezeigt, dass der Schnitt der Polare mit einem, den Pol enthaltenden ebenen Raume von weniger Dimensionen, auch Polare des ebenen Schnittes der Grundfläche ist. Dadurch wird dann — was nicht direct aus dem benutzten Verfahren ersichtlich ist — klar, dass es auch zu jeder Punktgruppe und einem Pole im Raume von *einer* Dimension, der Geraden, andere Punktgruppen als Polaren giebt, welche *vollkommen bestimmt* sind. Im § 3 wird erörtert, dass in hinreichend ausgedehnten Räumen jede Polare durch eine gewisse Curve bez. Punktgruppe, die sie mit der Grundfläche gemein hat, vollkommen defnirt ist, was beispielsweise für die ebene Curve nur bei der ersten Polare der Fall ist. Für diese Punkte der Polare wird dann die Reciprocität der Polarverwandtschaft sofort ersichtlich; dass aber dieselbe für einen willkürlichen Punkt dieser Fläche besteht, wird zunächst (§ 4) für die erste und letzte Polare und dann schliesslich auch für die r^{te} und $(n - r)^{\text{te}}$ Polare nachgewiesen.

§ 1.

Definition der Polaren algebraischer Curven durch gewisse
Projectionskegel,

Sei in einer Ebene ε eine Curve n^{ter} O., C^n , als Grundcurve gegeben, sei ferner P der Pol einer zu suchenden Polare. Man ziehe durch P eine Raumgerade g und lege durch zwei ihrer Punkte die Projectionskegel an C^n , deren Durchdringungscurve $n \cdot n^{\text{ter}}$ O. in die C^n und einen Rest $n(n-1)^{\text{ter}}$ O. zerfällt. Letztere schneidet die Ebene ε in $n(n-1)$ Punkten, welche auch auf C^n liegen, da ausser C^n die Kegel keinen Punkt mit ε gemein haben. Daher ist jeder dieser $n(n-1)$ Punkte als ein Doppelpunkt der Gesamtdurchdringungscurve aufzufassen und die Kegelflächen berühren sich folglich in diesen Punkten. Nun gehören aber alle gemeinschaftlichen Tangentenebenen zweier Kegel dem Ebenenbüschel der Verbindungslinie ihrer Spitzen an und daraus schliessen wir, dass durch diese Gerade auch $n(n-1)$ Tangentenebenen an die C^n gehen, und weiter, dass eben so viele Tangenten von der Spur P jener Geraden mit ε an C^n möglich sind. Nach den bekannten Methoden der darstellenden Geometrie kann nun (mittels Hilfsebenen des obigen Büschels) die Raumcurve leicht construirt werden und zwar ist nur eine Projection nothwendig, so dass die Zeichnung in einer Ebene am natürlichsten in ε selbst ausführbar ist. *)

Durch die Curve $C^{n \cdot n} = (C^n + C^{n(n-1)})$ geht ein Büschel von Flächen n^{ter} O. Eine Fläche dieses Büschels besteht aus ε und einer Restfläche $(n-1)^{\text{ter}}$ O., welche ε in einer Curve ${}^1P^{(n-1)}$ schneidet, die ebenfalls die $n(n-1)$ Berührungspunkte enthält und auch durch diese Punkte bestimmt ist, da zwei Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ O. sich nur in $(n-1)^2$ Punkten durchschneiden. Folglich:

1. . . . Die $n(n-1)$ Berührungspunkte der von einem Punkte P an eine C^n zu legenden Tangenten liegen auf einer Curve ${}^1P^{n-1}$, der ersten Polare des Pols P . Diese Curve wird von unendlich vielen F^{n-1} ausgeschnitten, von denen jede durch die Schnittkurve solcher zwei Projectionskegel bestimmt ist, deren Spitzen auf einer durch den Pol gehenden Geraden liegen.

