Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung*).

Von

EMIL TOEPLITZ aus Lissa (in Posen).

Hesse hat seinen Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung**) die eindeutige Abbildbarkeit der Kegelspitzencurve eines beliebigen Flächennetzes zweiter Ordnung auf eine ebene Curve vierter Ordnung zu Grunde gelegt und zeigte***), dass beide — Flächennetz und Curve — gleichzeitig ganz allgemeiner Natur sind. Von dieser Beziehung Gebrauch machend, hat Frahm in einer kurzen Notiz†) die von Salmon in seiner Raumgeometrie††) für immer möglich gehaltene Darstellbarkeit dreier quadratischer quaternärer Formen als Summen derselben fünf Quadrate einer näheren Untersuchung unterzogen; aus dem Factum, dass die Hesse'sche Abbildung der Kegelspitzencurve eines durch derartige Formen repräsentirten Flächennetzes eine Curve vierter Ordnung von besonderer Art†††) ist, zieht er den Schluss, dass auch zwischen den Flächen des Netzes eine gewisse Beziehung bestehen muss, falls jene Darstellung möglich sein soll. Es tritt hierbei noch der eigenthümliche Umstand zu Tage, dass die Darstellung, sobald diese Beziehung Statt hat, nicht bloss auf ein-

*) Die Anregung zu diesem Aufsätze verdankt der Verf. seinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Rosanes in Breslau.

**) Hesse, Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Crelle J. Bd. 49, p. 279—332.

***) Ibid. p. 284.

†) Frahm, Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung. Mathem. Annalen Bd. VII, p. 635—638.

††) Salmon-Fiedler, Raumgeometrie. 1. Aufl. Bd. II, p. 633; 2. Aufl. Bd. I, p. 166 und p. 282.

†††) Es lassen sich ihr nämlich vollständige Fünfseite einschreiben, was bei der allgemeinen Curve vierter Ordnung nicht der Fall ist, wie Clebsch (Borch. J. Bd. 59) und Herr Lüroth (Math. Ann. Bd. I, p. 37—51) auf algebraischem Wege gezeigt haben; Herr Geiser behauptet in seinen Untersuchungen „über die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades“ (Borch. J. Bd. 72, p. 377) irrthümlicher Weise das Gegentheil hiervon.

fache, sondern auf unendlich vielfache Weise geschehen kann. Unter Zuhülfenahme des Sylvester-Clebsch'schen Satzes*) von der Darstellbarkeit der allgemeinen cubischen quaternären Form als Summe von fünf Cuben ergab sich daraus der weitere Satz: „Drei Flächen zweiter Ordnung können entweder (im Allgemeinen) gar nicht oder auf zweifach unendlich viele Arten als Polaren einer Fläche dritter Ordnung angesehen werden.“

Der kurz angedeutete, indirecte Weg, auf dem Frahm zu diesem interessanten Resultate gelangt ist, soll im Folgenden durch eine ganz directe, rein algebraische Betrachtungsweise ersetzt werden. Während Frahm zunächst die Frage untersucht, wann drei quadratische quaternäre Formen als Summen derselben fünf Quadrate darstellbar sind, und später erst zeigt, dass sie sich unter derselben Bedingung als Polarflächen von Flächen dritter Ordnung interpretiren lassen, bietet sich der umgekehrte Weg für die algebraische Behandlung als der bequemere dar. Die Combinante, deren Verschwinden das von den drei Flächen gebildete Netz als Polarflächennetz einer Fläche dritter Ordnung charakterisirt, zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit aus; ihr Quadrat lässt sich als eine sogenannte Determinante gauche symétrique darstellen, und hieraus erklärt sich dann in sehr einfacher Weise, dass die aufgestellte Bedingung entweder von keiner oder einer unendlichen Anzahl von Flächen zweiter Ordnung erfüllt wird. — Die Gleichung der Flächen dritter Ordnung, deren Polaren die drei gegebenen Flächen zweiter Ordnung sind, wird ganz direct hergestellt.

Schliesslich ergibt sich ein *neuer Beweis* des erwähnten Sylvester-Clebsch'schen Satzes.

§ 1.

In der nachstehenden Arbeit werden folgende, übliche Bezeichnungen benutzt werden. Unter $x_i, y_i, z_i, t_i, \dots, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$, ($i = 1, 2, 3, 4$); $u_i, v_i, w_i, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ sollen die homogenen Coordinaten von Punkten, resp. Ebenen, unter u_x der Ausdruck $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ verstanden werden. Ferner soll zur Abkürzung die Determinante

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = (abcd)$$

gesetzt werden; $(bcd)_i$ sei die Unterdeterminante, die zu a_i adjungirt ist, so dass $(abcd) = \sum_i a_i (bcd)_i$ ist, wo sich die Summation, wie im

*) Ausführliche Darlegung und Geschichte dieses Satzes findet sich bei Gordan: „über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung“, Math. Ann. Bd. V, p. 341—377; ebenso bei Salmon-Fiedler a. a. O. 2. Aufl. Bd. II, Cap. V. Einen neuen Beweis hat Reye (Borch. J. Bd. 78, p. 114—122) geliefert.

Folgenden überhaupt, über die Werthe 1, 2, 3, 4 des bezeichneten Index erstreckt. Endlich werde $(a_i b_k - a_k b_i) = (ab)_{ik}$ gesetzt.

Offenbar ist identisch:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ x_1 & y_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ x_2 & y_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ x_3 & y_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ x_4 & y_4 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. nach der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$(I) \quad u_x(\xi \eta \zeta y) - u_y(\xi \eta \zeta x) = u_\xi(x \eta \zeta y) + u_\eta(x \xi \zeta y) + u_\zeta(x \xi \eta y).$$

Zwischen den sechs zweigliederigen Determinanten $(ab)_{ik}$ besteht folgende (dieselben auch als solche charakterisirende) Identität:

$$(II) \quad (ab)_{12}(ab)_{34} + (ab)_{13}(ab)_{42} + (ab)_{14}(ab)_{23} = 0.$$

Setzt man $u_i = (xyz)_i$, so wird

$$(III) \quad (uabc) = \sum_i (abc)_i (xyz)_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \sum \pm a_x b_y c_z$$

und in ähnlicher Weise für $(uv)_{ik} = (xy)_{i'k'}$, wo i, k, i', k' durch eine gerade Anzahl von Permutationen je zweier Nummern aus 1, 2, 3, 4 hervorgehen soll,

$$(IV) \quad (abuv) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x.$$

Für Formen höheren Grades wird zumeist von der symbolischen Bezeichnung Gebrauch gemacht werden.

§ 2.

Es erscheint zweckmässig, die Lösung des folgenden, einfachen Problems voranzuschicken, zumal ich es nur kurz und nicht vollständig an einer einzigen Stelle*) behandelt gefunden habe.

