Nunmehr dürfte wohl auch die Entwicklung der Totalreflexion der anisotropen Medien für die Anhänger der Neumann'schen Grundvorstellung ein erhöhtes Interesse gewinnen; dieselbe wird eben für die Leistungsfähigkeit des „vollständigen Kirchhoffschen Princips“ die schärfste Probe abgeben.

Bonn, im April 1884.

VI. *Duplik gegen Hrn. W. Voigt;
von E. Ketteler.*

Hr. Voigt hat meiner Erwiderung¹⁾ eine Duplik²⁾ folgen lassen, die ich im Folgenden in möglichster Kürze besprechen werde, ohne freilich zu erwarten, dass Hr. Voigt selbst sich dadurch „zur Aufgabe irgend eines seiner Bedenken veranlasst sehen werde.“

Indem ich zunächst bemerke, dass die folgenden Zeilen für die Beurtheilung der Reflexionstheorien Fresnel's und Neumann's einige neue Gesichtspunkte enthalten, folge ich einzeln den von ihm aufgeführten Punkten; es sind ihrer sieben.

1) Wenn Hr. Voigt bezüglich der Constitution der Materie die Anschauungen der Hrn. v. Helmholtz, Lommel sowie die meinige derart zurechtlegt, dass dieselben z. B. auf die Gase der kinetischen Theorie nicht mehr zu passen scheinen, so ist das scheinbar, und dürfte insbesondere ein Einblick in die astronomische Undulationstheorie vor derartigen Täuschungen schützen. Ich nenne die Molecüle der Chemie durchweg schwingungsfähige Atomgebilde und unterscheide an ihnen folglich Punkte, die in relativer Ruhe, und solche, die in relativer Bewegung sind.

---

1) Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 178. 1884.

2) Voigt, Wied. Ann. **21.** p. 534. 1884.

2) Ich habe bewiesen, dass die von Hrn. Voigt anfänglich aufgestellten, später freilich aufgegebenen allgemeinen Bewegungsgleichungen als solche falsch sind, weil sie auf einer unrichtigen Handhabung des Reactionsprinzips beruhen. Hr. Voigt erklärt diesen meinen Beweis für unrichtig, weil — Aether- und Körpertheilchen nicht ineinander verwandelbar sind. Er erklärt also damit die vielfach gehegte Ansicht, die ponderable Materie sei nicht essentiell vom Aether verschieden, für irrig. Keinenfalls aber dürfte es angehen, selbst einen mathematischen Beweis von dieser Möglichkeit abhängig zu machen.

Eigenthümlich ist übrigens die Meinung Hrn. Voigt's, dass alles, was ich zur allgemeinen Aufklärung gegen sein System vorbringe, ausschliesslich im Interesse und zum „Aufhelfen“ meiner eigenen Theorie dienen müsse.

3) Wenn ich speciell infolge der Anregungen, die ich Hrn. Voigt verdanke, in die glückliche Lage gekommen bin, meine Differentialgleichungen vervollständigen zu können, und dadurch jetzt näher auf den eigentlichen Grund der Erscheinungen einzugehen vermag, so würde ich für diese Anregungen doppelt dankbar sein, wenn sie nicht mit einer so unerfreulichen Polemik verbunden wären. Diese meine Erklärung besagt freilich nicht, dass meine jetzige Auffassung mit meiner früheren in directem Widerspruch steht, sondern nur, dass dieselbe durch die eingeführten Zusatzglieder mehr leistet als die frühere. In der That werden in der ersten der Differentialgleichungen (13)¹⁾, solange man dieselbe auf ganz kurze Wellen bezieht, die beiden hinzugefügten Glieder der rechten Seite überflüssig, und geht dieselbe dadurch im wesentlichen in die ältere Form zurück.

4) Hiernach komme ich zur Reflexionstheorie und werde bei derselben etwas ausführlicher verfahren.

a) In Betreff der Fresnel'schen Formeln macht Hrn. Voigt neben der aus dem Incompressibilitätsprincip ableitbaren Grenzbedingung der Normalcomponenten:

---

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 205. 1884. Die dort hinzugefügte Anmerkung stellt sich auch für die Optik als wichtiger heraus, als damals angenommen ist.

