Über die A b b e'sche Sinusbedingung.

Von

Otto Fischer (Leipzig).

(Mit 9 Textfiguren.)

Bekanntlich lässt sich die punktweise Abbildung eines nach allen drei Dimensionen ausgedehnten Raumteiles durch weit geöffnete Strahlenbündel mit den zur Verfügung stehenden optischen Mitteln nicht verwirklichen. Bei Beschränkung auf sehr enge Strahlenbündel ist wohl unter Umständen die Abbildung eines fadenförmigen Raumes oder einer ausgedehnten Fläche mittelst Brechung und Reflexion herzustellen; sobald aber die Öffnung der Strahlenbündel über eine bestimmte Grenze hinausgeht, kann man z. B. bei zentrierten optischen Systemen entweder nur ein unendlich kleines Stück der Achse oder ein auf der Achse senkrecht stehendes, unendlich kleines Flächenelement mit ausreichender Schärfe abbilden. Dass man nicht beide Forderungen gleichzeitig erfüllen und demnach nicht einmal ein unendlich kleines Raumelement mit beliebig weit geöffneten Strahlenbündeln scharf abbilden kann, ist darauf zurückzuführen, dass, wie Czapski nachgewiesen hat, für die Abbildung eines unendlich kleinen Achsenstücks die Sinus der halben Achsenwinkel konjugierter Strahlen ein konstantes Verhältnis aufweisen müssen, während zur Abbildung eines zur Achse senkrechten Flächenelements das Verhältnis der Sinus der ganzen Achsenwinkel konstant sein muss, eine Forderung, welche eben kurz als die Sinusbedingung bezeichnet wird.

Über die Bedeutung der Sinusbedingung für den Strahlenverlauf im Objekt- und Bildraum kann man sich am besten Rechenschaft geben, wenn man zum Vergleich die Strahlenrichtungen heranzieht, wie sie sich bei der optisch nicht realisierbaren kollinearen Abbildung endlicher Raumteile mittelst beliebig weit geöffneter Bündel gestalten würden. In diesem Falle müssten die sämtlichen zu zwei konjugierten Achsenpunkten gehörenden Abbildungsstrahlen bekanntlich die Be-

dingung erfüllen, dass die trigonometrischen Tangenten ihrer Achsenwinkel ein konstantes Verhältnis besitzen. Diese sogen. „Tangentenbedingung“ findet ihren geometrischen Ausdruck in der Eigenschaft der Gauss'schen Hauptebenen, dass jeder Punkt in der einen das Bild eines Punktes in der anderen Hauptebene darstellt, welcher den gleichen Achsenabstand besitzt und mit ihm in derselben Achsenebene liegt. Stellen A und A' zwei konjugierte Punkte auf der Achse eines zentrierten Systems dar (vgl. Fig. 1), H, H' die Hauptpunkte und $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ die Hauptebenen des letzteren, so treffen irgend zwei konjugierte Strahlen durch A und A' die zugehörigen Haupt-

Fig. 1.

ebenen in Punkten E, E' in der Weise, dass $\overline{HE} = \overline{H'E'}$, und demnach $\frac{\tan u}{\tan u'} = \frac{s'}{s}$ ist, unter u, u' die Achsenwinkel konjugierter Strahlen, und unter s, s' die Hauptpunktsabstände $\overline{HA}$ und $\overline{H'A'}$ der beiden konjugierten Punkte verstanden. Da die Hauptpunktsabstände durch die beiden Brennpunkte F, F' des Systems in gleichem Verhältnis (nämlich dem Verhältnis von Bildgrösse y' und Objektgrösse y , dessen Wert β man bekanntlich als die Lateralvergrößerung bezeichnet) geteilt werden, so hat man auch

$$\frac{s'}{s} = -\frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f},$$

wenn x, x' die Brennpunktsabstände von A, A' und f, f' die Brenn-

weiten bedeuten, sofern man beide Arten von Strecken an den Brennpunkten beginnen lässt und sie konsequent in der Richtung des einfallenden Lichtes, also in Fig. 1, von links nach rechts positiv rechnet. Beachtet man, dass die Lateralvergrößerung β , wie sich aus Fig. 1 unmittelbar ergibt, durch die Quotienten $\frac{f}{x}$ bzw. $\frac{x'}{f'}$ gemessen werden kann, und dass allgemein $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ ist, so erhält man durch Erweitern der beiden Werte von $\frac{s'}{s}$ mit f bzw. f' für das Tangentenverhältnis den bekannten Wert

$$\frac{\tan u}{\tan u'} = \frac{n'}{n} \beta.$$

Die Sinusbedingung, welche für die Abbildung eines zur Achse im Punkte A senkrechten Flächenelementes mittelst weitgeöffneter Strahlenbündel erfüllt sein muss, unterscheidet sich von dieser Tangentenbedingung nur dadurch, dass an Stelle der trigonometrischen Tangenten die Sinus treten; sie lautet demnach für alle an der Abbildung beteiligten konjugierten Strahlen

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta.$$

Wie man die Strahlenrichtungen im Bildraum, welche der Tangentenbedingung entsprechen würden, aus den Strahlenrichtungen im Objektraum mit Hilfe der Hauptebenen leicht ableiten kann, so lassen sich auf gleich einfache Weise die der Sinusbedingung entsprechenden konjugierten Strahlenrichtungen mit Hilfe zweier Kugelflächen gewinnen, welche die Hauptebenen zu Tangentialebenen und die konjugierten Punkte A und A' auf der Achse zu Mittelpunkten, und daher die Hauptpunktabstände s und s' der konjugierten Punkte A und A' zu Radien besitzen. Diese Kugelflächen mögen daher als „Hauptkugelflächen“ bezeichnet sein. Wie die eine Hauptebene ($\S$) dem Objektraum und die andere ($\S'$) dem Bildraum zugehört, so ist auch die Hauptkugelfläche mit dem Mittelpunkt A und der Tangentialebene $\S$ als Bestandteil des Objektraumes und die andere mit dem Mittelpunkt A' und der Tangentialebene $\S'$ als Bestandteil des Bildraumes aufzufassen.