Es sind drei beliebig im Raume gelegene Ebenen

$$p_x = 0, \quad q_x = 0, \quad r_x = 0$$

und drei ihnen resp. zugeordnete Punkte ξ, η, ζ gegeben; gesucht wird

*, Paul Serret, Géom. de direction, Paris 1869, p. 182.

diejenige Oberfläche zweiter Ordnung, zu denen sie als Pole und Polaren gehören.

Da eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist, vertreten ein Pol und seine Polare die Stelle von drei conjugirten Punktepaaren; die Aufgabe verlangt demnach, eine Oberfläche zweiter Ordnung zu finden, zu der neun gegebene Punktepaare conjugirt sind, und muss daher wenigstens eine Lösung zulassen*). In der That wird ihr durch die aus der doppelt gerechneten, durch ξ , η , ζ gelegten Ebene bestehenden Oberfläche zweiter Ordnung genügt; denn bezüglich einer in eine Doppelebene degenerirenden Fläche zweiter Ordnung hat jeder Punkt in ihr jede beliebige Ebene zur Polare. Dass diese ganz interesselose und daher als uneigentlich zu bezeichnende Lösung im Allgemeinen die einzige ist, erkennt man sofort; denn soll eine eigentliche, die Aufgabe befriedigende Fläche zweiter Ordnung existiren, so muss es in der durch ξ , η , ζ gehenden Ebene einen Kegelschnitt geben, in Bezug auf den ξ , η , ζ die Schnittgeraden dieser Ebene mit resp. $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ zu Polaren haben**); dazu ist aber bekanntlich nothwendig, dass ξ , η , ζ und diese drei Geraden perspectivisch liegende Dreiecke bilden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Soll aber auch eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung der Aufgabe genügen, so müssen die neun Punktepaare auch dieser conjugirt sein und können daher***) höchstens eine achtegliedrige Gruppe bilden; dann befriedigen die unendlich vielen Flächen des durch die uneigentliche und eigentliche Fläche definirten Büschels die gestellte Aufgabe.

Für die Existenz einer eigentlichen Lösung reicht eine einzige Bedingung hin; das vorliegende Problem kann nämlich auch so formulirt werden:

Die Coefficienten einer quadratischen quaternären Form a_x^2 und drei Grössen π , κ , ϱ sollen aus den Identitäten

$$(A) \quad a_x a_\xi = \pi p_x, \quad a_x a_\eta = \kappa q_x, \quad a_x a_\zeta = \varrho r_x$$

bestimmt werden, die für jedes x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) zu erfüllen sind.

Hieraus ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$(B) \quad \kappa q_\zeta = \varrho r_\eta, \quad \varrho r_\xi = \pi p_\zeta, \quad \pi p_\eta = \kappa q_\xi,$$

in denen von den Unbekannten nur noch π , κ , ϱ und zwar homogen und linear vorkommen. Im Allgemeinen haben sie daher nur die Lösung $\pi = 0$, $\kappa = 0$, $\varrho = 0$; dann erfordern die Gleichungen (A), dass ξ , η , ζ Doppelpunkte der Fläche $a_x^2 = 0$ sind; da die Punkte ξ , η , ζ nicht in einer Geraden liegen sollen, so muss $a_x^2 = 0$ die durch

*) Hierfür vgl. Rosanes, Ueber ein Princip der Zuordnung etc., Borch. J. Bd. 76.

**) Cf. Serret a. a. O.

***) Cf. Rosanes a. a. O.

ξ, η, ζ gehende, doppelt gedachte Ebene darstellen; und dies ist die als uneigentlich bezeichnete Lösung.

Um zu einer eigentlichen Lösung zu gelangen, ist daher wenigstens die Annahme erforderlich, dass die Determinante der Gleichungen (B) verschwinde, d. i.:

$$(C) \quad p_{\eta} q_{\zeta} r_{\xi} - p_{\zeta} q_{\xi} r_{\eta} = 0,$$

oder, geometrisch ausgedrückt, dass das Dreiflach $p_x = 0, q_x = 0, r_x = 0$ und das Dreieck ξ, η, ζ perspectivisch liegen; in diesem Fall ergeben sich dann die Verhältnisse $\pi : \kappa : \varrho$ in eindeutiger Weise.

Diese Bedingung reicht aber auch für die Existenz einer eigentlichen Lösung hin; denn es kann eine solche sofort direct hergestellt werden. Zu diesem Zwecke möge zunächst der Form a_x^2 eine eigenthümliche Gestalt gegeben werden, in der ihre Coefficienten hauptsächlich nur in drei ihrer Polaren auftreten. Es ist nämlich nach (I):

$$a_x^2(\xi\eta\xi y) = a_x a_{\xi}(x\eta\xi y) + a_x a_{\eta}(x\xi\xi y) + a_x a_{\zeta}(x\xi\eta y) + a_x a_y(\xi\eta\xi x)$$

und

$$a_x a_y(\xi\eta\xi z) = a_y a_{\xi}(x\eta\xi z) + a_y a_{\eta}(x\xi\xi z) + a_y a_{\zeta}(x\xi\eta z) + a_y a_x(\xi\eta\xi x),$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} a_x^2(\xi\eta\xi y)(\xi\eta\xi z) &= [a_x a_{\xi}(x\eta\xi y) + a_x a_{\eta}(x\xi\xi y) + a_x a_{\zeta}(x\xi\eta y)](\xi\eta\xi z) \\ &\quad + [a_y a_{\xi}(x\eta\xi z) + a_y a_{\eta}(x\xi\xi z) + a_y a_{\zeta}(x\xi\eta z)](\xi\eta\xi x) \\ &\quad + a_y a_x(\xi\eta\xi x)^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die durch folgende Gleichung gegebene Form a_x^2 den Gleichungen (A) genügen muss:

$$(D) \quad a_x^2(\xi\eta\xi y)(\xi\eta\xi z) = [\pi p_x(x\eta\xi y) + \kappa q_x(x\xi\xi y) + \varrho r_x(x\xi\eta y)](\xi\eta\xi z) \\ + [\pi p_y(x\eta\xi z) + \kappa q_y(x\xi\xi z) + \varrho r_y(x\xi\eta z)](\xi\eta\xi x),$$

wo y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ganz beliebige Grössen und π, κ, ϱ aus den Gleichungen (B) zu bestimmen sind. Davon überzeugt man sich auch leicht ganz direct; denn durch Polarisation ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2 a_x a_{\xi}(\xi\eta\xi y)(\xi\eta\xi z) &= [\pi p_{\xi}(x\eta\xi y) + \kappa q_{\xi}(x\xi\xi y) + \varrho r_{\xi}(x\xi\eta y)](\xi\eta\xi z) \\ &\quad + \pi p_x(\xi\eta\xi y)(\xi\eta\xi z) + \pi p_y(\xi\eta\xi z)(\xi\eta\xi x) \end{aligned}$$

und dies ist, da π, κ, ϱ den Gleichungen (B) genügen, wenn überdies von der Identität (I) Gebrauch gemacht wird:

$$= 2 \pi p_x(\xi\eta\xi y)(\xi\eta\xi z),$$

also in der That

$$a_x a_{\xi} = \pi p_x,$$

ebenso

$$a_x a_{\eta} = \kappa q_x,$$

$$a_x a_{\zeta} = \varrho r_x, \text{ w. z. b. w.}$$

Es entsteht die Frage nach der allgemeinsten Lösung; ist A_x^2 irgend eine solche und a_x^2 die in (D) dargestellte, so ist:

$$A_x A_\xi = \pi' p_x, \quad A_x A_\eta = \kappa' q_x, \quad A_x A_\zeta = \varrho' r_x;$$

$$a_x a_\xi = \pi p_x, \quad a_x a_\eta = \kappa q_x, \quad a_x a_\zeta = \varrho r_x,$$

wo π , κ , ϱ ebenso, wie π' , κ' , ϱ' den Gleichungen (B) genügen müssen, weswegen auch $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \lambda$ ist. Setzt man $A_x^2 - \lambda a_x^2 = h_x^2$, so ergeben jene drei Paare von Gleichungen:

$$h_x h_\xi = 0, \quad h_x h_\eta = 0, \quad h_x h_\zeta = 0,$$

und diese:

$$h_x^2 = \mu (\xi \eta \zeta x)^2,$$

wo μ eine beliebige Zahl ist. Demnach ist jede Lösung unter der Form

$$A_x^2 = \lambda a_x^2 + \mu (\xi \eta \zeta x)^2$$

darstellbar.

Hieraus geht hervor, dass dem gestellten Problem unter Annahme der Bedingung (C) in allgemeinsten Weise durch einen Büschel von Oberflächen zweiter Ordnung genügt wird, die sich sämtlich längs eines Kegelschnittes in der Ebene $(\xi \eta \zeta x) = 0$ berühren. Ein derartiger Büschel besitzt nur einen Kegel, dessen Gleichung im vorliegenden Falle sofort herzustellen ist. Setzt man nämlich in dem Ausdrucke für a_x^2 die Grössen $z_i = y_i$, so repräsentirt $a_x^2 = 0$ einen Kegel mit der Spitze y , wenn

$$a_x a_y (\xi \eta \zeta y) = \pi p_y (x \eta \zeta y) + \kappa q_y (x \xi \zeta y) + \varrho r_y (x \xi \eta y)$$

für jedes x_i verschwindet, zu welchem Zwecke man nur y als den Schnittpunkt der drei Ebenen $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ zu betrachten braucht. Setzt man daher in (D) $y_i = z_i = (pqr)_i$, so ergibt eine einfache Umformung namentlich unter Anwendung der Identität (III) als Gleichung des Kegels

$$S_x^2 = \begin{vmatrix} p_\xi & p_\eta & p_\zeta & p_x \\ q_\xi & q_\eta & q_\zeta & q_x \\ r_\xi & r_\eta & r_\zeta & r_x \\ \pi p_x & \kappa q_x & \varrho r_x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und der allgemeinsten Lösung des Problems kann nun die Form gegeben werden:

$$A_x^2 = \lambda S_x^2 + \mu (\xi \eta \zeta x)^2.$$

Das in diesem § zur Anwendung gebrachte Verfahren wird sich auch für den eigentlichen Gegenstand gegenwärtiger Arbeit sehr gut verwerthen lassen.

§ 3.

Es sei vorgelegt das Problem: *Unter welcher Bedingung kann man drei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung als Polaren dreier Punkte in Bezug auf eine Fläche dritter Ordnung auffassen? Welches ist diese Fläche dritter Ordnung, und wo liegen die Pole?*

Die Oberfläche dritter Ordnung und die drei Punkte sind durch $19 + 9 = 28$ Bedingungen bestimmt; das Problem liefert aber nur 27 Gleichungen, und — insoweit ein solcher Schluss überhaupt berechtigt ist*) — scheint es unendlich viele Flächen dritter Ordnung zu geben, die der Aufgabe genügen. In Analogie mit dem Probleme des § 2. existiren allerdings, wie auf den ersten Blick zu erkennen ist, auch hier stets Lösungen, nämlich die in irgend eine beliebige, dreifach zu zählende Ebene des Raumes degenerirenden Oberflächen dritter Ordnung; gleichzeitig sind als Pole irgend drei Punkte zu nehmen. Ausser diesen als uneigentlich zu bezeichnenden Lösungen giebt es für eine *allgemeine* Lage der drei Flächen zweiter Ordnung, wie sich bald ergeben wird, *keine*.

Algebraisch gefasst lautet das vorliegende Problem: *Stellen*

$$\sum_{i,k} p_{ik} x_i x_k = p_x^2 = p_x'^2 = 0,$$

$$\sum_{i,k} q_{ik} x_i x_k = q_x^2 = q_x'^2 = 0,$$

$$\sum_{i,k} r_{ik} x_i x_k = r_x^2 = r_x'^2 = 0$$

drei gegebene Flächen zweiter Ordnung dar, so sollen die Coefficienten einer cubischen quaternären Form a_x^3 , sowie die Coordinaten dreier Punkte ξ, η, ζ und drei Constanten π, κ, ϱ so bestimmt werden, dass die Gleichungen

$$(1) \quad a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2, \quad a_x^2 a_\eta = \kappa q_x^2, \quad a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2$$

von jedem beliebigen Werthsysteme x_1, x_2, x_3, x_4 identisch befriedigt werden.

Mit diesen Identitäten besteht dann zugleich folgende:

$$\lambda \pi p_x^2 + \mu \kappa q_x^2 + \nu \varrho r_x^2 = \lambda a_x^2 a_\xi + \mu a_x^2 a_\eta + \nu a_x^2 a_\zeta = a_x^2 a_{\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta}.$$

Daher werden sich gleichzeitig mit den gegebenen drei Flächen stets alle Flächen des durch dieselben bestimmten Netzes als Polarflächen ein und derselben Fläche dritter Ordnung auffassen lassen; da es nun in einem Oberflächennetze zweiter Ordnung — ausser in einem ganz speciellen Falle — stets unendlich viele Flächen ohne Doppelpunkt giebt, so sollen die drei gegebenen als von dieser allgemeinen Art vorausgesetzt werden.