$$\sum \zeta_1 n_1 \cos r_1 = \zeta_2 n_2 \cos r_2$$

die auf dieselben Componenten bezügliche, aber mit jenem Princip nicht direkt in Verbindung stehenden Form:

$$\sum \zeta_1 n_1 = \zeta_2 n_2$$

mehrfache Schwierigkeit. Die erste dieser Gleichungen ergibt sich für $\eta = 0$ ohne weiteres aus der Fresnel-Neumann'schen Continuitätsbedingung: $\sum \xi_1 = \xi_2$, die ja in Rücksicht auf das Huygens'sche Princip auch $\sum (d\xi_1/dx = d\xi_2/dx)$ geschrieben werden kann, und die dann unter Benutzung der Incompressibilitätsgleichung übergeht in:

$$(1) \quad \sum \frac{d\zeta_1}{dz} = \frac{d\zeta_2}{dz}.$$

b) Was dagegen die zweite der obigen Gleichungen betrifft, so hat Hr. Voigt die mehr negative als positive Form $\sum \zeta_1 \cong \zeta_2$ derselben, die ich einmal lediglich im Gegensatz zur Neumann'schen Forderung:

$$\sum \zeta_1 = \zeta_2$$

gebraucht habe, aus ganz befremdlichen Gründen mit der Annahme der gleichen Dichte und der Incompressibilität des Aethers unvereinbar erklärt. Ich habe darauf nur kurz, aber wohl verständlich, geantwortet, dass ich nicht begreife, wie man derartiges aus dem Incompressibilitätsprincip folgern könne, und jetzt nun muss ich geradezu darüber staunen, dass ich „dieses Princip nicht überall anerkennen soll (ob mit Nebengedanken über seine strenge Gültigkeit oder nicht, sei gleichgültig), sondern nur wo es mir passe“ (!). Der dann folgende Beweis der erwähnten Neumann'schen Grenzgleichung als Consequenz des Incompressibilitätsprincips ist aber falsch, sofern von den drei Componenten ξ , η , ζ der bekannten Gleichung:

$$(2) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

ξ und η ausser Acht gelassen werden, während doch bei allen vorkommenden Erscheinungen mindestens etwa ξ und ζ zusammengehören. Wenn allerdings für den Grenzfall der

streifenden Incidenz und bei Schwingungen parallel der XZ -Ebene als der Einfallsebene $\xi = 0$ zu werden scheint, so bleibt dennoch die obige Gleichung erfüllt, da dann bei endlichem ζ der Factor $\cos r$ gleich Null wird.

Wie sehr und unbedingt ich meinerseits das in der Reflexionstheorie der absorbirenden Medien von mir zu Ehren gebrachte Incompressibilitätsprincip anerkenne, geht doch auch wohl daraus hervor, dass ich der obigen Gleichung für den Aether eine ganz gleiche für die Körpertheilchen hinzugefügt habe.¹⁾

c) Es soll jetzt bewiesen werden, dass die neueste Form der von Hrn. Voigt aufgestellten Reflexionstheorie, die sich als eine die Dispersion berücksichtigende Verbesserung der Neumann'schen Theorie ankündigt, in Wirklichkeit ein Aufgeben ihrer Folgerichtigkeit ist. Des Leser möge dabei entscheiden, inwieweit die mir p. 539 von Hrn. Voigt vorgeworfenen „Wandelungen“ sich auch in seinen eigenen Arbeiten nachweisen lassen. Bevor ich indess den angedeuteten Versuch mache, habe ich einen Hülfsatz zu besprechen.

Zu dem Ende erinnere ich an die vier folgenden Grenzgleichungen, die, wie ich²⁾ früher erwiesen habe, die specielle Theorie Fresnel's und Neumann's in sich einschliessen. Sie lauten bei beliebiger Lage der X - und Y -Axe:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \sum \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\eta_2}{dt} \\ B_1 \sum \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) = B_2 \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ B_2 \sum \left(\frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dy} \right) = B_2 \left(\frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dy} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{array}$$

Ich habe sie bei jenem Anlass als vier zusammengehörige, sich gegenseitig ergänzende Beziehungen in aller Strenge aus einer einzigen Formel abgeleitet, die einer Formel Hrn. Kirch-

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 647. 1883. Ferner: 21. p. 207. 1884.

2) Ketteler, l. c. 21. p. 633. 1883.

hoff's nachgebildet ist, welche seitdem von Hrn. Voigt kurz das „Kirchhoff'sche Princip“ genannt wird.

Auch Hr. Voigt erkennt diese Gleichungen als richtig an und braucht dieselben, wenngleich in viel verwickelterer, äusserer Gestalt, die freilich sich mehr an Kirchhoff's Arbeit anschliesst, als an die meinige. Legen wir uns jetzt die Frage vor: Welches ist die mit den vier vorstehenden Gleichungen verträgliche Form der Grenzbedingung der Normalcomponenten?