Zur Konstruktion des Bildstrahles zu einem von A ausgehenden Strahl hat man letzteren bis zum Schnittpunkte E mit der Hauptkugelfläche des Objektraumes (vgl. Fig. 2) fortgesetzt zu denken, dann von E parallel zur Achse bis zu dem Punkte E' der anderen

Hauptkugelfläche weiterzugehen und schliesslich E' mit A' zu verbinden; dann stellt $E'A'$ den zu AE konjugierten Bildstrahl dar; denn aus der Gleichheit der Lote von E und E' auf die Achse folgt unmittelbar $s \cdot \sin u = s' \cdot \sin u'$ oder

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{s'}{s} = \frac{n'}{n} \beta.$$

Diese Konstruktion ist in Fig. 2 für eine Reihe von Strahlen des von A ausgehenden Bündels ausgeführt worden. Um einen Vergleich mit dem Strahlenverlauf bei Gültigkeit der Tangentenbedingung

Fig. 2.

zu ermöglichen, findet sich in der Figur für den obersten Strahl derselbe durch Punkte angedeutet. Wie man sieht, übernehmen bei Erfüllung der Sinusbedingung die Hauptkugelflächen die Rolle, welche bei Geltung der Tangentenbedingung die Hauptebenen für die Ableitung konjugierter Strahlenbündel spielen. Dagegen kann man auch bei weitgeöffneten Bündeln die Hauptebenen mit den Brennpunkten zur Konstruktion des Bildortes heranziehen, wenn man sich nur dabei bewusst bleibt, dass dann die Konstruktionsgeraden nicht optischen Strahlen zu entsprechen brauchen, sondern nur rein geometrische Bedeutung beanspruchen können.

Die Sinusbedingung kann von einem zentrierten optischen System bekanntlich immer nur für ein einziges Paar konjugierter Punkte A, A' auf der Achse erfüllt werden. Dementsprechend ändern sich die

beiden Hauptkugelflächen mit der Lage der konjugierten Punkte; sie gehen zwar stets durch die Hauptpunkte und haben die Hauptebenen zu Tangentialebenen, aber ihre Radien vergrössern oder verkleinern sich mit den Hauptpunktsabständen s, s' der konjugierten Punkte. Fällt insbesondere A mit dem Brennpunkte F zusammen, so rückt A' ins Unendliche, und die Hauptkugelfläche des Bildraumes geht bei Erfüllung der Sinusbedingung für diesen Fall in die entsprechende Hauptebene über, während der Radius der Hauptkugelfläche des Objektraumes gleich der Brennweite f des letzteren Raumes wird. Zu einem unter dem Winkel u gegen die Achse geneigten Strahl durch F gehört dann ein zur Achse paralleler Bildstrahl, dessen Entfernung h' von der Achse gleich $f \sin u$ wird. Die Brennweite wird daher in diesem Falle durch $\frac{h'}{\sin u}$ gemessen, während bei Erfüllung der Tangentenbedingung der Quotient $\frac{h'}{\tan u}$ nach Gauss das Maass für dieselbe darstellt. Rückt andererseits A ins Unendliche, so fällt A' mit dem Brennpunkte F' des Bildraumes zusammen; dann geht die Hauptkugelfläche des Objektraumes in die entsprechende Hauptebene über, während die andere Hauptkugelfläche die Brennweite f' des Bildraumes als Radius erhält. Zwischen dem Achsenabstand h eines der Achse parallelen Strahles des Objektraumes und dem Winkel u' , unter welchem sein konjugierter, durch F' gehender Strahl des Bildraumes gegen die Achse geneigt ist, besteht dann die Beziehung $f' = \frac{h}{\sin u'}$, während bei der kollinearen Abbildung nach Gauss als Definition dieser Brennweite $\frac{h}{\tan u'}$ gilt.

Solange der Punkt A ausserhalb der Brennweite, also in Fig. 1 links von F , liegt, befindet sich sein Bildpunkt A' ebenfalls ausserhalb der Brennweite des Bildraumes, also in Fig. 1 rechts von F' . Die beiden Hauptkugelflächen sind infolgedessen nach entgegengesetzten Richtungen gekrümmt und wenden ihre konvexen Seiten einander zu. Liegt dagegen A zwischen F und H , so befindet sich sein Bildpunkt A' links von H' , und die Hauptkugelflächen wenden beide ihre konkaven Seiten den einfallenden Strahlen zu. Dieses Verhalten gilt zunächst für ein Kollektivsystem, wie es durch Fig. 1 angedeutet ist. Bei einem Dispersivsystem liegen die Brennpunkte

nach der entgegengesetzten Seite wie in Fig. 1 von ihren Hauptpunkten entfernt. Für jede Lage des Punktes A auf der Achse links von H liegt dann A' ebenfalls links von H' , so dass hier stets die beiden Hauptkugelflächen ihre Konkavität den einfallenden Strahlen zuwenden usw. Es ist also nur nötig, sich die bekannten Lagebeziehungen zwischen Objekt- und Bildpunkt und den beiden Hauptpunkten bei einem zentrierten optischen System zu vergegenwärtigen, um sich auch in den noch nicht hervorgehobenen Fällen, wenn z. B. A rechts von H liegt oder die einfallenden Strahlen nach einem Punkte A auf der Achse konvergieren, über das Verhalten der Hauptkugelflächen Rechenschaft geben zu können. Die Resultate modifizieren sich natürlich in entsprechender Weise, sofern H' vor H liegen sollte.

Fallen die beiden Hauptpunkte zusammen, wie z. B. bei der Brechung an einer einzigen Kugelfläche, so vereinfachen sich im Falle der Gültigkeit der Sinusbedingung für zwei konjugierte Punkte die Beziehungen nur insofern, als dann die beiden Hauptkugelflächen im gemeinsamen Hauptpunkte einander berühren.

Es lässt sich nun zeigen, dass das an und für sich schon sehr einfache Verfahren zur Konstruktion konjugierter Strahlenbündel, welche der Sinusbedingung entsprechen, eine noch weitere Vereinfachung erfahren kann, durch welche nicht nur die Sinusbedingung auf den durchsichtigsten geometrischen Ausdruck gebracht, sondern zugleich ein sehr anschauliches Kriterium für die Erfüllung derselben gewonnen wird. Um dies einzusehen, erweist es sich als zweckmässig, zunächst wieder auf die Tangentenbedingung zurückzugreifen.

