Diese jedenfalls sehr bemerkenswerthe Uebereinstimmung dürfte jedoch nur erst dann als ein vollgültiger Beweis für die Anwesenheit von Eisendämpfen in der Atmosphäre zu betrachten seyn, wenn es gelungen ist, analoge Modificationen der relativen Helligkeitsverhältnisse im Eisenspectrum durch Temperatur- und Dichtigkeitsänderungen durch Beobachtung nachzuweisen, um auf diese Weise das Auftreten relativ sehr schwacher, dagegen das Fehlen gerade der intensivsten Eisenlinien im Nordlichtspectrum erklären zu können.

Viel wahrscheinlicher wird es daher vorläufig bleiben, das *Nordlichtspectrum* als eine *Modification des Luftspectrums* anzusehen, da wir bei Gasen die Veränderlichkeit der Spectra durch Druck- und Temperaturverhältnisse bereits kennen und eine jedenfalls ebenso sichere Uebereinstimmung des fraglichen Spectrums mit den Spectren atmosphärischer Gase weiter oben gezeigt wurde.

VI. Ueber den Zusammenhang des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie mit dem Hamilton'schen Princip; von R. Clausius.

Veranlaßt durch eine kürzlich von mir veröffentlichte Abhandlung ¹⁾ hat Hr. Szily eine interessante Betrachtung über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie angestellt ²⁾, worin er zu dem Resultate gelangt, daß die Gleichung, welche diesen Satz ausdrückt, sich als unmittelbare Folge aus dem Hamilton'schen Princip ableiten lasse.

1) Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, und diese Ann. Bd. 142, S. 433.

2) Diese Ann. Bd. 145, S. 295.

Daß der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie mit dem Satze von der kleinsten Wirkung zusammenhängt, ist auch von mir und, wie ich nachträglich erfahren habe, schon früher von Boltzmann¹⁾ ausgesprochen. Dieser Zusammenhang wird, wie Hr. Szily ganz richtig hervorhebt, noch auffälliger, wenn man den von Hamilton gegebenen erweiterten Ausdruck des Satzes von der kleinsten Wirkung anwendet.

Man darf dabei aber die Hamilton'sche Gleichung nicht in der Form nehmen, in welcher sie gewöhnlich in den Lehrbüchern der Mechanik angeführt wird, und sich z. B. in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik S. 58 findet. Sey nämlich für ein System materieller Punkte, deren Bewegung unter dem Einflusse von Kräften stattfindet; die eine Kraftfunction oder ein Ergal haben, die lebendige Kraft mit T und das Ergal mit U bezeichnet, in dem Sinne, daß die Summe $T + U$ constant ist, dann ist die gewöhnlich angeführte Form der Hamilton'schen Gleichung:

$$(1) \quad \delta \int (T - U) dt = 0.$$

Damit diese Gleichung richtig sey, muß die durch δ angedeutete Variation so verstanden werden, daß man beim Variiren von der Veränderung der Zeit absieht, obwohl in der Wirklichkeit die veränderte Bewegung, auf welche die Variation sich bezieht, nicht blos in Betreff der Coordinaten und Geschwindigkeiten, sondern auch in Betreff der Zeit, in der sie vor sich geht, von der ursprünglichen Bewegung verschieden ist.

Versteht man dagegen das Variationszeichen δ in dem sonst gewöhnlich angenommenen Sinne, daß es die ganze Veränderung der variirten GröÙe andeutet, so muß die Gleichung lauten:

$$\delta \int (T - U) dt + (T + U) \delta \int dt = 0,$$

oder, wenn man die Zeitdauer, auf welche die Integration

1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 53.

sich bezieht, mit i bezeichnet, und für die Summe $T + U$, also für die *Energie* des Systems, das Zeichen E einführt:

$$\delta \int_0^i (T - U) dt + E \delta i = 0.$$

Dieselbe Gleichung läßt sich, wie man leicht sieht, auch in folgende, noch einfachere Form bringen:

$$(2) \quad 2 \delta \int_0^i T dt = i \delta E.$$

Dieses ist die von Szily benutzte Hamilton'sche Gleichung, welche den Satz von der kleinsten Wirkung bei veränderlicher Energie ausdrückt. Sie stimmt mit der von Boltzmann angewandten und in der oben citirten Abhandlung unter (23a) mitgetheilten Gleichung überein, wenn man unter der von ihm mit ϵ bezeichneten GröÙe nicht bloß die zugeführte lebendige Kraft, sondern, seiner späteren Erläuterung gemäß, die Vermehrung von lebendiger Kraft und Arbeit versteht, und ihr demnach dieselbe Bedeutung beilegt, wie der in (2) vorkommenden Variation δE .