Die in (1) enthaltenen 30 Gleichungen besitzen die Eigenthümlichkeit, dass nach der leicht ausführbaren Elimination der Coefficienten

*) Die Unzuverlässigkeit der blossen Constantenabzählung ist sehr deutlich von Clebsch bei der Darstellung einer biquadratischen ternären Form als Summe von fünf Biquadraten (Borch. J. Bd. 59, p. 143) hervorgehoben worden. Darauf beruht auch die in der Einleitung erwähnte falsche Annahme Salmon's, dass drei quadratische quaternäre Formen stets gleichzeitig als Summen derselben fünf Quadrate dargestellt werden können.

von a_x^3 noch 12 Gleichungen zwischen den ξ_i , η_i , ξ_i , π , κ , ϱ übrig bleiben. Polarisiren wir nämlich die Identitäten (1) nach einem beliebigen Werthsysteme y_1, y_2, y_3, y_4 , so ergeben sich die ferneren Identitäten:

$$a_x a_y a_z = \pi p_x p_y, \quad a_x a_y a_\eta = \kappa q_x q_y, \quad a_x a_y a_z = \varrho r_x r_y$$

und hieraus die folgenden:

$$(2) \quad \kappa q_x q_z = \varrho r_x r_\eta, \quad \varrho r_x r_\xi = \pi p_x p_z, \quad \pi p_x p_\eta = \kappa q_x q_\xi$$

oder in nichtsymbolischer Form das 12 Gleichungen enthaltende System:

$$(2^a) \quad \begin{cases} \kappa \sum_{\lambda} q_{\lambda\mu} \xi_{\lambda} = \varrho \sum_{\lambda} r_{\lambda\mu} \eta_{\lambda}, \\ \varrho \sum_{\lambda} r_{\lambda\mu} \xi_{\lambda} = \pi \sum_{\lambda} p_{\lambda\mu} \xi_{\lambda}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \\ \pi \sum_{\lambda} p_{\lambda\mu} \eta_{\lambda} = \kappa \sum_{\lambda} q_{\lambda\mu} \xi_{\lambda}, \end{cases}$$

Die Annahme $\pi = 0$, $\kappa = 0$, $\varrho = 0$ führt auf die schon erwähnten, uneigentlichen Lösungen; die Annahme, dass zwei oder eine von den Grössen π , κ , ϱ verschwinden, erfordert Specialitäten für das Netz und die Fläche dritter Ordnung, die wegen ihres geringen Interesses von vornherein ausgeschlossen werden sollen; daher wird es hinreichen, π , κ , ϱ als von Null verschieden zu betrachten.

Sollen nun die 12 in Bezug auf die 12 Grössen $\frac{1}{\pi} \xi_i$, $\frac{1}{\kappa} \eta_i$, $\frac{1}{\varrho} \xi_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) linearen und homogenen Gleichungen (2^a) wenigstens ein gemeinsames Lösungssystem besitzen, so muss ihre Determinante

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{11} - r_{12} - r_{13} - r_{14} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{21} - r_{22} - r_{23} - r_{24} & q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{31} - r_{32} - r_{33} - r_{34} & q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{41} - r_{42} - r_{43} - r_{44} & q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{11} - p_{12} - p_{13} - p_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{21} - p_{22} - p_{23} - p_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{31} - p_{32} - p_{33} - p_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{41} - p_{42} - p_{43} - p_{44} \\ -q_{11} - q_{12} - q_{13} - q_{14} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{21} - q_{22} - q_{23} - q_{24} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{31} - q_{32} - q_{33} - q_{34} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{41} - q_{42} - q_{43} - q_{44} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Dies ist eine sogenannte Determinante gauche symétrique und zwar geraden Grades und daher ein volles Quadrat*). Wir bezeichnen

*) Cf. Baltzer, Determinanten. 4. Aufl. §. 5. 8. I.

sie demnach durch Λ'^2 ; um Λ' selbst zu finden, multipliciren wir sie zweimal mit der symmetrischen Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma\delta)^3;$$

daun ergibt sich, wenn:

$$\sum_{i,k} p_{ik} x_i y_k = P(xy), \quad \sum_{i,k} q_{ik} x_i y_k = Q(xy), \quad \sum_{i,k} r_{ik} x_i y_k = R(xy)$$

gesetzt wird, wiederum eine Determinante gauche symétrique:

$$\Lambda'^2 (\alpha\beta\gamma\delta)^6 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & R(\alpha\alpha) \dots & R(\alpha\delta) - Q(\alpha\alpha) \dots - Q(\alpha\delta) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & R(\delta\alpha) \dots & R(\delta\delta) - Q(\delta\alpha) \dots - Q(\delta\delta) \\ -R(\alpha\alpha) \dots - R(\alpha\delta) & 0 & \dots & 0 & P(\alpha\alpha) \dots & P(\alpha\delta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -R(\delta\alpha) \dots - R(\delta\delta) & 0 & \dots & 0 & P(\delta\alpha) \dots & P(\delta\delta) \\ Q(\alpha\alpha) \dots & Q(\alpha\delta) - P(\alpha\alpha) \dots - P(\alpha\delta) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q(\delta\alpha) \dots & Q(\delta\delta) - P(\delta\alpha) \dots - P(\delta\delta) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Die bisher beliebig gelassenen 16 Grössen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) werden am zweckmässigsten als die Coordinaten des den Flächen $q_x^2=0$ und $r_x^2=0$ gemeinsamen Systems harmonischer Pole definiert; alsdann ist:

$$Q(\alpha\beta)=0, \quad Q(\alpha\gamma)=0, \quad Q(\alpha\delta)=0, \quad Q(\gamma\delta)=0, \quad Q(\delta\beta)=0, \quad Q(\beta\gamma)=0; \\ R(\alpha\beta)=0, \quad R(\alpha\gamma)=0, \quad R(\alpha\delta)=0, \quad R(\gamma\delta)=0, \quad R(\delta\beta)=0, \quad R(\beta\gamma)=0.$$

Die letzte Determinante reducirt sich dann, wenn man ihre vier letzten Verticalreihen resp. mit $R(\alpha\alpha), R(\beta\beta), R(\gamma\gamma), R(\delta\delta)$ multiplicirt und zu den entsprechenden der vier mittleren, mit $Q(\alpha\alpha)$ resp.

$Q(\beta\beta)$, $Q(\gamma\gamma)$, $Q(\delta\delta)$ multiplicirten Verticalreihen addirt, auf eine achtgliedrige Determinante. Verfährt man nun mit dieser in ähnlicher Weise, indem man die ersten vier Horizontalreihen resp. mit $Q(\alpha\alpha)$, $Q(\beta\beta)$, $Q(\gamma\gamma)$, $Q(\delta\delta)$ und die letzten vier mit $R(\alpha\alpha)$, $R(\beta\beta)$, $R(\gamma\gamma)$, $R(\delta\delta)$ multiplicirt und diese entsprechend zu jenen addirt, so ergibt sich endlich eine viergliederige Determinante und zwar wiederum gauche symétrique, nämlich, wenn $Q(xx) = Q(x)$, $R(xx) = R(x)$ gesetzt wird:

$$\Lambda'^2(\alpha\beta\gamma\delta)^6 = \begin{vmatrix} 0 & P(\alpha\beta) [Q(\alpha)R(\beta) - R(\alpha)Q(\beta)] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P(\beta\alpha) [Q(\beta)R(\alpha) - R(\beta)Q(\alpha)] & 0 & P(\gamma\beta) [Q(\gamma)R(\beta) - R(\gamma)Q(\beta)] & 0 & 0 & 0 \\ P(\gamma\alpha) [Q(\gamma)R(\alpha) - R(\gamma)Q(\alpha)] & P(\gamma\beta) [Q(\gamma)R(\beta) - R(\gamma)Q(\beta)] & 0 & P(\delta\gamma) [Q(\delta)R(\gamma) - R(\delta)Q(\gamma)] & 0 & 0 \\ P(\delta\alpha) [Q(\delta)R(\alpha) - R(\delta)Q(\alpha)] & P(\delta\beta) [Q(\delta)R(\beta) - R(\delta)Q(\beta)] & P(\delta\gamma) [Q(\delta)R(\gamma) - R(\delta)Q(\gamma)] & 0 & 0 & 0 \\ P(\alpha\gamma) [Q(\alpha)R(\gamma) - R(\alpha)Q(\gamma)] & P(\alpha\delta) [Q(\alpha)R(\delta) - R(\alpha)Q(\delta)] & P(\beta\gamma) [Q(\beta)R(\gamma) - R(\beta)Q(\gamma)] & P(\beta\delta) [Q(\beta)R(\delta) - R(\beta)Q(\delta)] & 0 & 0 \\ P(\beta\gamma) [Q(\beta)R(\gamma) - R(\beta)Q(\gamma)] & P(\beta\delta) [Q(\beta)R(\delta) - R(\beta)Q(\delta)] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P(\delta\gamma) [Q(\delta)R(\gamma) - R(\delta)Q(\gamma)] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Für eine solche lässt sich aber die Quadratwurzel sofort nach der einfachen Formel:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2$$

herstellen; es wird

$$\begin{aligned} \Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 &= P(\alpha\beta)P(\gamma\delta) [Q(\alpha)R(\beta) - R(\alpha)Q(\beta)] [Q(\gamma)R(\delta) - R(\gamma)Q(\delta)] \\ &\quad + P(\alpha\gamma)P(\delta\beta) [Q(\alpha)R(\gamma) - R(\alpha)Q(\gamma)] [Q(\delta)R(\beta) - R(\delta)Q(\beta)] \\ &\quad + P(\alpha\delta)P(\beta\gamma) [Q(\alpha)R(\delta) - R(\alpha)Q(\delta)] [Q(\beta)R(\gamma) - R(\beta)Q(\gamma)] \end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{aligned} &= [Q(\alpha)Q(\beta)R(\gamma)R(\delta) + Q(\gamma)Q(\delta)R(\alpha)R(\beta)] [P(\alpha\delta)P(\beta\gamma) - P(\alpha\gamma)P(\delta\beta)] \\ &\quad + [Q(\alpha)Q(\gamma)R(\delta)R(\beta) + Q(\delta)Q(\beta)R(\alpha)R(\gamma)] [P(\alpha\beta)P(\gamma\delta) - P(\alpha\delta)P(\beta\gamma)] \\ &\quad + [Q(\alpha)Q(\delta)R(\beta)R(\gamma) + Q(\beta)Q(\gamma)R(\alpha)R(\delta)] [P(\alpha\gamma)P(\delta\beta) - P(\alpha\beta)P(\gamma\delta)]. \end{aligned}$$

Um nun den Factor $(\alpha\beta\gamma\delta)^3$ wieder zu beseitigen, wird am besten die symbolische Bezeichnung eingeführt; dies giebt:

$$\begin{aligned} \Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 &= (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2) p_\alpha p_\beta' (p_\gamma p_\gamma' - p_\gamma p_\delta') \\ &\quad + (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2) p_\alpha p_\gamma' (p_\beta p_\delta' - p_\beta p_\gamma') \\ &\quad + (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2) p_\alpha p_\delta' (p_\gamma p_\beta' - p_\gamma p_\gamma') \end{aligned}$$

oder durch Vertauschung der gleichwerthigen Symbole p und p' und Addition des Resultates:

$$(4) \quad - 2\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3$$

$$\begin{aligned} &= (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2) (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') \\ &+ (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2) (p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha') (p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') \\ &+ (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2) (p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha') (p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta'). \end{aligned}$$

(Diese Gleichung wird weiter unten [vgl. § 6.] noch eine anderweitige Anwendung finden.)

Man bemerke nun, dass in Folge der den Grössen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ verliehenen Bedeutung:

$$\begin{aligned} (4^a) \quad q_\alpha^2 q_\beta'^2 (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') &= \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_\alpha' & p_\beta' & p_\gamma' & p_\delta' \\ q_\alpha^2 & q_\alpha q_\beta & q_\alpha q_\gamma & q_\alpha q_\delta \\ q_\beta' q_\alpha' & q_\beta'^2 & q_\beta' q_\gamma' & q_\beta' q_\delta' \end{vmatrix} = q_\alpha q_\beta' \Sigma \pm p_\alpha p_\beta' q_\gamma q_\delta' = \\ &\quad \frac{1}{2} (q_\alpha q_\beta' - q_\beta q_\alpha') (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') (\alpha\beta\gamma\delta), \\ r_\gamma^2 r_\delta'^2 (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') &= \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_\alpha' & p_\beta' & p_\gamma' & p_\delta' \\ r_\gamma r_\alpha & r_\gamma r_\beta & r_\gamma^2 & r_\gamma r_\delta \\ r_\delta' r_\alpha' & r_\delta' r_\beta' & r_\delta' r_\gamma' & r_\delta'^2 \end{vmatrix} = r_\gamma r_\delta' \Sigma \pm p_\alpha p_\beta' r_\gamma r_\delta' = \\ &\quad \frac{1}{2} (r_\gamma r_\delta' - r_\delta r_\gamma') (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') (\alpha\beta\gamma\delta), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') \\ = \frac{1}{4} (q_\alpha q_\beta' - q_\beta q_\alpha') (r_\gamma r_\delta' - r_\delta r_\gamma') (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') (\alpha\beta\gamma\delta)^2 \end{aligned}$$

ist; da sich die übrigen Terme der Formel (4) in ähnlicher Weise umgestalten, nimmt diese, wenn auf beiden Seiten der Factor $(\alpha\beta\gamma\delta)^2$ fortgelassen wird, die Gestalt an:

$$\begin{aligned} - 8\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta) &= (pp'qq')(pp'rr') \times \\ &\quad [(q_\alpha q_\beta' - q_\beta q_\alpha') (r_\gamma r_\delta' - r_\delta r_\gamma') + (q_\gamma q_\delta' - q_\delta q_\gamma') (r_\alpha r_\beta' - r_\beta r_\alpha') \\ &\quad + (q_\alpha q_\gamma' - q_\gamma q_\alpha') (r_\delta r_\beta' - r_\beta r_\delta') + (q_\delta q_\beta' - q_\beta q_\delta') (r_\alpha r_\gamma' - r_\gamma r_\alpha') \\ &\quad + (q_\alpha q_\delta' - q_\delta q_\alpha') (r_\beta r_\gamma' - r_\gamma r_\beta') + (q_\beta q_\gamma' - q_\gamma q_\beta') (r_\alpha r_\delta' - r_\delta r_\alpha')] \\ &= (pp'qq')(pp'rr') \begin{vmatrix} q & q_\beta & q_\gamma & q_\delta \\ q_\alpha' & q_\beta' & q_\gamma' & q_\delta' \\ r_\alpha & r_\beta & r_\gamma & r_\delta \\ r_\alpha' & r_\beta' & r_\gamma' & r_\delta' \end{vmatrix} = (pp'qq')(pp'rr')(qq'rr')(\alpha\beta\gamma\delta), \end{aligned}$$

$$\text{oder } 8\Lambda' = (qrq'r')(rpr'p')(pqp'q').$$

Setzt man also:

$$(5) \quad \Lambda = (qrq'r')(rpr'p')(pqp'q'),$$

so ist die Determinante (3) = $\frac{1}{64}\Lambda^2$.