Denkt man in Fig. 1 je zwei durch A und A' gehende konjugierte Strahlen bei Gültigkeit der Tangentenbedingung über die zugehörigen Hauptebenen hinaus fortgesetzt, bis sie sich schneiden, so liegen alle diese Schnittpunkte in einer zu den Hauptebenen parallelen Ebene $\mathfrak{S}_0$, deren Abstände von den Punkten A und A' und daher auch von den Hauptebenen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ im Verhältnis der Hauptpunktabstände s, s' der Punkte A und A' stehen. Dies ist an der Hand von Fig. 3 unmittelbar einzusehen; denn schneidet eine zur Achse senkrechte Ebene $\mathfrak{S}_0$ die Achse im Punkte H_0 , so gilt für die Achsenwinkel u, u' je zweier in einem Punkte der Ebene $\mathfrak{S}_0$ zusammen treffender Strahlen durch A und A' die Beziehung $\tan u : \tan u' = \overline{H_0 A'} : \overline{H_0 A}$; dieselben erfüllen also die obige Tangentenbedingung, sofern $\overline{H_0 A'} : \overline{H_0 A} = s' : s$ ist; es teilt daher nach einem bekannten Satz der Proportionslehre auch der Punkt H_0 die Strecke $\overline{AA'}$ im

Verhältnis $s : s'$. Die Ebene $\mathfrak{S}_0$, welche Ferraris¹⁾ den perspektivischen Durchschnitt der beiden Strahlenbündel nennt, soll im folgenden als die „reduzierte Hauptebene“, und der Punkt H_0 als der „reduzierte Hauptpunkt“ bezeichnet werden, da sie die beiden Hauptebenen bzw. Hauptpunkte bezüglich ihrer Verwendung zur Konstruktion konjugierter Strahlen vollkommen ersetzen, sobald es sich um ein bestimmtes Paar konjugierter Achsenpunkte handelt. Zur Konstruktion des zu einem Punkte A konju-

Fig. 3.

gierten Punktes A' muss man dagegen auf die Gauss'schen Hauptebenen zurückgreifen, da die reduzierte Hauptebene ihre Lage mit dem Ort des Punktes A ändert.

Solange A und A' sich auf verschiedenen Seiten ihrer Hauptebenen befinden, liegt der reduzierte Hauptpunkt H_0 innerhalb der Strecke $\overline{HH'}$. Liegen dagegen die konjugierten Punkte entweder beide links oder beide rechts von ihren Hauptebenen, so befindet sich H_0 ausserhalb $\overline{HH'}$ und teilt diese Strecke aussen im Verhältnis $s : s'$. Deckt sich A mit dem Brennpunkte F , und ist demnach A' ins Unendliche gerückt, so fällt H_0 mit H zusammen; in ent-

1) Vgl. Ferraris, Die Fundamental-Eigenschaften der dioptrischen Instrumente. Leipzig 1879. S. 207.

sprechender Weise rückt H_0 nach H' , falls A' in F' , und daher A im Unendlichen liegt.

Bezeichnet man den Abstand $\overline{HH'}$ der beiden Hauptebenen mit η (vgl. Fig. 1) so ergibt sich unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Hauptpunktsentfernungen s, s' in dem durch die Figg. 1 und 3 dargestellten Falle für den Abstand $\overline{HH_0}$ des reduzierten Hauptpunktes vom Hauptpunkt des Objektraumes, welcher mit s_0 bezeichnet sein soll (vgl. Fig. 3), der Wert

$$s_0 = \frac{-s}{-s + s'} \eta = \frac{n}{n - n'} \beta \eta.$$

Unter Berücksichtigung von $\beta = \frac{f}{x}$ lässt sich dieser Ausdruck auch in der Form schreiben:

$$s_0 = \frac{nx}{nx - n'f} \eta.$$

Aus dieser Formel ergibt sich unmittelbar, dass der Abstand s_0 gleich Null oder gleich η wird, also H_0 mit H oder H' zusammenfällt, je nachdem x den Wert Null oder unendlich besitzt, d. h. also je nachdem A mit F oder A' mit F' zusammenfällt, wie oben schon angedeutet wurde. Man erkennt weiter aus derselben, dass s_0 den Wert $\frac{\eta}{2}$ annimmt, H_0 also in der Mitte zwischen den beiden

Hauptpunkten liegt, wenn $x = -\frac{n'}{n}f = f'$ wird; da hierzu der Wert $x' = f$ gehört, so befindet sich in diesem Falle bei einem Kollektivsystem der Objektpunkt A in einem Abstand gleich der hinteren Brennweite vor dem vorderen Brennpunkt, und sein Bildpunkt A' in einem Abstand gleich der vorderen Brennweite hinter dem hinteren Brennpunkt. Für $x = +\frac{n'}{n}f = -f'$ und dementsprechend $x' = -f$ wird s_0 unendlich gross; der reduzierte Hauptpunkt rückt also dann ins Unendliche. Dies entspricht dem Fall, dass A mit dem vorderen, und A' mit dem hinteren Knotenpunkt des Systems zusammenfällt.

Solange x negativ ist, nimmt nach der obigen Formel bei einem Kollektivsystem, welches ja durch einen positiven Wert von f charakterisiert ist, s_0 einen positiven Wert an, der kleiner oder (für $x = -\infty$) höchstens gleich η ist. Demnach fällt bei einem Kollektivsystem der reduzierte Hauptpunkt zwischen H und H'

(sofern H vor H' liegt), solange sich A vor dem vorderen Brennpunkt F befindet. Ist dagegen x positiv, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nx kleiner oder grösser als $n'f$ ist. Im ersten Falle wird s_0 negativ, im zweiten dagegen positiv, wobei es aber dann einen grösseren Wert als η annimmt. Es liegt demnach unter den obigen Voraussetzungen H_0 ausserhalb der Strecke $\overline{HH'}$, und zwar im einen Falle vor H , im anderen dagegen hinter H' .

Bei einem Dispersivsystem, welches durch einen negativen Wert von f charakterisiert wird, liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Hier wird s_0 positiv, aber kleiner wie η , solange x positiv ist, ein Fall, welcher z. B. bei einer einzigen Dispersivlinse nur durch konvergentes Einfallen der Lichtstrahlen verwirklicht werden kann. Bei negativem x wird dagegen s_0 negativ oder positiv, aber im letzteren Falle dann grösser wie η , je nachdem der absolute Wert von nx kleiner oder grösser wie der von $n'f$ ist.

Diese Erörterungen über die Lage des reduzierten Hauptpunktes H_0 hatten zunächst zur Voraussetzung, dass die abbildenden Strahlen der Tangentenbedingung entsprechen; sie behalten jedoch ihre Bedeutung auch im Falle der Erfüllung der Sinusbedingung bei, wie sich im folgenden zeigen wird.

Denkt man bei Gültigkeit der Sinusbedingung je zwei durch A und A' gehende konjugierte Strahlen über die zugehörigen Hauptkugelflächen (vgl. Fig. 2) hinaus fortgesetzt, bis sie sich schneiden, so liegen alle diese Schnittpunkte nicht mehr, wie bei Erfüllung der Tangentenbedingung, in einer Ebene, sondern im allgemeinen auf einer Kugelfläche. Von dieser bemerkenswerten Tatsache kann man sich auf folgende Weise Rechenschaft geben.