*) Hat die C^n „ d “ Doppelpunkte „ r “ Rückkehrpunkte, so besitzt die $C^{n(n-1)}$ an nämlicher Stelle ebenfalls solche Singularitäten und zwar fallen die Rückkehrtangenten beider Curven für den nämlichen Punkt zusammen, so dass ein Doppelpunkt 2, ein Rückkehrpunkt 3 Schnittpunkte absorbiert. Darans entspringt die erste Plücker'sche Formel für die Classe

$$k = n(n-1) - 2d - 3r.$$

Betrachtet man nun ${}^1P^{n-1}$ als Grundcurve, so gewinnt man durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens die ganze Polarenreihe

$${}^2P^{(n-2)}, {}^3P^{(n-3)} \dots {}^{n-1}P^1.$$

Rückt der Pol P auf die Grundcurve, so haben die Projectionskegel eine gemeinschaftliche Tangentenebene τ , deren Spur die C^n in P berührt. Von der $C^{n(n-1)}$ sondert sich die nach P gehende Erzeugende als beiden Kegeln angehörig doppelt zählend ab, und die Flächen des Büschels durch C^n, n haben daher längs der ganzen Ausdehnung jener Geraden τ als feste Tangentenebene, insbesondere gilt dies für die Restfläche $n(n-1)^{\text{ter}}$ O., welche ${}^1P^{n-1}$ verzeichnet, d. h. auch ${}^1P^{n-1}$ berührt die C^n in P und ebenso thun es die übrigen Polaren:

2. . . . *Die sämtlichen Polaren eines Punktes der Grundcurve gehen durch ihn und berühren in ihm die Grundcurve.*

Eine Tangente t berühre in einem Curvenpunkte p -punktig. Dann berührt die Polare eines beliebigen Punktes auf t dort noch $(p-1)$ -punktig, denn für so viele gewöhnliche Berührungspunkte zählt derselbe. Die zweite Polare berührt noch $(p-2)$ -punktig und so fort, — die $(p-1)^{\text{te}}$ Polare geht noch einfach durch jenen Punkt. Rückt nun der Pol in den Berührungspunkt, so ist dasselbe noch mit einem weitem Punkt der ersten Polare der Fall und für diese Curve ist also t ebenfalls p -punktige Tangente*), folglich ist sie es auch für die folgenden Polaren, d. h.:

3. . . . *Hat eine C^n eine p -punktig berührende Tangente, so gehen alle Polaren, von der ersten bis zur $(p-1)^{\text{ten}}$, eines Punktes dieser Tangente durch den Berührungspunkt und haben daselbst noch bez. $(p-1)$, $(p-2)$, . . . 2, 1 Punkte mit der Curve gemein. Insbesondere ist für die sämtlichen Polaren des Berührungspunktes selbst, die Tangente p -punktig berührend, daher zerfallen alle Polaren von der $(n-p+1)^{\text{ten}}$ bis zur $(n-2)^{\text{ten}}$ als Curven der bez. Ordnungen $(p-1)$. . . , 2 in die Tangente und Curven nächst niederer Ordnung. Die letzte Polare ist, wie immer, die Tangente.*

§ 2.

Die Polarflächen in Bezug auf eine Grundfläche in einem beliebig ausgedehnten Raume.

Das für die ebene C^n angewandte Verfahren lässt sich sofort auf die Fläche n^{ter} O. und $(p-1)^{\text{ter}}$ Dim., F_{p-1}^n , im linearen Raume von p Dim., R_p übertragen. Man denke die beiden Projektionskegel aus zwei Punkten einer durch den Pol P gehenden Geraden im R_{p+1} an

*) Dies folgt übrigens auch direct aus der Betrachtung der Projectionskegel.

die F_{p-1}^n gelegt. Dieselben durchsetzen sich in einer C_{p-1}^{nn} in R_{p+1} , der die F_{p-1}^n als Theil angehört. Der andere Theil, eine $C_{p-1}^{n(n-1)}$, durchschneidet den R_p in einer $C_{p-2}^{n(n-1)}$, der gesuchten Berührungscurve auf der F_{p-1}^n . Unter allen Flächen des Büschels, welchen die beiden Projectionskegel bestimmen, zerfällt eine in den linearen R_p und einen Rest F_p^{n-1} , welcher seinerseits wiederum R_p in einer Curve ${}^1P_{p-1}^{n-1}$, durch die Berührungscurve $C_{p-2}^{n(n-1)}$ gehend, schneidet. Diese Curve ${}^1P_{p-1}^{n-1}$, oder da sie in R_p enthalten ist, besser Fläche ${}^1P_{p-1}^{n-1}$ soll die erste Polarfläche von P in Bezug auf F_{p-1}^n heissen. Diese Polarfläche ist durch die Berührungscurve vollkommen bestimmt, da zwei Flächen $(n-1)^{\text{ter}}$ O. im Allgemeinen nur eine $C^{(n-1)(n-1)}$ gemein haben und im vorliegenden Falle also sämtliche Punkte gemein haben müssen. Die Wiederholung des Verfahrens führt auf die übrigen Polarflächen

