10. *Ueber das bei der sogenannten totalen Reflexion
in das zweite Medium eindringende Licht;
von W. Voigt.*

(Mit einem Zusatz mitgetheilt aus den Göttinger Nachr. 1898, Heft 3.)

Dass bei der sogenannten totalen Reflexion die einfallende Welle auch in dem zweiten Medium eine Oscillation erregt, wird gewöhnlich durch ein Experiment dargethan, das schon auf Newton und Fresnel zurückgeht. Dasselbe benutzt eine nahezu planparallele Schicht eines optisch dünneren Mediums (2) von ausserordentlich kleiner Dicke — den Zwischenraum zwischen einer Ebene und einer sie berührenden Kugelfläche, — die sich zwischen zwei optisch dichteren Körpern (1) und (3), am einfachsten derselben Art, befindet. Fällt in (1) auf die Grenzfläche der Schicht eine ebene Welle unter einem Winkel, grösser, als der Winkel der totalen Reflexion, so tritt bei hinreichend kleiner Dicke der Schicht aus deren anderer Grenzfläche eine ebene Welle gewöhnlichen Lichtes in das Medium (3) aus.

Hr. Quincke¹⁾ hat diese Welle ausführlich untersucht, und ich²⁾ habe gezeigt, dass seine Beobachtungen mit der Theorie, wie sie von F. Neumann und Mac Cullagh für den Vorgang der einfachen totalen Reflexion auf Grund der Annahme einer Oscillation im zweiten Medium entwickelt ist, qualitativ überall und quantitativ in allen Punkten, die genauerer Messung zugänglich sind, übereinstimmt.

Indessen erscheint dieser Beweis als umständlich, vielleicht sogar als nicht ganz befriedigend, da ja in den Fällen, wo Licht in das dritte Medium eindringt, die Reflexion an der Grenze (1, 2) eben keine *totale* ist. Jedenfalls würde der Nachweis jener im zweiten Medium stattfindenden Schwingungen schlagender sein, wenn es gelänge, — was noch Niemand versucht zu haben scheint — dieselben bei factischer totaler

1) G. Quincke, Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Berlin p. 294. 1865; Pogg. Ann. 127. p. 1 u. 199. 1865.

2) W. Voigt, Göttinger Nachr. Nr. 2. p. 49. 1884.

Reflexion ohne das Hilfsmittel eines dritten Körpers im zweiten Medium selbst sichtbar zu machen. Im Folgenden setze ich eine Methode auseinander, die, wie mir scheint, das gestellte Problem auf das Einfachste löst.

1. Um das Verfahren zu erläutern, sei an das erinnert, was die Theorie über die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium erregten Schwingungen aussagt. Ich will mich dabei an die Darstellung anschliessen, die ich an anderer Stelle¹⁾ von dem Vorgang gegeben habe.

Die Theorie setzt eine einfallende Schwingung mit unendlichen, ebenen, homogenen Wellen voraus, die eine unendliche, ebene Grenzfläche zwischen zwei unendlichen, homogenen, isotropen Körpern trifft. Ist der Einfallswinkel φ gleich dem Grenzwinkel, d. h., ist $\sin \varphi = 1/n$, — unter n das Brechungsverhältniss des ersten gegen das zweite Medium verstanden, — so schreitet im zweiten Medium die gebrochene, ebene, homogene Welle parallel zur Grenze fort, steht also selbst normal zur Grenze. Wächst der Einfallswinkel über den Grenzwinkel, so behalten die Schwingungen im zweiten Medium immer noch gleiche Phasen in Ebenen, normal zur Grenze, aber in *diesen* „Wellenebenen“ ist nunmehr die Amplitude nicht mehr constant; sie nimmt vielmehr normal zur Grenze ab, sodass die Ebenen constanter Amplitude der Grenze parallel und somit normal zu den Wellenebenen liegen. Die erregte Schwingung pflanzt sich jetzt in derselben Richtung, wie bei dem Einfall unter dem Grenzwinkel, aber in inhomogenen Wellen und mit einer vom Einfallswinkel abhängigen Geschwindigkeit längs der Grenze fort.

Bei dieser Bewegung tritt im Mittel keine Energie durch die Grenzfläche aus dem ersten in das zweite Medium, sondern der Energiestrom kommt im zweiten Medium aus dem Unendlichen und läuft mit den inhomogenen Wellen ins Unendliche. Auf diese Weise ist eine *totale* Reflexion mit dem Bestehen einer Schwingung im zweiten Medium vereinbar.

In den *wirklichen* Fällen ist weder die reflectirende Grenzfläche, noch die einfallende Welle unendlich, es kann daher

1) W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik 2. p. 639 ff. Leipzig 1895/96.

jener Energiestrom auch nicht aus dem Unendlichen kommen. Stellt in der die Einfallsebene wiedergebenden Fig. 1 ab die Grenze zwischen den Medien (1) und (2) dar, bc eine einfallende Wellenebene, so haben wir uns vorzustellen, dass an der Stelle b , wo die Bewegung im zweiten Medium beginnt, der reflectirten Welle diejenige Energie entzogen wird, welche in der im zweiten Medium

Fig. 1.

fortschreitenden inhomogenen Welle von b nach a geführt wird. Dieser Vorgang müsste sich eigentlich in dem Aussehen der Beugungserscheinung kundgeben, welche den Rand der reflectirten Welle begleitet; indessen ist der Verlust an Energie gegenüber dem Gesamtbetrag der reflectirten Energie so gering, dass er sich den Beobachtungen entziehen dürfte.