Fällt man vom Schnittpunkte S zweier konjugierter Strahlen das Lot auf die Achse (vgl. Fig. 3 und die umstehende Fig. 4), so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen die den Achsenwinkeln u und u' gegenüberliegenden Katheten gleich sind. In solchen Dreiecken verhalten sich die anliegenden Katheten umgekehrt wie die trigonometrischen Tangenten, die Hypotenusen dagegen umgekehrt wie die Sinus der Winkel u und u' . Sollen für verschiedene Paare konjugierter Strahlen durch A und A' die trigonometrischen Tangenten der Winkel u und u' das gleiche Verhältnis besitzen, wie es der Tangentenbedingung entspricht, so müssen daher die Fusspunkte aller von den Schnittpunkten konjugierter Strahlen auf die Achse gefällten Lote in einen Punkt zusammenfallen, nämlich in den redu-

zierten Hauptpunkt H_0 . Sollen dagegen für verschiedene Paare konjugierter Strahlen die Sinus von u und u' das gleiche Verhältnis aufweisen, wie es der Sinusbedingung entspricht, so ergibt sich, dass die Abstände aller Schnittpunkte S konjugierter Strahlen von A und A' in demselben Verhältnis stehen müssen.

Nun ist bekannt, dass in einer Ebene der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, ein Kreis ist, der die Strecke zwischen den beiden festen Punkten nach diesem Verhältnis sowohl innen als auch aussen teilt und den Abstand der Teilpunkte zum Durchmesser hat (Apollonischer Kreis). Wendet man dieses Resultat auf alle durch die

Fig. 4.

Achse des optischen Systems hindurchgehenden Ebenen an, so erkennt man, dass die Schnittpunkte aller Paare konjugierter Strahlen durch A und A' , welche der Sinusbedingung genügen, auf einer Kugelfläche liegen, die ihren Mittelpunkt M auf der Achse hat und in ihren Schnittpunkten mit der Achse die Strecke AA' innen und aussen im Verhältnis $s:s'$ teilt. Diese Kugelfläche soll als die „reduzierte Hauptkugelfläche“ bezeichnet sein, weil sie die beiden Hauptkugelflächen bezüglich ihrer Verwendung zur Konstruktion konjugierter Strahlen, welche der Sinusbedingung entsprechen, vollkommen ersetzt. Da der reduzierte Hauptpunkt H_0 die Strecke AA' im Verhältnis $s:s'$ teilt, so gehört er der reduzierten Hauptkugelfläche an und stellt den einen Schnittpunkt derselben mit der Achse dar. Der andere Schnittpunkt N mit der Achse bildet den vierten harmonischen Punkt zu A , A' und H_0 .

In Fig. 4 ist für einen bestimmten Fall die reduzierte Hauptkugelfläche in ihrem Durchschnitt mit einer Achsenebene dargestellt. Entsprechend den harmonischen Eigenschaften des Kreises liegt A auf der Berührungssehne der beiden von A' an den Kugeldurchschnitt gezogenen Tangenten und halbiert dieselbe. Ferner teilt der Mittelpunkt M die Strecke $\overline{AH_0}$ in demselben Verhältnis aus, wie die Strecke $\overline{AA'}$ durch H_0 innen bzw. durch N aussen geteilt wird, so dass also unter Berücksichtigung der Vorzeichen von s und s' gilt:

$$\overline{MA} : \overline{MH_0} = (-s) : s'.$$

Schliesslich hat man auch:

$$\overline{MH_0} : \overline{MA'} = (-s) : s',$$

da $\overline{MH_0}$ die mittlere Proportionale zu $\overline{MA}$ und $\overline{MA'}$ ist.

Diese bekannten Beziehungen zwischen harmonischen Punkten geben nun zunächst das Mittel an die Hand, den Mittelpunkt der reduzierten Hauptkugelfläche auf der Achse für jedes beliebige Paar zugeordneter Punkte A , A' zu konstruieren, nachdem man den reduzierten Hauptpunkt H_0 mit Hilfe der Hauptebenen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ gefunden hat. Damit hat man aber dann die reduzierte Hauptkugelfläche selbst gewonnen.

Man braucht zu diesem Zwecke nur in A eine Strecke AB etwa senkrecht zur Achse abzutragen (vgl. Fig. 5), von dem Endpunkt derselben eine Gerade durch H_0 zu ziehen und die letztere bis zum Schnittpunkte B' mit einer in A' ebenfalls senkrecht zur Achse gezogenen Geraden zu verlängern. Dann hat man zunächst in $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ zwei Strecken, welche im Verhältnis $s : s'$ zueinander stehen. Es ist hierbei zu beachten, dass $\overline{A'B'}$ nur dann das Bild y' der Strecke $\overline{AB} = y$ darstellt, wenn die Brechungsindices des ersten und letzten Mittels des optischen Systems einander gleich sind; denn nur dann gibt der Quotient $\frac{s'}{s}$ die Lateralvergrösserung β an. Da derselbe im allgemeinen Falle dagegen mit $\frac{n'}{n}\beta$ identisch ist, so besitzt $\overline{A'B'}$ die Länge $\frac{n'}{n}y'$, falls $\overline{AB}$ gleich y genommen wird. Trägt man nun in H_0 die Strecke $\overline{A'B'}$ in entgegengesetzter Richtung an ($\overline{H_0C}$ in Fig. 5), so schneidet die Verbindungslinie des Endpunktes C dieser Strecke mit B die Achse im Mittelpunkte M der reduzierten Hauptkugelfläche. Man kann auch so verfahren, dass man in H_0 die Strecke $\overline{AB}$ in entgegengesetzter Richtung abträgt ($\overline{H_0C'}$ in Fig. 5) und den Endpunkt C'

derselben mit B' verbindet; dann geht diese Verbindungsgerade ebenfalls durch M . Schliesslich kann man auch direkt den zweiten Schnittpunkt N der reduzierten Hauptkugelfläche mit der Achse aufsuchen und dann M durch Halbieren des Kugeldurchmessers $\overline{NH_0}$ finden. Zur Konstruktion von N braucht man nur die Strecke $\overline{A'B'}$ von A' aus nach der entgegengesetzten Richtung abzutragen ($A'D$ in Fig. 5) und deren Endpunkt D mit B zu verbinden, dann ergibt sich N als Durchschnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Achse.