$${}^2P_{p-1}^{n-2}, {}^3P_{p-1}^{n-3} \dots {}^{n-1}P_{p-1}^1,$$

von denen also jede durch die Berührungscurve des vom Pole an die vorangehende gelegten Tangentialkegels geht und durch diese Curve bestimmt ist.

Es ist bemerkenswerth, dass man durch Schneiden mit einem linearen Raum R_m , wo $m < p$, welcher den Pol enthält, auf eine Grundfläche mit ihren sämtlichen Polaren geführt wird, da hieraus die Möglichkeit entspringt die Polaren ohne Hilfe des R_{p+1} zu construiren, indem diese Flächen durch die Gesamtheit der construirten Schnittcurven im Bündel der R_{p-1} des Pols überdeckt wird. Im gewöhnlichen R_3 z. B. werden die Polarflächen von den Polaren der ebenen Schnittcurven, von denen jede in ihrer Ebene construirt werden kann, erfüllt. Nur für den R_1 erleidet diese Methode eine Ausnahme; wir müssen überhaupt noch zeigen, dass die Polarpunkte zu einem Grundsystem G^n und einem Pole wirklich bestimmt sind, was nicht direct ersichtlich, da die Berührungscurven, welche sonst die Polaren festlegen, fehlen. Man schliesst die völlige Bestimmtheit nun daraus, dass die Polaren aller Flächen im R_p ($p > m$), welche durch eine Fläche derselben Ordnung in R_m gehen, mit diesem Raum dasselbe Polarsystem gemein haben. Insbesondere müssen die Polargruppen zu G^n also auch immer dieselben sein, nämlich die Schnittpunkte der Polaren irgend einer durch G^* gehenden Fläche mit R_1^*).

) Herr Klein theilte mir den folgenden Beweis mit: Man lege durch den Träger von G^ zwei Ebenen und führe in jeder derselben die Construction der Polare durch; wobei die Analoge der Projectionskegel des § 7 zwei Strahlenbüschel sind. Dann bilden die sämtlichen Constructionslinien zwei centrisch collineare Figuren mit dem Träger von G^* als Collineationsaxe, da sich entsprechende Gerade

§ 3.

Definition der verschiedenen Polarflächen durch Elemente der Grundfläche.

In R_1 konnte die völlige Bestimmtheit der ersten Polare einer Gruppe G^* nur durch Heranziehung höherer Mannigfaltigkeiten eingesehen werden, die geometrische Bedeutung der verschiedenen Gruppen ${}^1P^{n-1}$ etc. ist nicht direct erkennbar. In R_2 ist wenigstens die erste Polare ${}^1P^{n-1}$, als Curve, welche die Berührungspunkte des Tangentenbüschels aus dem Pole enthält, zu erklären, aber die Schnittpunkte der übrigen Polaren mit der Grundcurve haben keine geometrische Bedeutung. In R_3 tritt noch die zweite Polare für eine Fläche hinzu, indem sie nach 3. aus der Berührungcurve $n(n-1)O$ die $n(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte der dreipunktig berührenden oder Haupttangente ausschneidet, welche auch umgekehrt die zweite Polarfläche definiren. Die Polaren der Flächen dritter Ordnung in R_3 werden also gerade noch sämmtlich durch Elemente der Grundfläche definirt. Und, man findet leicht weiter, dass dies im R_n bei der $(n-1)$ dimensionalen Fläche $n^{\text{ter}} O$. ebenso der Fall ist, dass man nämlich allgemein sagen kann:

4. Die erste Polare von P in Bezug auf die $(n-1)$ dimensionale Fläche n^{ter} Ordnung im R_n enthält die Berührungcurve $n(n-1)^{\text{ter}} O$. und $(n-2)^{\text{ter}}$ Dimension des vom Pole an die Fläche gelegten $(n-1)$ dimensionalen Berührungskegels, — die zweite Polare die Berührungcurve $n(n-1)(n-2)^{\text{ter}} O$. und $(n-3)^{\text{ter}}$ Dimension des $(n-2)$ dimensionalen Berührungskegels der 3punktig berührenden Haupttangente, — ... die r^{te} Polare die Berührungcurve $n(n-1) \dots (n-r)^{\text{ter}} O$. und $(n-r-1)^{\text{ter}}$ Dimension des $(n-r)$ dimensionalen Berührungskegels der $(r+1)$ punktig berührenden Haupttangente, *) — ... die letzte Polare die Gruppe der $n!$ Berührungspunkte von eben so vielen n -punktig berührenden Haupttangente. Jede dieser Flächen ist durch die genannten Elemente bestimmt.

Aus dem Satze von 3. ziehen wir aber weiter das für die Folge wichtige Resultat:

5. Die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare eines Punktes der Berührungcurve der von einem Punkte P an die Fläche gelegten $(r+1)$ punktig berührenden Haupttangente (welcher also auf der r^{ten} Polare von P liegt), enthält diese Tangente, d. h. die Fläche geht durch P .

Denn, legen wir durch eine solche Tangente eine Ebene, so

auf ihr schneiden. Folglich sind auch die beiden construirten ebenen Curven $(n-1)^{\text{ter}} O$. centrisch collinear, was ein Zusammenfallen ihrer Schnittpunkte mit G^* nach sich zieht, d. h. die beiden von einander gänzlich unabhängigen Constructionen führen auf die nämlichen Polarpunkte w. z. b. w.

*) Es möge gestattet sein, dies Wort hier beizubehalten.

schneidet sie die Curve des Satzes 3. aus. Um nun zu zeigen, dass nicht nur Punkte obiger Berührungscurve, sondern alle Punkte der r^{ten} Polare ihre $(n - r)^{\text{ten}}$ Polaren durch den Pol senden; beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten und letzten Polare, also mit dem Specialfall $r = 1$, für den das Gesagte leicht erweisbar ist.

§ 4.

Die Reciprocität zwischen der ersten und letzten Polare.

Nehmen wir, der leichtern Anschauung wegen, eine Fläche n^{ter} O. im gewöhnlichen Raume. Die ersten Polaren ${}^1P^{n-1}$ und ${}^1Q^{n-1}$ zweier Punkte P und Q schneiden die Fläche in den $n(n-1)^2$ Berührungspunkten der durch die Gerade $\overline{PQ}$ gehenden Tangentialebenen. Eben desswegen gehen auch die Polaren aller übrigen Punkte von $\overline{PQ}$ durch diese Punkte, und da jene Flächen also mehr als $(n-1)^3$ Punkte gemeinschaftlich haben, so haben sie eine ganze Curve gemeinschaftlich, und bilden ein Büschel. Einer zweiten Geraden, welche mit $\overline{PQ}$ in einerlei Ebene liegt, entspricht ein zweiter Büschel und je zwei solche Büschel, wie sie zweien der Geraden dieser Ebene zukommen, haben eine Fläche, nämlich die Polare ihres Schnittpunkts gemein, d. h. die Polaren aller Punkte einer Ebene bilden ein Netz. Nun ist die Beziehung zwischen Pol und erster Polare eine *durchaus eindeutige*, denn wenn überhaupt eine Fläche $(n-1)^{\text{ter}}$ O. erste Polare sein soll, so müssen die sämtlichen Tangentialebenen längs ihrer Schnittcurve mit der Grundfläche einen Kegel umhüllen, dessen Spitze dann der Pol ist. Es bilden also auch alle ersten Polaren durch einen festen Punkt ein Netz und jedem solchen Netz von ersten Polaren entspricht eine Ebene als Ort der zugehörigen Pole. Endlich, da je zwei solche Netze einen Büschel gemein haben, nämlich denjenigen, welchem die Schnittlinie ihrer Polebenen entspricht; bilden die sämtlichen ersten Polaren ein lineares Flächensystem $(n-1)^{\text{ter}}$ O. und dritter Stufe.