Obwohl ich schon mehrfach darauf hingewiesen habe, dass die anscheinend von Cauchy herrührende Verquickung der Grenzgleichungen der Elasticität mit dem Huygens'schen Princip durch nichts begründet sei, und dass somit das eine dem anderen coordinirt und nicht subordinirt sei, so bezieht nichtsdestoweniger Hr. Voigt in herkömmlicher Weise seine Uebergangsbedingungen nicht auf den (allerdings beliebigen) Coordinatenanfangspunkt, sondern auf die ganze Ebene $z = 0$. Hat das zwar für durchsichtige Medien keine directen üblen Folgen, so trübt es doch die logische Consequenz. Es sei also nochmals constatirt, dass die obigen Gleichungen zunächst nur gelten sollen für den Punkt $x=y=z=0$.

Supponiren wir jetzt der Kürze halber den Fall, dass es sich um Parallelschwingungen zur Einfallsebene handle, sodass die $\eta = 0$ sind und sich einfach schreiben lässt:

$$\sum \xi_1 = \xi_2, \quad B_1 \sum D_1 = B_2 D_2,$$

unter D die Drehcomponente in der Einfallsebene verstanden.

Der Umstand nun, dass der Coordinatenanfangspunkt beliebig ist, und dass folglich die vorstehende Gleichheit der Ausschläge und Drehcomponenten für alle Punkte der X -Axe gleichzeitig zutrifft, lässt sich für die oben aufgeworfene Frage analytisch verwerthen. Betrachten wir einen vom Coordinatenanfang um Δx abstehenden Punkt, so werden offenbar für ihn die Grenzbedingungen gelten:

$$\sum \left(\xi_1 + \frac{d\xi_1}{dx} \Delta x \right) = \xi_2 + \frac{d\xi_2}{dx} \Delta x$$

$$B_1 \sum \left(D_1 + \frac{dD_1}{dx} \Delta x \right) = B_2 \left(D_2 + \frac{dD_2}{dx} \Delta x \right).$$

Wir haben folglich die vier verträglichen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum \xi_1 &= \xi_2, & \sum \frac{d\xi_1}{dx} &= \frac{d\xi_2}{dx} \\ B_1 \sum \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) &= B_2 \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ B_1 \sum \frac{d \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right)}{dx} &= B_2 \frac{d \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right)}{dx} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Der zweiten derselben ist schon oben gedacht worden. Was jetzt die vierte betrifft, so soll dazu der beiderseits identisch gleiche Ausdruck:

$$- B_1 \sum \frac{d \left(\frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dz} \right)}{dz} = - B_2 \frac{d \left(\frac{d\xi_2}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dz} \right)}{dz}$$

als Ausdruck des Incompressibilitätsprinzips addirt werden. Es kommt dann:

$$(4) \quad B_1 \sum \left(\frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_1}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} \right) = B_2 \left(\frac{d^2 \zeta_2}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_2}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} \right),$$

sofern wir nämlich die Glieder $d^2 \zeta / dy^2$, die im allgemeineren Falle eine eben solche Verschiebung des Einfallspunktes in der Richtung der Y -Axe zuwege bringt, gleich hinzufügen. Diese so erwiesene Gleichung habe ich schon in einem älteren Aufsatz¹⁾, ohne sie freilich damals auch theoretisch zu begründen, empirisch abgeleitet; sie mag jetzt den Gleichungen (3) als eine Art Ergänzung hinzugefügt werden.

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$B_1 = B_2,$$

so ergibt die Substitution der Schwingungsausdrücke die Fresnel'schen Formeln. Setzt man dagegen:

$$B_1 : B_2 = \frac{1}{n_1^2} : \frac{1}{n_2^2},$$

so erhält man die Formeln Neumann's.

Was insbesondere die letzte Gleichung (4) betrifft, so führt dieselbe unter der ersten Annahme zur Forderung:

$$\sum \zeta_1 n_1 = \sum \zeta_2 n_2,$$

unter letzterer Annahme dagegen zu:

$$\sum \zeta_1 = \sum \zeta_2.$$

1) Ketteler, Wied. Ann. 1. p. 220. 1877.