Die im zweiten Medium fortschreitende Welle steht an jeder Stelle zwischen a und b mit der reflectirten Welle in einer solchen Wechselwirkung, dass die Grenzbedingungen erfüllt sind, und die sog. totale Reflexion ermöglicht wird. Es ist nun die Frage, was an der Stelle a geschieht, von der aus nach links keine Reflexion mehr stattfindet, entweder weil die einfallende Welle, oder weil die Grenzfläche zwischen den beiden Medien nicht weiter reicht.

Denken wir uns etwa, um die Vorstellung zu fixiren, das Medium (1) ausser durch die eine Ebene ab auch noch durch eine zweite ae begrenzt, so erscheint es plausibel, dass die längs ba fortschreitende Welle, bei a von der Verbindung mit der einfallenden und reflectirten gelöst, sich im Medium (2) frei ausbreiten wird, während die reflectirte Welle nach Durchtritt durch die Grenzfläche ae längs ihrer von a ausgehenden seitlichen Begrenzung die bekannte Beugungserscheinung des „einfachen Randes“ zeigen wird.

Man darf vermuthen, dass die von dem Rande a in das zweite Medium fortgepflanzte Schwingung, unter geeigneten Umständen in das Auge geleitet, auf dieses zu wirken vermag, und da die gebrochene Welle nur in einer äusserst kleinen normalen Entfernung von der Grenzfläche ab eine merkliche Intensität besitzt, so ist zu erwarten, dass ein — etwa mit

Hülfe einer Lupe — von o aus auf die Kante a eingestelltes Auge diese Kante *erleuchtet* sehen wird.

Indessen ist diese nächstliegende Anordnung des Experimentes von vornherein als nicht reinlich abzuweisen. Denn die „Kante“ zwischen den beiden Flächen ae und ab ist in der Wirklichkeit stets eine Cylinderfläche von sehr starker Krümmung. Deshalb tritt durch sie jederzeit ein Theil der auffallenden Welle nach einer gewöhnlichen Brechung in das zweite Medium aus, und die Kante a könnte einem Beobachter von o aus auch dann hell erscheinen, wenn bei der totalen Reflexion im zweiten Medium keine Bewegung stattfände.

Der hervorgehobene Uebelstand lässt sich nun aber leicht dadurch vermeiden, dass man die Grenzfläche ae nicht normal zu ab legt, sondern den Winkel zwischen ab und ae so wählt, dass die einfallende Welle, *wie an ab , so auch an ae totale Reflexion erleidet*. In diesem Falle kann offenbar durch die Kante a , bez. durch die sie ersetzende kleine Cylinderfläche, kein Licht vermöge gewöhnlicher Brechung in das zweite Medium gelangen, und die Fehlerquelle ist beseitigt.

Fig. 2.

Die von mir für die Beobachtung gewählte Anordnung ist durch Fig. 2 verdeutlicht. An ein rechtwinkliges gleichschenkliges Glasprisma efg wurde eine Fläche ab so angeschliffen, dass sie die Kante f abstumpfte und mit der Hypotenusenfläche den Winkel 20° einschloss. Es war Sorge getragen, diese Fläche besonders nächst der Kante a sorgfältig eben herzustellen. Die Firma Carl Zeiss in Jena hat diese Arbeit sehr schön ausgeführt. Eine ebene Welle, die nahezu normal auf die Kathodenfläche bg auffällt, wird dann längs der ganzen Grenze bae „total“ reflectirt; die gebrochene Welle, welche längs ba fortschreitet, wird an der Stelle a von der einfallenden und der reflectirten frei und breitet sich in die Luft aus.

Freilich bedingt die beschriebene Anordnung eine andere Schwierigkeit: nämlich die Wirkung, welche jetzt die zweite Grenzfläche ae auf die von der Kante a ausgehende Schwingung übt, eine Wirkung, die kaum zuverlässig zu schätzen ist, und

die deshalb eine *quantitative* Prüfung der Theorie auf dem zunächst eingeschlagenen Wege vereiteln dürfte.

Indessen besitzt bei diesem ganz neuen Phänomen auch schon eine *qualitative* Erforschung ein Interesse. Und so mag denn betont werden, dass, wenn das Licht einer electrischen Lampe nahezu normal auf die Fläche bg auffällt, ein von einem Punkt zwischen e und h aus auf die Kante a eingestelltes Auge dieselbe in hellem Lichte strahlend sieht. Es kann kaum bezweifelt werden, dass die bei der „totalen“ Reflexion im zweiten Medium erregte Bewegung die Ursache dieser Lichterscheinung ist.