Es besteht nun folgender Satz: Ist die Determinante eines Systems von einer geraden Anzahl linearer, homogener Gleichungen *gauche symétrique*, so besitzt dieses System entweder — falls dieselbe nicht verschwin-

det — (ausser dem nichtssagenden, aus lauter Nullen bestehenden) gar kein, oder — falls sie verschwindet — im Allgemeinen zwei von einander linear unabhängige*) Auflösungssysteme, also abgesehen von einem Proportionalitätsfactor eine einfache Mannigfaltigkeit solcher**).

Hieraus folgt, dass die Gleichungen (2^a) im Allgemeinen keine gemeinsame Lösung haben; ist aber die Bedingung $\Lambda=0$ erfüllt, so wird ihnen von je einer einfachen Mannigfaltigkeit von Punkten ξ , η , ζ genügt. Die Auflösung derselben ergibt, wenn P die Discriminante von p_x^2 und π_i die Symbole der adjungirten Form von p_x^2 bedeuten:

$$(6) \quad \begin{cases} \pi P \cdot \eta_i = \kappa q_i q_\pi \pi_i, \\ \pi P \cdot \xi_i = \varrho r_i r_\pi \pi_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

$$(7) \quad q_\pi r_\pi \sum_{\lambda} (q r)_{i\lambda} \xi_\lambda = 0.$$

Die Determinante der letzten vier Gleichungen kann sich nur durch einen Factor von Λ^2 unterscheiden, und man kann auch auf diesem Wege Λ auf die Form (5) reduciren. Verschwindet diese, so bleiben nur zwei von den vier Gleichungen von einander linear unabhängig; der Punkt ξ und in derselben Weise η und ζ sind daher nur auf je eine Gerade beschränkt, aber in der Weise, dass jedem Punkte der einen Geraden je ein ganz bestimmter Punkt der beiden anderen Geraden zugeordnet ist, wie es die Gleichungen (6) verlangen. Diese Geraden sollen ihrer Bedeutung wegen kurz als die Polgeraden der Flächen $p_x^2=0$, resp. $q_x^2=0$, $r_x^2=0$ bezeichnet werden. Die Gleichung der Polgeraden in Liniencoordinaten $(uv)_{\lambda}$ ergibt sich aus (7) ohne Weiteres; für $p_x^2=0$ lautet sie $q_\pi r_\pi (q r u v) = 0$, und dies ist in der That wegen der Bedingung $\Lambda=0$ die Gleichung eines speciellen Complexes, d. h. einer Geraden. Allgemeiner ist jeder Oberfläche des Netzes, das durch $p_x^2=0$, $q_x^2=0$, $r_x^2=0$ bestimmt ist, eine Polgerade zugeordnet***). Dem beliebigen Punkte ξ auf der Polgeraden von $p_x^2=0$ entspricht auf jeder Polgeraden ein einziger bestimmter Punkt; die Coordinaten des entsprechenden Punktes auf der Polgeraden von

*) D. h. sämtliche Auflösungssysteme setzen sich aus zweien linear zusammen.

**) Zum Beweise dieses Satzes sei bemerkt, dass — wie sich namentlich unter Benutzung von Baltzer a. a. O. § 7, 2 leicht ergibt — mit einer Determinante gauche symétrique geraden Grades zugleich ihre ersten Unterdeterminanten verschwinden, die zweiten hingegen im Allgemeinen nicht mehr; dies verbinde man mit dem ibid. § 8, 2 angegebenen Satze von Kronecker.

***). Im Falle eines allgemeinen Netzes stellt $q_\pi r_\pi (q r u v) = 0$ nur dann eine Gerade dar, wenn $p_x^2=0$ ein Kegel des Netzes ist, und zwar ist dies diejenige Gerade, in der sich die Polarebenen der Spitze dieses Kegels in Bezug auf alle Flächen des Netzes schneiden; durch die Bedingung $\Lambda=0$ ist aber jeder Fläche, auch wenn sie kein Kegel ist, eine Gerade zugeordnet, nämlich die Polgerade.

$\lambda p_x^2 + \mu q_x^2 + \nu r_x^2 = 0$ sind in Analogie mit den Gleichungen (6) proportional den Grössen:

$$(\lambda p_\xi p_\pi + \mu q_\xi q_\pi + \nu r_\xi r_\pi) \pi_i \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Nun ist aber allgemein:

$$p_x p_\pi u_\pi = p_x (p p' p'' p''') (u p' p'' p''')$$

und dies nach einer der Identität (I) analog gebildeten:

$$= (p p' p'' p''') [u_x (p p' p'' p''') + p_x' (u p p' p''') - p_x'' (u p p' p''') + p_x''' (u p p' p''')]$$

oder nach geeigneter Vertauschung gleichwerthiger Symbole:

$$\begin{aligned} &= (p p' p'' p''') [u_x (p p' p'' p''') - p_x (u p' p'' p''') - p_x (u p' p'' p''') \\ &\quad - p_x (u p' p'' p''')] \\ &= u_x p_\pi^2 - 3 p_x p_\pi u_\pi, \end{aligned}$$

also

$$p_x p_\pi u_\pi = \frac{1}{4} p_\pi^2 \cdot u_x. \quad (\omega)$$

Daher ist $p_\xi p_\pi \pi_i$ proportional zu ξ_i , ebenso wegen (6) $q_\xi q_\pi \pi_i$ zu η_i und $r_\xi r_\pi \pi_i$ zu ξ_i , und es werden demnach die obigen Coordinaten proportional Ausdrücken von der Form $\lambda' \xi_i + \mu' \eta_i + \nu' \xi_i$; daraus folgt: Einander entsprechende Punkte auf den Polgeraden des Netzes liegen in ein und derselben Ebene. (Ebenso wird klar, dass einander entsprechende Punkte auf denjenigen Polgeraden, die einem aus dem Netze herausgenommenen Büschel entsprechen, auf ein und derselben Geraden liegen.) Durchläuft ein Punkt eine Polgerade, so beschreiben die entsprechenden Punkte projectivische Punktreihen; die Ebenen, in denen einander entsprechende Punkte liegen, umhüllen daher eine abwickelbare Fläche vierter Ordnung, deren Rückkehrcurve eine Raumcurve dritter Ordnung C_3 ist*). Es ist dies eine covariante Curve des Netzes, die erst in Folge seiner Eigenthümlichkeit, die Bedingung $\Lambda = 0$ zu befriedigen, zu den covarianten Gebilden des Netzes hinzutritt.