Handelt es sich insbesondere auf dem Standpunkte Fresnel's um genäherte streifende Incidenz, sodass für $\eta = \xi = 0$ Gleichung (4) geschrieben werden kann:

$$\sum \frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} = \frac{d^2 \zeta_2}{dx^2},$$

so besagt dieselbe, dass die Krümmung der aneinander anstossenden Grenzschichten beider Medien in jedem Augenblick gleich ist. Dasselbe gilt für die Incidenzen der Totalreflexion.

d) Hat sonach die vorstehende Entwicklung dargethan, dass die strenge Neumann'sche Theorie für den Hauptfall $\eta = 0$ zu den Uebergangsbedingungen führt:

$$(5) \quad \Sigma \zeta_1 = \zeta_2, \quad \frac{1}{n_1^2} \Sigma D_1 = \frac{1}{n_2^2} D_2,$$

so stellen wir diesen nunmehr die von Voigt gewollten gegenüber. Letztere haben zur Zeit die Form¹⁾:

$$(6) \quad \begin{cases} M_1 \Sigma \zeta_1 = M_2 \zeta_2, & B_1 \Sigma D_1 = B_2 D_2 \\ \frac{1}{n_1^2} = \frac{B_1}{M_1}, & \frac{1}{n_2^2} = \frac{B_2}{M_2}. \end{cases}$$

Dieselben sind folglich nur dann mit den strengen Neumann'schen Gleichungen und folglich auch nur dann unter einander verträglich, wenn gesetzt wird: $M_1 = M_2$. Nun hat Hr. Voigt aus seiner Dispersionstheorie die Ausdrücke abgeleitet:

$$B_1 = e_1 + a_1 - \frac{a_1'}{\tau^2}, \quad M_1 = m_1 + r_1 - n_1 \tau^2,$$

$$B_2 = e_2 + a_2 - \frac{a_2'}{\tau^2}, \quad M_2 = m_2 + r_2 - n_2 \tau^2,$$

worin τ der Schwingungsdauer proportional ist. Und wenn er auf Grund der Erfahrung die vereinfachende Annahme macht, dass $M_1 = M_2$, so ist damit seine Reflexionstheorie und insbesondere seine Grenzbedingung:

$$\Sigma M_1 \zeta_1 = M_2 \zeta_2$$

zu einer empirischen und ganz und gar willkürlichen geworden, die, wie Hr. Voigt mir p. 536 vorwirft, „nur aufgestellt

1) Voigt, Göttinger Nachr. Febr. 1884. p. 50.

ist, um die von ihm gewünschten Ausdrücke zu geben.“ Dann darf man aber auch (p. 540) „derartige Gleichungen nicht als eine strenge Theorie hinstellen, am wenigsten wenn sie sich mit erprobten allgemeineren Gesetzen in Widerspruch befinden.“

Der Voigt'sche Uebergang von der strengen Neumann'schen Gleichung $\Sigma \zeta_1 = \zeta_2$ zur vorstehenden hat sich mittelst der Durchgangsform:

$$m_1 \Sigma \zeta_2 = m_2 \zeta_3$$

vollzogen, worin m_1 , m_2 die bezüglichen Aetherdichtigkeiten bedeuten, eine natürlich ebenso falsche Gleichung, die seiner Zeit¹⁾ durch den Satz motivirt wurde: „Bekanntlich nimmt man an, dass die Normalcomponenten sich in unmerklicher Entfernung von der Grenze umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten.“ Hr. Voigt scheint zwar diese Widersprüche gelegentlich selbst gefühlt zu haben, in ihren tieferen Grund aber nicht eingegangen zu sein.

5) Nach diesem Zusammenbruch der „Pfeiler seiner Theorie“ verlieren die weiteren Monita stark an Interesse. Da Hr. Voigt in seiner ersten Kritik sechs Continuitätsgleichungen, nämlich solche für die Aethertheilchen und solche für die Körpertheilchen, getrennt aufgestellt, und ich die letzteren aus dem Grunde verworfen hatte, weil sie im Falle des Lichtüberganges vom freien Aether aus ein Mitschwingen der Körpertheilchen unmöglich machten, so schliesst Hr. Voigt diese missliche Consequenz jetzt mit den Worten aus: „Bekanntlich werden dann die Verrückungscomponenten der Körpertheilchen unbestimmt.“

6) Was sodann die Besprechung des Kirchhoff'schen Principis und seinen Zusammenhang mit den Gleichungen der potentiellen und kinetischen Energie betrifft, so hat er von meiner Erwiderung nicht hinlänglich Notiz genommen. Wenn ich mir vorstelle, dass ein brechender Körper abwechselnd aus unendlich dünnen Schichten freien Aethers und aus solchen, die zugleich ponderable Materie enthalten,