Da die Schnittpunkte H_0 und N der reduzierten Hauptkugelfläche die Strecke $\overline{AA'}$ harmonisch teilen, so folgt unmittelbar, dass

Fig. 5.

der Kugelmittelpunkt M stets ausserhalb der Strecke $\overline{AA'}$ zu suchen ist, unabhängig davon, ob der reduzierte Hauptpunkt H_0 zwischen A und A' oder ebenfalls ausserhalb der Strecke $\overline{AA'}$ liegt; denn von den beiden Punkten, welche eine Strecke harmonisch teilen, ist der äussere Teilpunkt immer weiter von dem zunächst liegenden Endpunkt der Strecke entfernt wie der innere. Zu jeder Lage des Mittelpunktes M auf der Achse gehören immer zwei Orte des reduzierten Hauptpunktes; denn wenn der letztere die Lage einnimmt, welche vorher der andere Teilpunkt N hatte, so rückt dieser an den früheren Ort von H_0 , so dass M als der Mittelpunkt der Strecke $\overline{NH_0}$ seinen Ort beibehält. Der Punkt M befindet sich auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AA'}$ über A oder über A' hinaus, je nachdem der reduzierte Hauptpunkt H_0 sich näher an A oder A' befindet. Liegt H_0 insbesondere in der Mitte zwischen A und A' ,

was für $\frac{s'}{s} = -1$, d. h. also für $x = -\frac{n'}{n}f$, eintritt, so fällt M ins Unendliche, und die reduzierte Hauptkugelfläche geht in eine Ebene über, welche in der Mitte von $\overline{AA'}$ auf der Achse senkrecht steht. Das gleiche findet statt, wenn H_0 selbst im Unendlichen liegt, wie es dem Fall entspricht, dass A und A' die Knotenpunkte des Systems darstellen.

Die vorstehenden allgemeinen Angaben über den Ort des Mittelpunktes M der reduzierten Hauptkugelfläche gelten ganz unabhängig von der gegenseitigen Lage der konjugierten Punkte A und A' auf der Achse; sie behalten insbesondere ihre Gültigkeit bei, wenn einer dieser beiden Punkte ins Unendliche und demnach der andere in den Brennpunkt seines Raumes fällt. In diesem Falle rücken die beiden harmonischen Teilpunkte H_0 und N in gleiche Entfernung von dem letzteren Brennpunkt, wobei sie aber immer noch auf verschiedenen Seiten desselben liegen. Infolgedessen fällt dann der Mittelpunkt M mit dem betreffenden Brennpunkte zusammen.

Zur exakten Berechnung der Lage des Punktes M auf der Achse kann man seinen Abstand s_m vom vorderen Hauptpunkte H (vgl. Fig. 5) verwenden. Rechnet man diesen als Strecke, welche wie der Hauptpunktsabstand s des Punktes A in H beginnt, so ergibt sich für s_m die Beziehung (vgl. Fig. 5):

$$(-s_m + s_0) : (-s_m + s) = s' : (-s),$$

woraus unter Berücksichtigung des Wertes von s_0 (vgl. S. 169) folgt:

$$s_m = \frac{ss'}{s + s'} + \frac{s^2}{s^2 - s'^2} \eta = \frac{n'\beta}{n + n'\beta} s + \frac{n^2}{n^2 - n'^2\beta^2} \eta.$$

Der Abstand des Punktes M von H_0 gibt den Radius ϱ der reduzierten Hauptkugelfläche (vgl. Fig. 5) an. Rechnet man denselben positiv oder negativ, je nachdem M (in Fig. 5) rechts oder links, d. h. also allgemein in der Richtung oder entgegen der Richtung der einfallenden Strahlen von H_0 aus zu finden ist, so erhält man

$$\varrho = s_m - s_0 = \frac{ss'}{s + s'} - \frac{ss'}{s^2 - s'^2} \eta = \frac{n'\beta}{n + n'\beta} s - \frac{nn'\beta}{n^2 - n'^2\beta^2} \eta.$$

In diese Formeln kann man wieder die vordere Brennweite f und den Brennpunktsabstand x des Punktes A einführen, indem man beachtet, dass $s = x - f$ (vgl. Fig. 1) und $\beta = \frac{f}{x}$ ist. Es ergibt sich dann

$$s_m = \frac{n'(x-f)}{nx + n'f} f + \frac{n^2x^2}{n^2x^2 - n'^2f^2} \eta$$

$$\varrho = \frac{n'(x-f)}{nx + n'f} f - \frac{nn'xf}{n^2x^2 - n'^2f^2} \eta.$$

Für die Brennpunktsabstände $\overline{FH_0}$ und $\overline{FM}$ der Punkte H_0 und M , welche bzw. mit x_0 und x_m bezeichnet werden sollen, ergibt sich hieraus

$$x_0 = f + s_0 = f + \frac{nx}{nx - n'f} \eta$$

$$x_m = s_m + f = \frac{(n + n')x}{nx + n'f} f + \frac{n^2x^2}{n^2x^2 - n'^2f^2} \eta.$$

Alle diese Formeln gelten ganz allgemein für jedes zentrierte optische System. In den Fällen, in welchen entweder, wie z. B. bei einer einzigen brechenden Fläche, die beiden Hauptebenen zusammenfallen, oder in denen sie doch einander so nahe liegen, dass ihr Abstand gegenüber den anderen Grössen mit genügender Annäherung vernachlässigt werden kann, kommt in allen Formeln das zweite, mit η behaftete Glied in Wegfall.

Die Formeln vereinfachen sich aber auch schon etwas, wenn es sich um ein zentriertes dioptrisches System handelt, bei welchem der erste und letzte Brechungsindex einander gleich sind; sie nehmen dann folgende Gestalt an:

$$s_m = \frac{x-f}{x+f} f + \frac{x^2}{x^2 - f^2} \eta$$

$$\varrho = \frac{x-f}{x+f} f - \frac{xf}{x^2 - f^2} \eta$$

$$x_0 = f + \frac{x}{x-f} \eta$$

$$x_m = \frac{2x}{x+f} f + \frac{x^2}{x^2 - f^2} \eta.$$

Durch die Einführung der reduzierten Hauptkugelfläche hat man nun ein sehr einfaches geometrisches Kriterium für die Erfüllung der Sinusbedingung gewonnen. Es genügt hierzu natürlich nicht, nachzuweisen, dass die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier konjugierter Strahlenbüschel alle auf einer einzigen Kugelfläche liegen, sondern es muss ausserdem noch gezeigt werden, dass diese Kugelfläche ihren Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der beiden konjugierten Strahlencentren A und A' besitzt und durch ihre Schnittpunkte mit dieser Geraden die Strecke $\overline{AA'}$ harmonisch teilt. Erst durch Erfüllung dieser rein geometrischen Bedingungen stellen sich die Punkte A und A' als aplanatische Punkte im Abbe'schen Sinne heraus.