Für eine F_2^3 im gewöhnlichen R_3 zeigen wir schon jetzt leicht, dass die Polebene aller durch einen Punkt P gehenden ersten Polaren die $3 - 1 = 2^{\text{te}}$ Polare ${}^2P^1$ ist. Wissen wir doch aus 5. von den $3 \cdot 2 \cdot 1$ Berührungspunkten der 6 Haupttangente aus P , dass sie ihre ersten Polaren durch P schicken, und da nach 5. diese Punkte auch in der 2^{ten} Polarfläche liegen, so sind beide Ebenen nicht von einander verschieden. Für eine Fläche n^{ter} Ordnung folgt aber dasselbe, wenn wir sie nur $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension im R_n voraussetzen. Diese Ueberlegungen führen dann zu dem allgemeinen Satze:

6. *Alle ersten Polaren einer F_n^* im R_n , bilden ein lineares System n^{ter} Stufe; die sämtlichen ersten Polaren, welche durch einen Punkt P*

gehen, bilden ein lineares System $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe und die zugehörigen Pole liegen auf einer Ebene, der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Polare $^{n-1}P_{n-1}^1$ von P , und umgekehrt, alle $(n - 1)^{\text{ten}}$ Polaren der Punkte einer ersten Polare gehen durch den Pol dieser Fläche, — oder kurz: Geht die erste Polare $^1P_{n-1}^{n-1}$ von P durch Q , so geht die $(n - 1)^{\text{te}}$ Polare $^{(n-1)}Q_{n-1}^1$ von Q durch P und umgekehrt.

Die Richtigkeit dieses Satzes für einen Raum niedriger Dimension erhält nach pag. 560 durch „Schneiden“ mit einem solchen, welcher durch den Pol geht.

Rückt nun P mit Q zusammen, so hat man specieller: Geht die erste Polare durch ihren Pol, so thut es auch die $(n - 1)^{\text{te}}$, und umgekehrt, dann aber ist es, wie durch folgende Betrachtung einleuchtet, mit allen übrigen der Fall. Enthält nämlich irgend eine r^{te} Polare ihren Pol, so gehen nach 2. ebenfalls durch ihn die $(r + 1)^{\text{te}}$, $(r + 2)^{\text{te}}$... $(n - 1)^{\text{te}}$, und folglich nach dem soeben ausgesprochenen Satze auch die erste, und dann — wiederum nach 2. — auch alle folgenden, d. h.

7. Geht irgend eine Polare durch ihren Pol, so thun es alle übrigen desselben Poles, sowie die Grundcurve (wie sofort gezeigt werden soll) auch.

Dass in diesem Falle die Grundcurve durch den Pol geht, ergibt sich mit Hilfe des Chasles'schen Correspondenzsatzes. Sei nämlich G^* eine Punktgruppe auf einer Geraden R_1 , und $^1P^{n-1}$ die erste Polare eines Pols P , so hat man auf der Geraden die Correspondenz $(n - 1, 1)$ mit $(n - 1) + 1 = n$ Coincidenzpunkten. Aber diese Anzahl wird schon durch G^* absorbiert, es geschieht also sonst nirgendwo, dass ein Pol auf seiner Polare liege.

Es ist nun leicht die Anzahl x der Pole anzugeben, welche einer $(n - r)^{\text{ten}}$ Polare $^{n-r}P_r$ von G^* zukommen. In der Correspondenz (r, x) sind nur die Grundpunkte Coincidenzpunkte, folglich ist

$$r + x = n$$

$$x = n - r.$$

Der $(n - r)^{\text{ten}}$ Polare kommen also auch $n - r$ Pole zu.

Lässt man nun die Gerade um einen der Punkte P der $(n - r)^{\text{ten}}$ Polare einer F_{m-1}^* im R_m sich drehen, so erhält man in jeder Lage $n - r$ Pole, d. h. dieselben erfüllen eine Fläche der $(n - r)^{\text{ten}}$ Ordnung und diese ist mit Rücksicht auf 5 die r^{te} Polare von P . D. h.

8. Geht die r^{te} Polare eines Punktes P durch einen Punkt Q , so geht die $(n - r)^{\text{te}}$ Polare von Q durch P .

Hiermit können wir füglich unsere Untersuchung schliessen, da aus diesem Satze die Theorie in bekannter Weise rein geometrisch weiter geführt werden kann.