---

1) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 900. 1883.

bestehe, so will Hr. Voigt „kein Wort über diese Annahme verlieren.“ Er vergisst dabei leider nur, dass der Flächenraum dieser Schichten auch nur unendlich klein zu sein braucht, und dass die rationelle Reflexionstheorie (abgesehen von dem von ihr vorausgesetzten Huygens'schen Princip) mit unendlich engen „Strahlcylindern“ auskommt. Im übrigen liegen diese Vorstellungen so sehr in der neueren Dispersionstheorie begründet, dass auch die Herren Sellmeier, v. Helmholtz und Lommel sie mit mir theilen werden.

Was schliesslich das „Merkwürdige“ betrifft, dass ich eine Formulirung des so oft von mir citirten Principis der Energie nirgends gegeben haben soll, so will ich zunächst die Gleichung:

$$(7) \quad B_1 \sin e \cos e (A_2 \xi_E \cdot d\xi_E - A_2 \xi_R \cdot d\xi_R) = B_2 \sin r \cos r A \xi_D \cdot d\xi_D$$

als Ausdruck für das Princip der Erhaltung der Aetherarbeit oder genauer der potentiellen Energie desselben nochmals hinschreiben. Wenn Hr. Voigt dann in dieselbe den aus der folgenden Beziehung¹⁾:

$$(8) \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} d\xi + m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} d\xi' = e A_2 \xi d\xi + \beta m' \xi' d\xi - \alpha \xi' d\xi',$$

sich ergebenden Werth von $e A_2 \xi d\xi$ für beide Medien einführt, so gewinnt er damit diejenige Gleichung, die für $\xi' = 0$ mit den Gleichungen der lebendigen Kräfte von Fresnel und Neumann (dieselben auf die kinetischen Energien bezogen gedacht) übereinstimmt.

7) Die von Hrn. Kirchhoff gegebene Entwicklung, die seit meiner Heranziehung derselben von Voigt adoptirt ist, befindet sich in einer Arbeit über die Krystallreflexion und bezieht sich sonach ursprünglich nur auf diese. Da nun die Differenzen zwischen den beiden (früher gleich berechtigten) Reflexionstheorien für anisotrope Medien weit schroffer hervortreten als für isotrope, so muss bei ersteren jede Verwerthung einer bestimmten Idee sofort je nach der Grundanschauung zu gänzlich verschiedenen Gestaltungen führen.

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 203. 1884.

Es ist also willkürlich, meine Grenzgleichungen (3) darum anzugreifen, weil sie im Gegensatz zu den Neumann'schen für anisotrope und isotrope Medien identisch sind.

Nach Erledigung dieser sieben Punkte will ich mich bei dem mir schliesslich gemachten Vorwurfe der „Wandelungen“ in meiner Theorie (p. 539) nicht lange aufhalten. So lange „Wandelung“ und „stetige Verbesserung“ sich deckende Begriffe sind, bleibt jene eben ein Attribut des menschlichen Fortschreitens, nur muss sie sich natürlich hüten, in Ueberstürzung umzuschlagen.

Hiermit wird es hoffentlich der Polemik genug sein.

Bonn, im März 1884.

**VII. Ueber die Verzögerung, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine Platte eintritt, und über einige darauf gegründete Apparate;
von W. Voigt.**

Es sei eine Schicht von der Dicke l eines beliebigen Mediums (1), welchem eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_1 entspricht, gegeben; aus einem angrenzenden Medium (0) mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω falle eine ebene Lichtwelle unter einem Winkel gegen das Einfallslot ein, dessen Sinus und Cosinus α und γ ist, und pflanze sich in der Schicht (1) in einer Richtung fort, die durch α_1 und γ_1 definiert ist. Dann setzt man den Unterschied der Phase, den die Welle nach dem Durchgang durch die Schicht an einer beliebigen Stelle gegenüber einer frei fortgepflanzten Welle besitzt, gewöhnlich ¹⁾:

$$\Delta = \frac{l}{v\gamma_1} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\gamma\gamma_1 + \alpha\alpha_1}{\omega} \right),$$

worin $2\pi\tau = T$ die Schwingungsdauer ist. Speciell bei senkrechtem Einfall wird dies:

---

1) Vgl. z. B. Quineke, Pogg. Ann. 132. p. 205. 1867.