Man sehe sich hierauf hin z. B. die beiden aplanatischen Punkte an, welche bei der Brechung an einer einzigen Kugelfläche vorhanden sind. In Fig. 6 sei M der Mittelpunkt dieser brechenden Fläche vom Radius r , welche zwei Mittel von den Indices n und n' trennt, wobei der Brechungsindex n der vorderen Fläche der grössere sein soll. Dann liegen die beiden aplanatischen Punkte A und A' auf der durch M gehenden Achse MH_0 des Systems bekanntlich in den Abständen $\frac{n'}{n}r$ und $\frac{n}{n'}r$ links von M . Denkt man die brechende

Fig. 6.

Fläche zu einer Vollkugelfläche vervollständigt, so würde dieselbe die Achse zum zweitenmal in einem zwischen A und A' liegenden Punkte N schneiden. Die Abstände der Punkte A und A' von H_0 sind bzw. $r + \frac{n'}{n}r$ und $r + \frac{n}{n'}r$ und stehen daher, wie man leicht bestätigt, im Verhältnis $n':n$. Die Abstände des Punktes N von A und A' sind dagegen bzw. $r - \frac{n'}{n}r$ und $\frac{n}{n'}r - r$; auch diese besitzen das Verhältnis $n':n$. Es teilen daher H_0 und N die Strecke $\overline{AA'}$ harmonisch. Hieraus folgt aber, dass die beiden Strahlenbündel in der Tat der Sinusbedingung genügen, und dass die brechende

Fläche, in der sich ja im vorliegenden Falle entsprechende Strahlen durch A und A' schneiden, selbst die reduzierte Hauptkugelfläche und H_0 den reduzierten Hauptpunkt darstellt.

Wenn der eine der beiden konjugierten Punkte A , A' im Unendlichen liegt, so dass die Strahlen im Objektraum oder im Bildraum parallel der Achse verlaufen, so fällt nach den obigen Erörterungen im Falle der Erfüllung der Sinusbedingung der Mittelpunkt der reduzierten Hauptkugelfläche mit dem anderen Punkte zusammen, der dann ausserdem mit dem Brennpunkte des betreffenden Raumes identisch ist. Das Kriterium für die Erfüllung der Sinusbedingung gestaltet sich daher in diesem Falle besonders einfach. Auch hierfür möge noch ein Beispiel angeführt werden.

In neuerer Zeit ist von der Firma Carl Zeiss in Jena nach den Angaben von Dr. Siedentopf eine gegenüber der ursprünglichen Einrichtung nach Siedentopf und Zsigmondy vereinfachte, aber besonders lichtstarke Einrichtung zur Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen in Flüssigkeiten hergestellt worden, welche von derselben als *Kardioidultramikroskop* bezeichnet wird. Diese Bezeichnung soll darauf hinweisen, dass bei dem wesentlichsten Teil der Einrichtung, dem Kardioidkondensor, eine besondere Eigenschaft der Kardioiden benutzt ist, auf welche zuerst Dr. Siedentopf aufmerksam gemacht hat. Da der Weg, auf welchem der letztere die betreffende Eigenschaft der Kardioiden ableitet¹⁾, mehr für Mathematiker von Fach berechnet sein dürfte, so soll zunächst gezeigt werden, dass man auf ganz elementare und anschauliche Weise, und zwar ohne Anwendung der Differentialrechnung, zu derselben gelangen kann. Es wird dabei auch unmittelbar ersichtlich, dass die konjugierten Strahlenbündel beim Kardioidkondensor gemäss dem zuletzt angeführten Kriterium der Sinusbedingung genügen, so dass also eine aplanatische Strahlenvereinigung vorhanden ist.

Die Kardioiden ist eine besondere Art einer Rollkurve, und zwar ist sie diejenige Kurve, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, während dieser auf einem feststehenden Kreise von gleichem Radius abrollt. In Fig. 7 sei C der Mittelpunkt des festen

1) Vgl. hierzu H. Siedentopf, Über einen neuen Fortschritt in der Ultramikroskopie. Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft 12. Jahrg. 1910 Nr. 1 S. 6 und 7.

Kreises mit dem Radius $\overline{CA} = r$, welcher in der Figur durch Schraffierung vor den anderen Kreisen kenntlich gemacht ist. Beim Abrollen des beweglichen Kreises beschreibt dessen Mittelpunkt eine Kreisbahn DE , deren Radius doppelt so gross wie der Radius beider Kreise, also gleich $2r$ ist. Ein Punkt, welcher der Peripherie des beweglichen Kreises fest angehört, falle in der durch den Ort D seines Mittelpunktes gegebenen Stellung des beweglichen Kreises mit dem Berührungspunkte A zusammen. In irgendeiner anderen Stellung des beweglichen Kreises, z. B. der dem Ort E seines Mittelpunktes

Fig. 7.

(vgl. Fig. 7) entsprechenden, besitzt dann der betreffende Punkt P auf der Peripherie einen Bogenabstand von dem neuen Berührungspunkte B , welcher infolge des Abrollens gleich dem Bogen $\overline{AB}$ auf der Peripherie des feststehenden Kreises ist. Die Radien EB und EP des beweglichen Kreises bilden daher in jeder Stellung denselben Winkel miteinander wie die Radien CA und CB des festen Kreises. Da B den Berührungspunkt der beiden Kreise darstellt, so liegen ausserdem C , B und E in gerader Linie, und das Viereck $ACEP$ stellt infolge der Gleichheit der Winkel bei C und E ein symmetrisches Trapez dar, bei welchem auch die Winkel bei A und P gleiche Grösse besitzen. Verbindet man in diesem Trapez den Mittelpunkt B der einen der beiden parallelen Seiten mit den End-

punkten A und P der anderen parallelen Seite, so erkennt man leicht aus dem Umstand, dass die Strecken CB und CA einerseits und EB und EP andererseits als Radien der Kreise gleich sind, dass sowohl die Gerade BA den Winkel bei A , als auch die Gerade BP den Winkel bei P halbiert. Zieht man durch E eine Parallele zum Radius CA , so schneidet dieselbe AP in einem Punkte S , welcher auf der Peripherie des beweglichen Kreises liegt; denn das Viereck $ACES$ stellt ein Parallelogramm dar, so dass $\overline{ES} = \overline{CA}$, also gleich dem Radius r der beiden Kreise ist; ausserdem ist $\overline{AS} = \overline{CE}$, also gleich dem doppelten Radius $2r$. Die Fortsetzung EE' dieser Parallelen über E hinaus bildet dann mit der Verlängerung EB' des Radius EB denselben Winkel wie der Radius EP , da $\sphericalangle B'EE'$ gleich dem Trapezwinkel an der Ecke A und $\sphericalangle B'EP$ gleich dem Trapezwinkel an der Ecke P ist, und beide die gleiche Grösse u besitzen.