Schlussbetrachtung.

Mit der Einführung des Begriffs einer Fläche n^{ter} Ordnung, als einer Fläche, welche von jeder Geraden in n Punkten getroffen wird, ist die Richtigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra sofort vorausgesetzt, von dem dann das Bezout'sche Theorem und das Chasles'sche Correspondenzprincip nur geometrische Einkleidungen sind. Vom letztern wird bei den vorstehenden Entwicklungen in vollem Umfange Gebrauch gemacht; hingegen sind die aus dem erstern sich ergebenden Ordnungszahlen der auftretenden Schnittcurven, Tangentenkegel etc. für die Bestimmung der Polaren selbst nicht von Belang. Vielmehr werden aus der analytischen Geometrie nur die Sätze:

1) Durch die Schnittcurve zweier Flächen derselben Ordnung gehen unendlich viele, ein Büschel von Flächen, jede dieser Flächen ist durch einen weitem Punkt, durch den sie gehen soll, bestimmt (pag. 558);

2) Gehen durch den Schnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung mit zwei Flächen m^{ter} Ordnung, wo $m < n$, unendlich viele Flächen m^{ter} Ordnung, so bilden diese ein Büschel (pag. 562);

3) Durch die Schnittcurve einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Fläche m^{ter} Ordnung wo $m < n$ geht nur die *eine* Fläche m^{ter} Ordnung oder allgemein, für beliebig ausgedehnte Räume, — durch die Schnittcurve von r Flächen der bez. Ordnungen $n_1 > n_2 > n_3 \dots > n_r$ geht nur die eine Fläche n_r^{ter} Ordnung (pag. 561);

herüber genommen. Dieselben reichen aus bis zum Beweise des ersten Theils vom Satze 7, erst beim Nachweise des zweiten Theils:

Geht irgend eine Polare durch den Pol, so liegt derselbe auch auf der Grundfläche;

wurde das Correspondenzprincip herangezogen. Auch dieser Satz hätte sich zwar noch ohne jenes Princip ableiten lassen; da dasselbe jedoch später nicht entbehrt werden konnte, so wurde es sofort zur Hülfe genommen.

Der Beweis besteht nun in Folgendem. Angenommen, die Polaren einer F_n^* im R_{n+1} gehen durch den *nicht auf der Fläche liegenden* Pol. Der Schnitt des Systems der Grundfläche und ihrer Polaren mit dem linearen R_n der letzten Polare, giebt dann eine F_{n-1}^* , deren sämtliche Polaren, mit Ausnahme der letzten, durch den Pol gehen, während die letzte völlig unbestimmt ist. Auf der letzten Polare befindet sich nun nach 4. eine ganze Curve von einer Dimension, bestehend aus Punkten, in denen Kegelerzeugende n -punktig berühren, da die letzte Polare, welche im Allgemeinen die $n!$ solcher Punkte ausschneidet, unbestimmt ist. Es folgt aber aus der mitgetheilten Construction der Polaren, dass in einer Gruppe von n

consecutiven Punkten, so lange der Pol nicht selbst in sie hineinrückt, auch alle Polaren vereinigt sind. Also auch von der letzten Polare giebt es unendlich viele bestimmte Punkte. Die Annahme war also unmöglich, der Pol muss auf der Grundfläche liegen. Damit ist dann zugleich für den Specialfall der Correspondenz $(n - 1, 1)$ der Nachweis ihrer n Coincidenzpunkte geführt. Schreiben wir

$$f(n - 1, 1) = n.$$

Bezeichnet weiter x die Anzahl der Pole einer $(n - r)^{\text{ten}}$ Polare, so ist auch

$$f(r, x) = n$$

und zwar muss die Function „ f “ für alle ganzzahligen Werthe von $r < n$ auch ganze x liefern. Stellt man nun als Axiom hin, dass die Function algebraisch und symmetrisch in Bezug auf r und x sei, so folgt auch, dass sie linear sei; denn für alle Ausdrücke höhern als ersten Grades lassen sich stets Werthe von r angeben, deren zugehörige x nicht ganzzahlig sind. Folglich:

$$f(r, x) = r + x = n,$$

worin das Correspondenzprincip liegt.

Hannover, den 9. Mai 1885.