Der Zusammenhang zwischen den Polgeraden und dieser Raumcurve C_3 wird durch den folgenden, aus den Gleichungen (2) sich sofort ergebenden Satz klar: Ist ξ ein Punkt der zu $p_x^2 = 0$ gehörigen Polgeraden und ξ' der Schnittpunkt der Polarebenen von ξ in Bezug

*) Setzen wir

$$p_x q_x r_x (p q r u) = l_x^3 u_\lambda$$

und sind ξ und ξ' zwei Punkte der Polgeraden von p_x^2 , bezeichnen wir ferner

$$l_\xi^3 p_\lambda p_x = A_x, \quad l_\xi^3 l_{\xi'} p_\lambda p_x = B_x, \quad l_\xi^3 l_{\xi'}^2 p_\lambda p_x = C_x, \quad l_\xi^3 p_\lambda p_x = D_x,$$

so ist die Gleichung der Fläche 4. Ordnung

$$4(A_x C_x - B_x^2)(B_x D_x - C_x^2) - (A_x D_x - B_x C_x)^2 = 0,$$

und die Raumcurve C_3 ist dargestellt durch:

$$A_x : B_x : C_x : D_x = 1 : \sigma : \sigma^2 : \sigma^3.$$

auf die Flächen des Netzes, so ist die Polare von ξ' bezüglich $p_x^2=0$ eine Schmiegungeebene der Raumcurve C_3 und zwar diejenige, die durch ξ geht; durchläuft daher ξ die Polgerade, so umhüllt gleichzeitig diese Polare die Raumcurve C_3 .

Schliesslich möge noch eine Interpretation der Gleichungen (2) erwähnt werden; multiplicirt man diese nach der Reihe mit drei beliebigen Constanten A, B, Γ und addirt, so ergibt sich:

$$\pi p_{(\Gamma\eta-B\xi)} p_x + \kappa q_{(A\xi-\Gamma\xi)} q_x + \varrho r_{(B\xi-A\eta)} r_x = 0;$$

demnach haben die drei Ebenen

$$p_{(\Gamma\eta-B\xi)} p_x = 0, \quad q_{(A\xi-\Gamma\xi)} q_x = 0, \quad r_{(B\xi-A\eta)} r_x = 0$$

eine Gerade gemein, woraus der Satz folgt: Sind ξ, η, ζ drei Punkte, die den Gleichungen (2) genügen, und trifft eine Gerade das von ihnen gebildete Dreieck in drei Punkten und zwar die Gerade $(\eta\xi)$ in α , $(\xi\zeta)$ in β und $(\xi\eta)$ in γ , so haben die Polaren von α, β, γ in Bezug auf $p_x^2=0$, resp. $q_x^2=0$, $r_x^2=0$ wenigstens eine Gerade gemein.

§ 4.

Im vorigen § hat sich die Bedingung $\Lambda=0$ als eine für die Existenz eigentlicher Lösungen des Problems nothwendige herausgestellt. Sie ergab sich als solche bei der nunmehr vollständig durchgeführten Auflösung der Gleichungen (2), die eine Folge der Gleichungen (1) waren. Um nun auch diese und damit das an die Spitze des § 3. gestellte Problem vollständig zu lösen, wäre zweierlei nachzuweisen: *einmal*, falls die Auflösungen der Gleichungen (2) *sämmtlich* den Gleichungen (1) genügen sollen, dass die Gleichungen (2) die einzigen zwischen $\pi, \kappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ bestehenden Gleichungen sind, die sich durch Elimination der Coefficienten von a_x^3 aus den Gleichungen (1) ergeben; *dann*: wie viel von den Gleichungen (1) zur Bestimmung dieser Coefficienten noch übrig bleiben und von einander unabhängig sind.

Dieser directe Weg für die weitere Behandlung des Problems würde erhebliche Schwierigkeiten bieten, deren uns folgendes einfache, dem des § 2. ganz analoge Verfahren überhebt. Es soll nämlich die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, die den Gleichungen (1) genügt, wirklich hergestellt und dabei nur vorausgesetzt werden, dass die in ihr auftretenden Grössen den Gleichungen (2) genügen; hiermit ist dann der erste Nachweis geliefert. Sodann wird mit Hülfe der gewonnenen Lösung die allgemeinste cubische quaternäre Form angegeben werden, die die Gleichungen (1) befriedigt.

Zunächst möge der allgemeinen cubischen quaternären Form eine zweckdienliche Gestalt gegeben werden. Die Identität (1) liefert folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_x^3 \quad (\xi \eta \xi y) &= a_x^2 \quad [a_\xi(x \eta \xi y) + a_\eta(x \xi \xi y) + a_\zeta(x \xi \eta y)] + a_x^2 a_y \quad (\xi \eta \xi x), \\
a_x^2 a_y \quad (\xi \eta \xi z) &= a_x a_y \quad [a_\xi(x \eta \xi z) + a_\eta(x \xi \xi z) + a_\zeta(x \xi \eta z)] + a_x a_y a_z (\xi \eta \xi x), \\
a_x a_y a_z (\xi \eta \xi t) &= a_y a_z \quad [a_\xi(x \eta \xi t) + a_\eta(x \xi \xi t) + a_\zeta(x \xi \eta t)] + a_y a_z a_t (\xi \eta \xi x).
\end{aligned}$$

Wird die erste mit $(\xi \eta \xi z)(\xi \eta \xi t)$, die zweite mit $(\xi \eta \xi x)(\xi \eta \xi t)$, die dritte mit $(\xi \eta \xi x)^2$ multiplicirt und darauf addirt, so resultirt die gewünschte Darstellung von a_x^3 , die darauf führt, eine Lösung a_x^3 der Gleichungen (1) in folgender Form zu suchen:

$$\begin{aligned}
(8) \quad a_x^3 (\xi \eta \xi y) (\xi \eta \xi z) (\xi \eta \xi t) \\
&= [\pi p_x^2 (x \eta \xi y) + \kappa q_x^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_x^2 (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi z) (\xi \eta \xi t) \\
&\quad + [\pi p_x p_y (x \eta \xi z) + \kappa q_x q_y (x \xi \xi z) + \varrho r_x r_y (x \xi \eta z)] (\xi \eta \xi t) (\xi \eta \xi x) \\
&\quad + [\pi p_y p_z (x \eta \xi t) + \kappa q_y q_z (x \xi \xi t) + \varrho r_y r_z (x \xi \eta t)] (\xi \eta \xi x)^2.
\end{aligned}$$

In der That erweist sich diese Behauptung auch ganz direct als richtig unter alleiniger Annahme, dass $\pi, \kappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ein Lösungssystem der Gleichungen (2) ist. Dazu polarisire man nach ξ_i , dann lassen sich aus dem Resultate mit Hülfe der Gleichungen (2) die Symbole q_i und r_i beseitigen, und die Anwendung der Identität (I) führt sofort auf $a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2$; ebenso ergibt sich $a_x^2 a_\eta = \kappa q_x^2$, $a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2$, w. z. b. w.