Szily leitet nun aus der Gleichung (2) in höchst einfacher Weise eine andere Gleichung ab, welche er mit derjenigen, die den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ausdrückt, als gleichbedeutend ansieht. In dieser Beziehung muß ich nun aber sagen, daß seine Entwicklung mir zu einfach zu seyn scheint, indem darin wesentliche Schwierigkeiten unerwähnt und ungelöst geblieben sind.

Von derjenigen mechanischen Gleichung, welche ich in meiner eingangs erwähnten Abhandlung aufgestellt und angewandt habe, spricht er (auf S. 300) so, als ob sie schon in der Hamilton'schen Gleichung enthalten sey. Das ist aber gar nicht möglich, indem meine Gleichung eine allgemeinere Anwendbarkeit besitzt, als die Hamilton'sche. Diese letztere setzt nämlich als nothwendige Bedingung voraus, daß das Ergal bei der veränderten Be-

wegung noch durch dieselbe Function der Raumcoordinaten dargestellt werde, wie bei der ursprünglichen Bewegung, während meine Gleichung auch dann gültig bleibt, wenn die das Ergal darstellende Function der Coordinaten eine Aenderung erleidet. Als einfachsten Fall der Art kann man annehmen, daß die Function außer den Coordinaten noch eine Gröfse enthalte, welche bei den Bewegungen constant bleibt. Dann setzt die Hamilton'sche Gleichung voraus, daß diese Gröfse bei der veränderten Bewegung denselben Werth habe, wie bei der ursprünglichen Bewegung; meine Gleichung dagegen gestattet eine Veränderung des Werthes dieser Gröfse.

Ich habe diesen Unterschied der beiden Gleichungen schon einmal in einem auf die Boltzmann'sche Arbeit bezüglichen Aufsätze ¹⁾ auseinandergesetzt, und habe dort näher nachgewiesen, in wiefern die Hamilton'sche Gleichung für einen solchen Fall, wo das Ergal eine von der Aenderung der Coordinaten unabhängige Veränderung erleidet, unrichtig werden würde.

Der Irrthum, daß meine Gleichung sich aus der Hamilton'schen ableiten lasse, scheint mir daraus entstanden zu seyn, daß Hr. Szily die von mir angewandte Bezeichnungsweise nicht ganz richtig verstanden hat.

Zur bequemerer Erläuterung der Sache wollen wir uns hier auf die Betrachtung eines einzelnen beweglichen Punktes beschränken. Es sey also ein materieller Punkt von der Masse m gegeben, welcher bei der ursprünglichen Bewegung eine geschlossene Bahn beschreibe oder sich zwischen zwei gegebenen Punkten bewege. Bei der veränderten Bewegung beschreibe er ebenfalls eine geschlossene Bahn, oder bewege sich zwischen zwei Punkten, welche letzteren entweder mit den früher gegebenen identisch seyen, oder, wenn das nicht der Fall ist, die Bedingung erfüllen, daß die Gröfse

$$\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z$$

1) Diese Ann. Bd. 144, S. 268.

am Endpunkte der Bewegung denselben Werth habe, wie am Anfangspunkte ¹⁾. Wenn wir dann für die Zeitdauer der Bewegung und die Energie die Buchstaben i und E beibehalten, und die Geschwindigkeit des Punktes mit v bezeichnen, und wenn wir ferner bei veränderlichen Gröſſen den Mittelwerth durch einen darüber gesetzten waagrechten Strich andeuten, so können wir der unter (2) angeführten Hamilton'schen Gleichung folgende Form geben:

$$(2_a) \quad \delta (m \overline{v^2} i) = i \delta E.$$

Meine Gleichung habe ich bei ihrer ersten Aufstellung ²⁾ so geschrieben:

$$(3) \quad \delta \overline{U} = \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + m \overline{v^2} \delta \log i.$$

Dabei habe ich aber den Buchstaben U dort nicht als ein allgemein gültiges Zeichen für das Ergal angewandt, sondern habe ausdrücklich gesagt, daß er nur das Ergal für die ursprüngliche Bewegung bezeichnen solle. In einem späteren Aufsatze ³⁾ habe ich, um den Unterschied recht deutlich hervorzuheben, die Gleichung in folgender Form geschrieben:

$$(3_a) \quad \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z = \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + m \overline{v^2} \delta \log i,$$

- 1) Sollte die letztere Bedingung nicht erfüllt seyn, so müſte noch die Differenz

$$\left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right)_1 - \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right)_0,$$

worin die Indices 0 und 1 den Anfangs- und Endwerth der Gröſſe andeuten, in den nachfolgenden Gleichungen vorkommen. Für unsere Betrachtungen genügt aber die einfachere Form der Gleichungen, welche der Annahme entspricht, daß die Differenz Null sey.