Es liegt nun im Wesen des Abrollens, dass der Übergang des beweglichen Kreises aus der in Fig. 7 gezeichneten Stellung $EBSP$ in eine unendlich benachbarte Stellung einer unendlich kleinen Drehung des Kreises um seinen Berührungspunkt B entspricht. Jeder Punkt dieses Kreises wird sich daher im ersten Moment in einer Richtung weiter bewegen, welche auf seiner Verbindungslinie mit dem instantanen Drehpunkt B senkrecht steht. Diese letztere Verbindungslinie stellt infolgedessen die momentane Normale der Bahnkurve des betreffenden Punktes dar. So steht BE auf dem Bahnkreis des Mittelpunktes des beweglichen Kreises an der Stelle E senkrecht, wie ohne weiteres ersichtlich ist. Es stellt aber auch BP die Normale zu der Bahnkurve des Punktes P , d. h. also zu der Kardioiden an der Stelle P dar; die Tangente an die Kardioiden im Punkte P würde demnach auf BP senkrecht stehen.

Denkt man Fig. 7 um die Gerade $NDA CH_0$ als Achse herumgedreht, so beschreibt der Kreis DE eine Kugelfläche und die Kardioiden AP eine Rotations-Kardioidfläche, welche insbesondere in A eine nach einwärts gehende Spitze besitzt. In jedem Durchschnitte der beiden Flächen mit einer durch die Achse NH_0 gehenden Ebene hat man dann immer wieder die gleichen geometrischen Verhältnisse wie in Fig. 7, welche jetzt ebenfalls als ein solcher Durchschnitt aufzufassen ist.

Es sei nun eine Einrichtung getroffen, welche es einem von der Spitze A der Kardioidfläche ausgehenden Strahle gestattet, ohne Ab-

lenkung bis zu der Kardioidfläche vorzudringen und an der letzteren eine Reflexion zu erfahren; dann wird ein solcher Strahl nach den angegebenen geometrischen Eigenschaften der Kardioiden in seinem Einfallspunkte P gerade in die Richtung PE abgelenkt, da PB das Einfallslot in P darstellt; der Einfallswinkel und Reflexionswinkel besitzen dabei die Grösse $\frac{u}{2}$, falls der Strahl AP gegen die Rotationsachse AH_0 um den Winkel u geneigt ist. Nun soll weiterhin der reflektierte Strahl PE im Punkte E eine abermalige Reflexion an der Aussenseite der Kugelfläche DE erfahren können, dann wird derselbe schliesslich in eine Richtung EE' gebracht, welche der Rotationsachse beider Flächen parallel läuft; Einfallswinkel und Reflexionswinkel haben bei dieser Reflexion die Grösse u , da das Einfallslot im Punkte E der Kugelfläche die Verlängerung des Radius CE darstellt.

Bringt man die durch die doppelte Reflexion entstehende Strahlenrichtung EE' durch Rückwärtsverlängern zum Schnitt mit dem einfallenden Strahl AP , so ergibt sich nach den obigen Betrachtungen, dass der Schnittpunkt S stets den Abstand $2r$ von A besitzt, ganz unabhängig davon, in welcher Richtung der ursprüngliche Strahl von A aus verläuft. Es liegen daher die sämtlichen Schnittpunkte S auf einer Kugelfläche um A als Mittelpunkt mit dem Radius $\varrho = 2r$. Diese Kugelfläche trifft die Achse in den Punkten H_0 und N . Da die von A ausgehenden Strahlen nach der Reflexion sämtlich der Achse parallel laufen, d. h. nach dem unendlich fernen Punkte A' derselben gerichtet sind, so folgt nach dem früher angeführten Kriterium, dass die durch A und A' gehenden konjugierten Strahlenbündel die Sinusbedingung erfüllen. Es ergibt sich weiterhin, dass H_0 den reduzierten Hauptpunkt, die durch H_0 gehende Kugelfläche um A als Mittelpunkt die reduzierte Hauptkugelfläche, A selbst den Brennpunkt F und der Radius $\varrho = 2r$ die Brennweite f des betreffenden optischen Systems darstellt.

Nach dem Prinzip der Umkehrbarkeit der Strahlenwege lassen sich natürlich auch die der Achse parallelen Strahlen in der umgekehrten Richtung EE' als einfallende Strahlen auffassen; dieselben schneiden sich dann nach der doppelten Reflexion an der Aussenseite der Kugelfläche um C und der Innenseite der Kardioidfläche genau im Punkte A , so dass dieser als Bildpunkt des unendlichen fernen Punktes der Achse aufgefasst werden kann, wobei die ab-

bildenden Strahlen wieder dem oben angeführten Kriterium für die Sinusbedingung genügen. Der letztere Strahlengang hat bei dem Kardiodkondensor der Firma Zeiss Verwendung gefunden.

Es ist an der Hand von Fig. 7 leicht ersichtlich, dass man die Kugelfläche mit dem Mittelpunkt C und daher auch die Kardioidfäche nicht in ihrer ganzen Ausdehnung als spiegelnde Flächen verwenden kann, wenn die vom Punkte A ausgehenden bzw. die nach diesem Punkte hinzielenden Strahlen auf ihrem Wege zwischen A und der Kardioidfäche ohne Ablenkung geradlinig verlaufen sollen. Um den in Fig. 7 gezeichneten Strahl AP ungehindert von A nach P gelangen zu lassen, darf z. B. der spiegelnde Teil der Kugelfläche nicht bis an denselben heranreichen. Daher kann immer nur ein verhältnismässig beschränkter Teil des von A ausgehenden Strahlenbündels innerhalb jeder durch die Achse NH_0 hindurchgehenden Ebene der doppelten Reflexion unterworfen werden, so z. B. in Fig. 7 nur alle Strahlen, welche entweder nach der ersten Reflexion an der Kardioidfäche auf Punkte der Kugelfläche auftreffen, die zwischen E und AP fallen, oder falls der spiegelnde Teil der Kugelfläche schon in E aufhört, nur solche Strahlen, welche zwischen AP in Fig. 7 und der Verbindungslinie von A und E liegen. Natürlich würde in derselben Achsenebene noch auf der anderen Seite der Achse ein symmetrisch zu demselben gelegener Teil des Strahlenbündels und überhaupt eine aus dem begrenzten Strahlenbündel in der Ebene der Fig. 7 durch Rotation um die Achse entstehende Strahlenzone in Frage kommen. Bei dem Kardiodkondensor, bei welchem ja die Strahlen in umgekehrter Richtung verlaufen, ist dies dadurch erreicht, dass zwischen A und dem allein für die Reflexion in Betracht kommenden Teil der Kardioidfäche¹⁾ das gleiche Medium angebracht ist, während der zur Reflexion verwendete Teil der Kugelfläche die Grenze zwischen Glas und einem im Innern des Apparates freigelassenen Luftraum darstellt, so wie es Fig. 8 veranschaulicht, in welcher auch die entsprechenden Strahlenbündel in ihrem Verlaufe angedeutet sind. Dass der Kondensor aus zwei Teilen zusammenge kittet werden musste, weil der innere Luftraum sonst nicht herzustellen war, ist für die Wirkungsweise desselben