Die genauere Betrachtung liefert folgende Resultate:

Die Farbe des Lichtes ist von der des Lichtes der Bogenlampe durch einen Stich ins Röthlich-Gelbe sehr merklich unterschieden. Seine Intensität ist bei gegebenem Einfallswinkel am grössten, wenn das Auge nahezu der Fläche ae parallel beobachtet, und nimmt ab, wenn das Auge auf einem Kreisbogen in der Richtung nach h hin bewegt wird. Bei wachsendem Einfallswinkel zeigt sich für dieselbe Beobachtungsrichtung eine schnelle Abnahme der wahrgenommenen Intensität.

Fällt unter einem Azimuth von 45° linearpolarisirtes Licht ein, so scheint das von der Kante ausgehende Licht nahezu dieselbe Eigenschaft zu haben.

Einige dieser Wahrnehmungen lassen sich aus den Formeln für die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium erregten Schwingungen vollständig erklären; für andere genügen dieselben noch nicht für sich allein, da die im Auge wirksame Lichtbewegung zwar eine Folge jener Schwingungen, aber nicht mit ihnen identisch ist. —

2. Das Problem der totalen Reflexion wird bekanntlich am einfachsten in complexer Form behandelt. Wir benutzen zur Darstellung des Vorganges den Neumann'schen Schwingungsvector, wählen die XY -Ebene zur Grenzfläche, die XZ -Ebene zur Einfallsebene und bestimmen die einfallende Welle durch die reellen oder die imaginären Theile der folgenden complexen Componenten:

$$1) \quad u_e = -\gamma E_p e^{iT}, \quad v_e = +E_s e^{iT}, \quad w_e = +\alpha E_p e^{iT},$$

worin E_p , E_s die einfallenden Amplituden parallel und senkrecht zur Einfallsebene darstellen,

$$(2) \quad \alpha = \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \varphi, \quad T = \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right)$$

ist, und φ den Einfallswinkel, τ die Periode, ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen homogenen Welle im ersten Medium (Glas) bezeichnet.

Dann sind im Falle totaler Reflexion die Schwingungskomponenten der gebrochenen Wellen dargestellt durch die reellen oder die imaginären Theile der Ausdrücke

$$(3) \quad u_d = i \sqrt{\alpha^2 n^2 - 1} \mathfrak{D}_p e^{i\mathfrak{Z}}, \quad v_d = \mathfrak{D}_s e^{i\mathfrak{Z}}, \quad w_d = \alpha n \mathfrak{D}_p e^{i\mathfrak{Z}},$$

wobei n das Brechungsverhältniss des ersten gegen das zweite Medium bezeichnet, und

$$(4) \quad \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\alpha n x - i \gamma \sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}}{\omega_0} \right)$$

ist, unter ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen homogenen Welle im zweiten Medium (Luft) verstanden, die mit n und ω in der Beziehung steht

$$(5) \quad n\omega = \omega_0.$$

Die Abkürzungen $\mathfrak{D}_p$ und $\mathfrak{D}_s$ haben dabei die folgenden Bedeutungen:

$$(6) \quad \mathfrak{D}_p = E_p \frac{2\gamma(n\gamma + i\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1})}{n^2 - 1}, \quad \mathfrak{D}_s = E_s \frac{2\gamma(\gamma + in\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1})}{(n^2 - 1)\alpha^2(n^2 - \gamma^2)}.$$

Damit totale Reflexion stattfinde, muss gelten

$$(7) \quad \alpha^2 n^2 > 1.$$

Als complexe Amplituden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ der Schwingungskomponenten u , v , w werden wir nach (3) und (4) die Ausdrücke

$$(8) \quad \mathfrak{U} = i \sqrt{\alpha^2 n^2 - 1} \mathfrak{D}_p \varepsilon, \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{D}_s \varepsilon, \quad \mathfrak{W} = \alpha n \mathfrak{D}_p \varepsilon$$

bezeichnen, in denen

$$(9) \quad \varepsilon = e^{-\frac{2\pi z}{\lambda_0} \sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}}$$

ist, und $\lambda_0 = \tau \omega_0$ die der Periode τ entsprechende Wellenlänge im zweiten Medium (Luft) bezeichnet.

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die complexen Amplituden zweier Schwingungen von der Form

$$\mathfrak{P} e^{i\mathfrak{Z}} \text{ und } \mathfrak{Q} e^{i\mathfrak{Z}},$$

und setzt man (unter R und d reelle Grössen verstanden)

$$(10) \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = R e^{id},$$

so stellt bekanntlich R das Verhältniss der *reellen* Amplituden beider Schwingungen und d die Phasenbeschleunigung der ersten gegen die zweite Schwingung dar.

Hieraus folgt zunächst bei Anwendung auf das Verhältniss $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}$, dass die Schwingungscomponenten nach der X - und der Z -Axe eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ besitzen, also eine elliptische Schwingung mit zur X - und Z -Axe parallelen Hauptaxen ergeben.