- 2) Sitzungsber. der Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde. 1870, S. 174 und diese Ann. Bd. 142, S. 442.
 3) Ueber die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum oder zweier materieller Punkte um einander; Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. 1871, S. 248 und Math. Ann. von Clebsch u. Neumann Bd. 4, S. 232.

und habe dann hinzugefügt: „Die Summe

$$\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z$$

darf nicht ohne Weiteres als die Variation des Ergals betrachtet werden, und darf daher, wenn man U die Bedeutung beilegt, daß es nicht nur für die ursprüngliche, sondern auch für die veränderte Bewegung das Ergal darstelle, nicht ohne Weiteres mit δU bezeichnet werden.“

Nehmen wir z. B. den oben besprochenen Fall an, daß die Function U außer den Coordinaten noch eine Größe c enthalte, welche bei jeder Bewegung constant sey, aber von einer Bewegung zur anderen ihren Werth ändern könne, so ist diejenige Aenderung des Ergals, welche durch die Aenderung von c veranlaßt wird, in der obigen Summe nicht enthalten. Man kann daher in diesem Falle statt (3_a) schreiben:

$$(3_b) \quad \delta \bar{U} - \frac{d\bar{U}}{dc} \delta c = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \log i,$$

wodurch die charakteristische Eigenthümlichkeit der Größe, welche an der linken Seite meiner Gleichung steht, noch deutlicher hervortritt.

Um die drei zusammengehörigen mechanischen Gleichungen, um welche es sich bei den neueren Betrachtungen über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie handelt, in Bezug auf ihre Anwendbarkeit bequem unter sich vergleichen zu können, wird es vielleicht zweckmäßig seyn, die Unterschiede, welche zwischen ihnen herrschen, noch einmal übersichtlich zusammenzustellen. Die Gleichung, welche den Satz von der kleinsten Wirkung in seiner ursprünglichen Form ausdrückt, und welche nach unserer Bezeichnungsweise lautet:

$$(4) \quad \delta (m \bar{v}^2 i) = 0,$$

setzt voraus, daß sowohl das Ergal durch eine unveränderliche Function der Coordinaten dargestellt werde, als auch die Energie einen unveränderlichen Werth habe. In der Hamilton'schen Gl. (2_a) wird für das Ergal ebenfalls

eine unveränderliche Function vorausgesetzt, aber die Energie kann sich ändern. In meiner Gleichung endlich ist sowohl eine Aenderung der Energie, als auch eine Aenderung der das Ergal darstellenden Function zulässig.

Die letztere Verallgemeinerung war für die Anwendung der Gleichung auf die Wärmetheorie durchaus nothwendig, weil bei den dort in Betracht kommenden Zustandsänderungen eines Körpers Veränderungen der wirksamen Kräfte vorkommen, die von den räumlichen Aenderungen unabhängig sind, und sich nicht durch ein Ergal von unveränderlicher Form darstellen lassen.

Außer diesem Umstande kommen in den in der Wärmelehre zu betrachtenden Fällen noch andere Schwierigkeiten vor, welche die unmittelbare Anwendung der Hamilton'schen Gleichung (2) unzulässig machen.

Die Gleichung (2) setzt voraus, daß alle in dem betrachteten Systeme vorkommenden materiellen Punkte zu ihrer Bewegung eine gemeinsame Zeit t gebrauchen, welche sich bei der Veränderung der Bewegung für alle Punkte in gleicher Weise ändert. Denken wir uns nun aber einen Körper als ein System von sehr vielen bewegten materiellen Punkten, und machen selbst die vereinfachte Annahme, daß alle Punkte sich in geschlossenen Bahnen bewegen, so dürfen wir doch nicht voraussetzen, daß sie auch alle ihre Bahnen in gleicher Zeit beschreiben, und daß bei einer Aenderung des Körperzustandes alle Umlaufszeiten sich in gleicher Weise ändern. Zur Berücksichtigung dieses Umstandes sind also besondere Betrachtungen nothwendig.

Noch größer werden die Schwierigkeiten, wenn man auch die Annahme, daß alle Punkte sich in geschlossenen Bahnen bewegen, fallen läßt, und ganz unregelmäßige Bewegungen annimmt. In der Auseinandersetzung des Hrn. Szily sind diese Schwierigkeiten aber gar nicht zur Sprache gebracht.

Bonn, Mai 1872.