1) In Wirklichkeit handelt es sich bei demselben gar nicht um eine Kardioidfäche, sondern ebenfalls um eine, der Kardioidfäche allerdings in dem betreffenden Teile sehr nahe kommende Kugelfläche.

belanglos. Es hat auch auf den Strahlenverlauf bis zum Punkte A natürlich nicht den geringsten Einfluss, dass das Medium, in welchem sich die von der Kardiodfläche reflektierten Strahlen bis A fortgepflanzt haben, beim Kardiodkondensor in einer dicht hinter A liegenden, zur Achse senkrechten Ebene (welche sich in Fig. 8 durch eine durchbrochene Linie angedeutet findet) aufhört, um durch die totale Reflexion an dieser ebenen Grenze zu einem dünneren Mittel die Dunkelfeldbeleuchtung zu realisieren.

Fig. 8.

Ausser für einen Kondensor kann das aus Kardiodfläche und Kugelfläche zusammengesetzte katoptrische System jedenfalls noch die mannigfaltigste Verwendung zur Erzeugung eines aplanatischen Strahlenganges finden. Seine Verwendbarkeit wird durch den Umstand sehr gesteigert, dass es gar nicht nötig ist, das an der Kardiodfläche beginnende Medium bis zum Punkte A fortzusetzen. Denn, wie man unmittelbar einsehen wird, braucht man dasselbe ja nur nach A hin durch eine Kugelfläche um A als Mittelpunkt von beliebigem Radius zu begrenzen, damit die Strahlen beim Austritt keine Brechung erfahren. Bei geeigneter Wahl des Radius dieser Begrenzungsfläche kann sich dieselbe direkt aussen an die verwendete Zone der spiegelnden Kugelfläche (mit dem Mittelpunkte C in Fig. 7) anschliessen. Man erhält dann z. B. einen Glaskörper, welcher durch Rotation der schraffierten Fläche in Fig. 9 hervorgebracht

werden kann; natürlich muss man etwa durch Versilbern der ganzen Calotte der spiegelnden Kugelfläche dafür sorgen, dass nur in der zu der Kugelfläche um den Mittelpunkt A gehörenden Zone Strahlen von A in das System eintreten bzw. nach A gerichtete Strahlen aus demselben austreten können. Man kann also auf diese Weise die von einem in Luft befindlichen leuchtenden Punkte A ausgehenden Strahlen einer bestimmten Randzone genau parallel machen, bzw. parallele Strahlen, welche einer bestimmten ringförmigen Zone angehören, zu einer exakt aplanatischen Vereinigung in einem Punkte in Luft bringen.

Fig. 9.

Wie gross die Öffnung der von A ausgehenden Zone, d. h. die Öffnung eines jeden der beiden symmetrisch zur Achse gelegenen Strahlenbüschel innerhalb einer Achsenebene höchstens sein kann, lässt sich leicht berechnen. Ist in Fig. 7 AP der äusserste Strahl des Büschels, so würde der gegen die Achse am wenigsten geneigte Strahl höchstens in die Richtung AE fallen können. Der maximale Öffnungswinkel α des Strahlenbüschels stellt sich also in Fig. 7 als der Winkel dar, welchen die Diagonale AE des Parallelogramms $ACES$ mit der Seite AS bildet. Da der Winkel an der Ecke A den Achsenwinkel u des äussersten Strahles AP darstellt, und die Seiten AC und AS des Parallelogramms bzw. die Längen r und $2r$ besitzen, so gelangt man unter Anwendung des Sinussatzes und Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie ohne Mühe zu der Formel für α :

$$\sin \alpha = \frac{\sin u}{\sqrt{5 + 4 \cos u}}$$

Aus dieser Formel ist zunächst zu ersehen, dass die maximale Öffnung α des verwendbaren Strahlenbüschels bzw. der Strahlenzone von den Dimensionen des optischen Systems unabhängig ist; ferner erkennt man, dass sie mit dem Achsenwinkel u des äussersten Randstrahles immer mehr zunimmt; denn bei Vergrösserung von u wird der Zähler des Bruches grösser und der Nenner kleiner. In der folgenden Tabelle finden sich für alle um je 5° voneinander verschiedenen Werte von u zwischen 0° und 90° die zugehörigen, nach der obigen Formel berechneten Öffnungswinkel auf Winkelminuten abgerundet angegeben:

u	α	u	α	u	α
0°	$0^\circ 00'$	35°	$11^\circ 30'$	70°	$21^\circ 51'$
5°	$1^\circ 40'$	40°	$13^\circ 5'$	75°	$23^\circ 9'$
10°	$3^\circ 20'$	45°	$14^\circ 38'$	80°	$24^\circ 22'$
15°	$4^\circ 59'$	50°	$16^\circ 10'$	85°	$25^\circ 31'$
20°	$6^\circ 38'$	55°	$17^\circ 39'$	90°	$26^\circ 34'$
25°	$8^\circ 16'$	60°	$19^\circ 6'$		
30°	$9^\circ 54'$	65°	$20^\circ 30'$		

In Wirklichkeit werden die Öffnungswinkel bei der Verwendung eines Kardioidsystems etwas kleiner als die angegebenen Werte sein müssen, damit sich der der Achse am nächsten liegende Randstrahl AP und der an der Kardioidfläche reflektierte Strahl des äussersten Randstrahles nicht stören können. Immerhin sieht man aus der Tabelle deutlich, dass sich ein derartiges katoptrisches System nur für Randstrahlen gut eignet, deren Neigung gegen die Achse nicht zu klein ist.