Ferner liefert die Anwendung auf die Verhältnisse $\mathfrak{U}/E_p$, $\mathfrak{B}/E_s$, $\mathfrak{B}/E_p$ für die reellen Amplituden U , V , W der Schwingungscomponenten nach den Coordinatenaxen die Werthe

$$(11) \quad \begin{aligned} U^2 &= E_p^2 \frac{4\gamma^2 \varepsilon^2 (n^2 \alpha^2 - 1)}{n^2 - 1}, & V^2 &= E_s^2 \frac{4\gamma^2 \varepsilon^2}{(n^2 - 1)(\alpha^2 n^2 - \gamma^2)}, \\ W^2 &= E_p^2 \frac{4n^2 \alpha^2 \gamma^2 \varepsilon^2}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Endlich erhält man aus dem Werth von $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ für die Beschleunigung d der v - gegen die w - Componente die Beziehung

$$(12) \quad \operatorname{tg} d = \frac{\gamma \sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}}{\alpha^2 n}. \quad \text{—}$$

Um den Verlauf der Functionen U^2 , V^2 , W^2 einfach übersehen zu können, sind in Fig. 3 für ein Medium (1) vom Brechungsverhältniss $n = \frac{3}{2}$ gegen das Medium (2) die Curven construirt, welche man erhält, wenn man die Einfallswinkel φ als Abscissen, die Werthe der Ausdrücke

$$(13) \quad U^2/E_p^2 \varepsilon^2 = \overline{U}^2, \quad V^2/E_s^2 \varepsilon^2 = \overline{V}^2, \quad W^2/E_p^2 \varepsilon^2 = \overline{W}^2$$

als Coordinaten aufträgt. Ebenda finden sich auch die Curven für die Functionen $\overline{U}^2 + \overline{W}^2$ und $\overline{U}^2 + \overline{V}^2 + \overline{W}^2 = \overline{J}^2$.

$\overline{U}^2$, $\overline{V}^2$, $\overline{W}^2$ stellen die Quadrate der Amplituden dar, die bei einfallenden Amplituden $E_p = 1$, $E_s = 1$ im zweiten Medium unendlich nahe zur Grenzfläche stattfinden; da aus den Quadraten der Amplituden durch Multiplication mit $2\pi^2/\tau^2$ die Energien der Volumeneinheit entstehen, so sind $\overline{U}^2$, $\overline{V}^2$, $\overline{W}^2$ auch die specifischen Energien der Componenten nächst der Grenzfläche, welche den Energien *Eins* der einfallenden, parallel

und normal zur Einfallsebene liegenden Schwingungen entsprechen.

$\bar{U}^2 + \bar{W}^2$ ist weiter die spezifische Energie für die ganze in der Einfallsebene stattfindende Schwingung, welche durch die Energie *Eins* der in der Einfallsebene stattfindenden Schwingung erregt wird, $\bar{U}^2 + \bar{V}^2 + \bar{W}^2 = \bar{J}^2$ diejenigen der gesamten im zweiten Medium stattfindenden Schwingung, welche der einfallenden Gesamtenergie *Zwei* entspricht.

Die in Fig. 3 enthaltenen Curven zeigen für $\bar{U}^2$, $\bar{V}^2$, $\bar{W}^2$ sehr verschiedenen Verlauf; ebenso unterscheiden sich die Curven für die Energien der Componenten parallel und normal zur Einfallsebene $\bar{U}^2 + \bar{W}^2$ und $\bar{V}^2$ wesentlich. Besonders sei auf

Fig. 3.

die *sehr bedeutenden Werthe* hingewiesen, welche von den $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ erreicht werden, und welche die wohl hier und da gehegte Vorstellung, als sei die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium stattfindende Bewegung ihrer Intensität nach unbedeutend, gründlich widerlegen.

Der dem Grenzwinkel $\varphi = 42^\circ$ entsprechende Werth $\bar{V} = 4$ sagt z. B. aus, dass hier die zur Einfallsebene normale Schwingungscomponente in der gebrochenen Welle eine doppelt so grosse Amplitude besitzt, als in der einfallenden; ebenso ergibt sich aus dem gleichzeitig stattfindenden $\bar{W}^2 = 1.8$ für die Componente normal zur Grenzfläche das 4/3 fache der ganzen in der Einfallsebene liegenden einfallenden Amplitude.

Dies erklärt sich sehr einfach folgendermaassen. Nach den allgemeinen Bedingungen des Ueberganges für den Neumann'schen Vector müssen die parallelen Componenten der Schwingungen im ersten und im zweiten Medium nächst der Zwischengrenze einander gleich werden, d. h., es muss in sogleich verständlicher Bezeichnung gelten:

$$\bar{u}_e + \bar{u}_r = \bar{u}_d, \quad \bar{v}_e + \bar{v}_r = \bar{v}_d, \quad \bar{w}_e + \bar{w}_r = \bar{w}_d.$$

Nun ist bei dem Einfall unter dem Grenzwinkel bereits

totale Reflexion vorhanden, zugleich aber die Phasendifferenz zwischen einfallender und reflectirter Welle noch verschwindend. Demgemäss wird hier

$$\overline{u}_r = -\overline{u}_e, \quad \overline{v}_r = \overline{v}_e, \quad \overline{w}_r = \overline{w}_e,$$

woraus dann folgt

$$\overline{U} = 0, \quad \overline{V} = 2 E_s, \quad \overline{W} = 2 E_p \sin \varphi;$$

dies ergibt dann in der That

$$\overline{V}^2 = 4 E_s^2, \quad \overline{W}^2 = 1,8 E_p^2.$$

Bei grösserem Einfallswinkel werden die numerischen Beziehungen complicirter, da dann zwischen den einfallenden und den reflectirten Wellen Phasendifferenzen eintreten.

Die Gleichung (12) für die einfallendem linearpolarisirten Licht entsprechende Phasendifferenz d zwischen den beiden in der gebrochenen Wellenebene liegenden Schwingungscomponenten v und w ist insofern von Interesse, als sie für diese Grösse denselben bekannten Ausdruck ergibt, der für die Hälfte der Phasendifferenz zwischen den reflectirten Componenten gilt. Vom Grenzwinkel beginnend steigt demgemäss d von Null an schnell bis zu seinem bei ca. 50° Einfallswinkel erreichten Maximum von rund $2\pi/16$ an und fällt dann langsamer, um bei streifendem Einfall wieder zu verschwinden; d bleibt sonach immer sehr klein und die beiden Componenten v und w geben zusammen elliptisch polarisirtes Licht von sehr gestreckter Bahn, das als nahezu linearpolarisirt gelten kann.

3. Was nun die bei der oben beschriebenen Anordnung wirklich beobachtete Schwingung angeht, so vermag die Analysis, wie es scheint, gegenwärtig deren Gesetze noch nicht abzuleiten. Am nächsten läge wohl die Auffassung des Problemes als eines Falles von *Beugung*, insofern die letzte ungestörte ebene, inhomogene Welle im zweiten Medium, die in Fig. 2 durch die Gerade ai angedeutet ist, als Lichtquelle für den Raum zwischen ihr und der Prismenfläche ae angesehen werden darf. Indessen dürften der strengen Behandlung auch des so modificirten Problemes zunächst noch ziemliche Schwierigkeiten entgegenstehen. Gegen seine angenäherte Lösung mit Hülfe des Huyghens'schen Principes erheben sich dagegen principielle Bedenken. Denn die Anwendbarkeit dieser Methode ist nicht

durch allgemeine theoretische Ueberlegungen zu begründen, sondern muss durch die Beobachtung erwiesen werden. Für den hier vorliegenden Fall fehlen aber Analoga im Bereiche der bisher behandelten Beugungsprobleme durchaus. Jene benutzten wesentlich homogene transversale Wellen, während hier überaus inhomogene Wellen mit longitudinalen Schwingungscomponenten die Lichtquelle bilden. [Uebrigens ist die Rolle, welche die Grenzebene ae bei dem Vorgang spielt, ziemlich unklar. Wollte man sie als vollständig reflectirend einführen — wie das bei nahezu streifender Reflexion der allein wirksamen innersten Theile der leuchtenden Welle ai plausibel ist —, d. h., wollte man neben ai einfach das Spiegelbild ak (vgl. Fig. 2) als Lichtquelle benutzen und dann das Prisma ganz fortdenken, so käme man auf eigenthümliche Schwierigkeiten. Denn die ursprüngliche Welle ai und die reflectirte ak müssten nach allen Lichttheorien mit einer Phasendifferenz von π schwingen, sie müssten sich also, da die wirksamsten Theile beider unmittelbar aneinander liegen, bezüglich der ausgesandten Schwingungen im wesentlichen zerstören. Dies erscheint einmal deshalb unmöglich, weil die Energie der beiden Schwingungen nicht spurlos verschwinden kann, es widerlegt sich aber auch durch den Umstand, dass, wenn man nach dieser Methode die Wirkung einer zwischen a und e gelegenen Wellenebene $a'i'$ auf eine Stelle zwischen a und a' berechnen wollte, ein mit der hier ja durchführbaren *strengen* Theorie im Widerspruch stehendes Resultat folgen würde. Hiernach ist eine einigermaassen befriedigende *quantitative* Bestimmung der von den inhomogenen Wellen zwischen a und b in den Raum eh fortgepflanzten Bewegung, und somit der dort wahrnehmbaren Vorgänge, zunächst wohl nicht ausführbar. —

Was sich nach der Seite der *Qualität* aussagen lässt, dürfte etwa folgendes sein. Da in den inhomogenen Wellen die Schwingung nur innerhalb einer überaus schmalen Zone nächst der Fläche ab einen merklichen Werth hat, — der Factor ε in den Ausdrücken (11) für die Amplituden ist bei einem Einfallswinkel von 60° für $z = \lambda_0$ bereits $= 1/400$ — so sind erhebliche Interferenzerscheinungen nicht zu erwarten, und die an jeder Stelle wahrgenommene Intensität wird ungefähr der Gesamtenergie der Schwingung, welche sich in einem über der Flächeneinheit der Grenzfläche ab construirten Prisma be-

findet und als *Flächendichte* der Energie bezeichnet werden kann, parallel gehen. Da die auf die Volumeneinheit bezogene Schwingungsenergie — die *Raumdichte* der Energie — für jede Componente durch das Quadrat von deren Amplitude mal $2\pi^2/\tau^2$ gegeben ist, so erhält man die oben charakterisirten Energiedichten für die A^2, B^2, Γ^2 Componenten u, v, w , indem man bildet

$$(14) \quad A^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2} \int_0^\infty U^2 dz, \quad B^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2} \int_0^\infty V^2 dz, \quad \Gamma^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2} \int_0^\infty W^2 dz.$$

Beachtet man, dass die U, V, W von z nur vermöge des Factors ε abhängen, so ergibt sich sogleich

$$(15) \quad \begin{cases} A^2 = E_p^2 \frac{2\pi\lambda_0}{\tau^2} \frac{\gamma^2(n^2 a^2 - 1)}{(n^2 - 1)\sqrt{n^2 a^2 - 1}}, \\ B^2 = E_s^2 \frac{2\pi\lambda_0}{\tau^2} \frac{\gamma^2}{(n^2 - 1)(a^2 n^2 - \gamma^2)\sqrt{n^2 a^2 - 1}}, \\ \Gamma^2 = E_p^2 \frac{2\pi\lambda_0}{\tau^2} \frac{(n^2 a^2 \eta^2)}{(n^2 - 1)\sqrt{n^2 a^2 - 1}}. \end{cases}$$

Die Flächendichte der Gesamtenergie, welche wir als für die wahrgenommene Intensität maassgebend betrachten, ist dann gegeben durch

$$(16) \quad \Delta^2 = A^2 + B^2 + \Gamma^2.$$

Bei einfallendem natürlichen Licht wird $E_p^2 = E_s^2 = E^2$, und es erhält demgemäss die Raumdichte δ_e der einfallenden Energie den Werth

$$(17) \quad \delta_e^2 = \frac{4\pi^2}{\tau^2} E^2.$$

Der Verlauf der vier Functionen

$$A^2 = A^2 \tau^2 / 2\pi \lambda_0 \cdot E_p^2,$$

$$B^2 = B^2 \tau^2 / 2\pi \lambda_0 \cdot E_p^2,$$

$$C^2 = \Gamma^2 \tau^2 / 2\pi \lambda_0 \cdot E_p^2$$

und $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$

Fig. 4.

ist für $n = 3/2$ in Figur 4 graphisch dargestellt, wobei wieder die Werthe des Einfallswinkels φ die Abscissen bilden. Dass B^2, C^2 , und somit D^2 ,

für den Grenzwinkel $\varphi = 42^\circ$ unendlich ausfallen, rührt davon her, dass in diesem Falle die gebrochene Welle noch homogen, ϵ also $= 1$ ist. Betrachtet man D^2 als für die in beliebiger Richtung wahrgenommene Intensität maassgebend, so ergibt sich für letztere ein schnelles Abnehmen mit wachsendem Einfallswinkel, wie das die Beobachtung gleichfalls zeigt.

Setzt man einfallendes natürliches Licht voraus, schreibt demgemäss Δ^2 in der Form

$$(18) \quad \Delta^2 = \frac{4\pi^2 \lambda_0 D^2 E^2}{2\pi \tau^2} = \frac{\lambda_0 D^2 \delta_e^2}{2\pi}$$

und beachtet, dass D^2 nur wenig mit der Farbe variirt, so erkennt man, dass in den im zweiten Medium fortgepflanzten Schwingungen die Farben mit *grossen* Wellenlängen relativ stärker auftreten, als die mit *kleinen*. Bei einfallendem weissen Licht wird sonach das im zweiten Medium vorhandene einen Stich ins Röthliche besitzen, wie dies die Beobachtung in der That sehr auffällig ergibt.

Das Product $\lambda_0 \delta_e^2$ stellt die Energie dar, welche in einer Schicht vom Querschnitt Eins und der Dicke λ_0 der einfallenden Wellen enthalten ist. Die Schwingungsenergie Δ^2 , die sich im zweiten Medium über der Einheit der Grenzfläche ab befindet, ist hiervon der $D^2/2\pi$ -te Theil. Man darf hieraus schliessen, dass die letzte ungestörte Welle ai im zweiten Medium nach dem Raume eh hin ungefähr ebenso leuchtet, wie ein vom einfallenden Licht beleuchteter Spalt von der Breite $\beta = \lambda_0 D^2/2\pi$. Bei einem Einfallswinkel von 60° würde hieraus nahezu $\beta = \frac{1}{2}\lambda_0$, bei einem von 45° dagegen etwa $\beta = 2\lambda_0$ folgen. Das wirkliche Aussehen der Prismenkante scheint einer solchen Grössenordnung nicht zu widersprechen.

4. Es schien mir nützlich, den Einfluss der voraussichtlich die inhomogene Welle reflectirenden Fläche ae (Fig. 2) dadurch näher aufzuklären, dass deren Winkel gegen die total reflectirende Fläche ab verändert wurde. Freilich war, wenn der Grundgedanke der oben dargestellten Anordnung, die totale Reflexion an den *beiden* Ebenen ae und ab , festgehalten werden sollte, für eine solche Aenderung nur ein geringer Spielraum gewährt. Eine *Vergrösserung* des Winkels eab bei festgehaltener Fläche ae müsste voraussichtlich die störende

Wirkung der Fläche ae vermehren und erschien daher wenig aussichtsreich; eine *Verkleinerung* war nur innerhalb höchstens 20° ausführbar und führte zu mehr und mehr streifender Incidenz, also nach p. 195 zu einer mehr und mehr geschwächten Welle im zweiten Medium.

Da indessen die Beobachtung die erwartete Erscheinung in grosser Deutlichkeit ergeben hatte, so liess ich nunmehr die Forderung einer totalen Reflexion an der Fläche ae vollständig fallen, selbst auf die Gefahr hin, die Reinheit des Phänomens dadurch ein wenig zu beeinträchtigen. Eine einfache geometrische Ueberlegung zeigt, wie man die Anordnung zu treffen hat, damit die Störung am wenigstens ins Gewicht fällt.

Denkt man die Kante bei a durch eine feine Cylinderfläche ersetzt, wie das der Wirklichkeit entspricht, und bestimmt man den Winkelraum $\delta\psi$, über den ein von der concaven Seite einfallendes paralleles Strahlenbündel von der Breite $\delta\beta$ sich bei gewöhnlicher Brechung ausbreitet, so erhält man die Formel

$$\delta\psi = \frac{n \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2} \frac{\delta\beta}{\varrho}.$$

Hierin bezeichnet φ_1 den Einfallswinkel, φ_2 den Brechungswinkel und ϱ den Krümmungsradius des Cylinders an der Stelle, wo das Strahlenbündel ihn durchsetzt. ϱ darf als überall auf dem Cylinder endlich und überdies als sehr klein angesehen werden. $\delta\psi/\delta\beta$ wird nach dieser Formel unendlich gross, wenn $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$ ist, d. h. für den unter dem Grenzwinkel einfallenden Strahl. In diesem Fall ist also das durch gewöhnliche Brechung aus dem Prisma austretende Licht vollkommen wirkungslos; es hat demgemäss auch eine nur schwache Wirkung, wenn der Einfallswinkel dem Grenzwinkel nahe liegt.

Fig. 5.

Stellt man also ein Prisma von der in Fig. 5 gezeichneten Form $abge$ her, wo der Winkel bei a 135° beträgt, und lässt man Licht normal auf die Fläche bg auffallen, so erfüllt der durch die „Kante“ bei a in gewöhnlicher Brechung austretende Strahlenfächer den Winkelraum lam , wobei $\angle lae = 42^\circ$, $\angle mae = 90^\circ$ ist; die Lichtintensität

nimmt in ihm von m nach l zu Null ab. Der Winkelraum eal ist also von regelmässig gebrochenem Licht vollkommen, lao sehr nahezu frei.

Bei dem rechtwinkelig-gleichschenkeligen Prisma abg ist unter analogen Umständen allein der Winkelraum lan mit der Oeffnung 96° von regelmässig gebrochenem Licht erfüllt, das nunmehr in der Nähe der *beiden* Grenzlinien al und an verschwindende Intensität besitzt. In beiden Fällen würde also eine Beobachtung in dem Winkelraum eal vollkommen reinliche Verhältnisse, bei feinzugeschärfter Kante a innerhalb lam wenig und nahe der Grenze al fast gar nicht gestörte vorfinden. Die Wirkung der zweiten Grenzfläche ae bez. ag des Prismas würde dabei aber auf das äusserste reducirt, wahrscheinlich vollständig eliminirt sein.

Die Firma Carl Zeiss in Jena hat mir zwei Prismen der vorbeschriebenen Gestalten $abge$ und abg angefertigt, und ich habe sie in der früheren Weise der Beobachtung unterworfen. Dass die Kanten bei a sehr fein zugeschärft waren, ergab sich aus deren Anblick, wenn durch beide anliegende Flächen Licht in gewöhnlicher Brechung hindurchtrat; sie erschienen dann, aus den Winkelräumen lam bez. lan betrachtet, nur wenig leuchtend. Doch zeigte sich hierbei die Kante mit dem Winkel 90° weniger rein, als die vom Winkel 135° , und letztere wurde wiederum von der Kante des oben beschriebenen Prismas mit dem Winkel 160° übertroffen. Offenbar brechen beim Schleifen einer Kante um so leichter kleine Stücke aus, je kleiner der Kantenwinkel ist.

Fiel Licht normal auf die Fläche bg , und somit unter 45° auf die Fläche ab , sodass es an letzterer total reflectirt wurde, so trat die oben beschriebene Wirkung der im zweiten Medium fortgepflanzten Welle mit ausserordentlicher Deutlichkeit hervor; die Kante a leuchtete anscheinend am stärksten in der Richtung ao der Fortpflanzung jener Welle. Verkleinerte man den Einfallswinkel auf ab , so nahm die Lichtintensität bedeutend zu und war in der Nähe des Grenzwinkels so stark, dass man auf einer in einigen Centimeter Abstand vorgehaltenen matten Glasscheibe einen deutlichen Lichtschein wahrnehmen konnte. Derselbe war am hellsten in der Nähe der Richtung ao und nahm nach al hin schnell, nach am hin langsamer

an Stärke ab. Die gleiche Beobachtung liess sich mit dem in Fig. 2 dargestellten Prisma anstellen, indem man das Licht nicht wie früher durch die Fläche gb , sondern durch ge eintreten liess.

Vielleicht gestattet die im Vorstehenden beschriebene und zunächst nur theoretisch interessante Erscheinung auch eine *praktische* Verwendung.

Wenn die bei totaler Reflexion im zweiten Medium fortgepflanzten ebenen Wellen nur innerhalb eines äusserst schmalen Bereiches (innerhalb kleiner Bruchtheile einer Wellenlänge) eine sehr grosse Intensität (fast bis zum Dreifachen der einfallenden) besitzen, so liegt es nahe, sie bei Spectralapparaten und ähnlichen Instrumenten an Stelle der von den Spalten ausgehenden Wellen zu verwenden. Strahlenbündel von solcher Feinheit sind durch Spalten bekanntlich nur sehr unvollkommen zu erhalten; das zeigen u. a. die zahlreichen Horizontalstreifen, die bei sehr engen Spalten das Spectrum durchziehen.

Angestellte Versuche scheinen mir die Brauchbarkeit der vorgeschlagenen Methode dargethan zu haben. Wurde an Stelle des Spaltes eines Spectrometers die Kante a eines der oben beschriebenen Prismen gebracht, sodass die Fläche ba die Axe des Collimatorrohres enthielt, und wurde Sonnenlicht nahezu unter dem Grenzwinkel auf diese Fläche geleitet, so erschien ein ausgezeichnet schönes Spectrum. Wie zu erwarten, leistete dabei das Prisma 1 mit dem Winkel 160° das Vollkommenste, das Prisma 3 mit einem Winkel von ca. 90° das Geringste.

Göttingen, Juli und August 1898.

Zusatz. Hr. Quincke hat die Freundlichkeit gehabt, mich nach dem Erscheinen der vorstehenden Notiz auf einen zuerst von Hrn. Ditscheiner¹⁾ angestellten und von ihm mit gleichem Resultat wiederholten Versuch aufmerksam zu machen, den er durch die oben beschriebene Wirkung der bei totaler Reflexion im zweiten Medium erregten Schwingung erklärt, während Hr. Ditscheiner sich jeder Deutung enthält.

1) L. Ditscheiner, Sitzungsber. der k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien (2) 60. p. 584. 1870.

Der Versuch ist folgender: Wenn man in die Hypotenusenfläche eines Glasprismas ein Gitter so einritz, dass seine Furchen den brechenden Kanten parallel verlaufen, so erregt eine ebene Welle, die im Innern des Prismas auf die Hypotenusenfläche auffällt, im äusseren Raum ein Beugungsspectrum auch dann, wenn der Einfallswinkel den Grenzwinkel der totalen Reflexion übertrifft.

Es ist in der That wahrscheinlich, dass an dieser Erscheinung die im zweiten Medium (Luft) gegen die Furchen hinlaufende und dort gewissermaassen frei werdende Welle, deren Wirkung oben unter 1 in einfachster Weise gezeigt ist, einen Antheil hat. Indessen dürften sie hier doch nicht für sich *allein* ins Spiel treten. Die Furchen des Gitters sind ebenso, wie das oben von den Prismenkanten ausgeführt ist, feine Cylinderflächen, und es wird daher durch sie hindurch von einer auf die Hypotenusenfläche des Prismas auffallenden Welle ein Theil durch gewöhnliche Brechung in die Luft austreten, auch wenn an den ungeritzten Theilen totale Reflexion stattfindet. Dieser Theil wird um so grösser sein, je grösser der von den Furchen bedeckte Theil der geritzten Fläche ist. Er wird besonders bei grösseren Winkeln der interferirenden Strahlen gegen die Prismenfläche zur Geltung kommen, wo, wie oben ausgeführt, die Wirkung der durch totale Reflexion im zweiten Medium erregten Welle sehr schwach ist. Man könnte vielleicht durch geeignete Abänderung der Umstände über das quantitative Verhältniss dieser beiden zusammenwirkenden Vorgänge Aufklärung erhalten; indessen dürfte das Interesse der Frage nicht im Verhältniss stehen zu der zu ihrer Beantwortung aufzuwendenden Mühe.

Göttingen, October 1898.

(Eingegangen 31. October 1898.)