In der gewonnenen Lösung (8) sind y_i, z_i, t_i ganz beliebige Grössen, und sie scheint daher eine sehr grosse Mannigfaltigkeit von verschiedenen Formen zu umfassen; ausserdem lassen noch $\pi, \kappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ im Wesentlichen eine einfache Mannigfaltigkeit von Werthen zu. Eine ebenfalls schon im § 2. angewendete Schlussweise ergibt nun aber, dass es überhaupt nur eine zweifache Mannigfaltigkeit von Lösungen für die Gleichungen (1) giebt. Es sei a_x^3 die in (8) gegebene Lösung und A_x^3 eine beliebige, mit der alleinigen Beschränkung, dass beiden ein und dasselbe, den Gleichungen (2) genügende Werthsystem ξ_i, η_i, ζ_i zu Grunde liegen soll; dann ist:

$$\begin{aligned}
A_x^2 A_\xi &= \pi' p_x^2, \quad A_x^2 A_\eta = \kappa' q_x^2, \quad A_x^2 A_\zeta = \varrho' r_x^2, \\
a_x^2 a_\xi &= \pi p_x^2, \quad a_x^2 a_\eta = \kappa q_x^2, \quad a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2,
\end{aligned}$$

worin $\pi', \kappa', \varrho', \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ und $\pi, \kappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ Lösungssysteme von (2) sind; denselben Grössen ξ_i, η_i, ζ_i entsprechen aber, wie aus (2) sofort zu erkennen ist, Grössen π, κ, ϱ , die sich nur um einen allen dreien gemeinsamen Factor ändern können, d. h. $\pi' : \kappa' : \varrho' = \pi : \kappa : \varrho$ oder $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \mu$. Setzt man daher $A_x^3 - \mu a_x^3 = h_x^3$, so ergibt sich aus den obigen Gleichungen hierfür:

$$h_x^2 h_\xi = 0, \quad h_x^2 h_\eta = 0, \quad h_x^2 h_\zeta = 0;$$

d. h. $h_x^3 = 0$ ist eine Fläche mit drei dreifachen Punkten ξ_i, η_i, ζ_i , woraus

$$h_x^3 = v (\xi \eta \xi x)^3$$

bei beliebigem v folgt.

Demnach ist

$$(9) \quad A_x^3 = \mu a_x^3 + \nu (\xi \eta \xi x)^3$$

die allgemeinste Lösung von (1), worin ξ_i, η_i, ζ_i irgend ein Lösungssystem von (2) und a_x^3 die particuläre Lösung (8) bedeutet; und, da die Gleichungen (2) eine einfache Mannigfaltigkeit solcher Systeme liefern, so existirt im Allgemeinen eine einfache Mannigfaltigkeit von Flächenbüscheln dritter Ordnung, d. i. eine doppelte Unendlichkeit*) von Lösungen des Problems, immer unter der Voraussetzung, dass der Bedingung $\Lambda = 0$ genügt wird.

Für a_x^3 ist in (9) eine beliebige der in (8) enthaltenen Formen zu setzen; es bietet sich hier nicht, wie bei dem Problem im § 2. eine einzige, ausgezeichnete und hinreichend einfache Form dar, die hierzu besonders geeignet wäre. Setzt man in (8) $z_i = t_i = y_i$, so wird:

$$(10) \quad a_x^3 (\xi \eta \xi y)^3 \\ = [\pi p_x^2 (x \eta \xi y) + \kappa q_x^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_x^2 (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi y)^2 \\ + [\pi p_x p_y (x \eta \xi y) + \kappa q_x q_y (x \xi \xi y) + \varrho r_x r_y (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi y) (\xi \eta \xi x) \\ + [\pi p_y^2 (x \eta \xi y) + \kappa q_y^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_y^2 (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi x)^2.$$

Dann wird $a_y^3 = 0$, und es stellen daher die in (10) definirten Flächen $a_x^3 = 0$ diejenigen Oberflächen der Schaar (9) dar, die durch den Punkt y gehen; für beliebig gelassene y_i vertritt daher (10) die Gleichung (9) vollständig. Aus (10) folgt:

$$a_x^2 a_y (\xi \eta \xi y)^2 = [\pi p_x p_y (x \eta \xi y) + \kappa q_x q_y (x \xi \xi y) + \varrho r_x r_y (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi y) \\ + [\pi p_y^2 (x \eta \xi y) + \kappa q_y^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_y^2 (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi x)$$

und weiter:

$$a_x a_y^2 (\xi \eta \xi y) = \pi p_y^2 (x \eta \xi y) + \kappa q_y^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_y^2 (x \xi \eta y).$$

Für $p_y^2 = 0, q_y^2 = 0, r_y^2 = 0$, d. h. so oft y ein Basispunkt des Netzes ist, verschwindet daher $a_x a_y^2$ identisch, und $a_x^3 = 0$ enthält einen Doppelpunkt y . Jede Lösung ξ_i, η_i, ζ_i der Gleichungen (2) liefert demnach — entsprechend den 8 Basispunkten — 8 Flächen 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt. Der Berührungskegel in einem solchen hat die Gleichung:

$$s_x^2 = \pi p_x p_y (x \eta \xi y) + \kappa q_x q_y (x \xi \xi y) + \varrho r_x r_y (x \xi \eta y) = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Identitäten $s_x s_\xi = p_x p_y, s_x s_\eta = q_x q_y, s_x s_\zeta = r_x r_y$, die den Zusammenhang der Pole mit den Tangentenebenen an die Flächen des Netzes in seinen Basispunkten leicht erkennen lassen.

Wie aus (9) hervorgeht, findet zwischen den Flächen des zu einer jeden Lösung ξ_i, η_i, ζ_i gehörigen Büschels eine doppelte Berührung

*) Der eine Parameter dieser Schaar tritt im ersten Grade auf, der andere im achten Grade, der sich nicht erniedrigen zu lassen scheint.

in einer ebenen Curve dritter Ordnung statt; diese liegt in der durch ξ, η, ζ gehenden Ebene und ist diejenige Curve dritter Ordnung, deren Polarkegelschnittnetz identisch ist mit demjenigen Netze, das von jener Ebene aus dem gegebenen Flächennetze zweiter Ordnung ausgeschnitten wird.

Ausser den 8 erwähnten Oberflächen mit einem Doppelpunkt und der dreifach gezählten Ebene durch ξ, η, ζ giebt es in jedem einer Lösung ξ_i, η_i, ζ_i entsprechenden Büschel keine Oberfläche mit vielfachem Punkte; denn durch einen solchen müssten auch ihre Polarflächen gehen, also $p_x^2 = 0, q_x^2 = 0, r_x^2 = 0$ in ihm einen gemeinsamen Punkt haben, was nur für die 8 Basispunkte der Fall ist.

Hiermit ist das Problem vollständig gelöst, und es möge hier beiläufig darauf aufmerksam gemacht werden, dass es auch mit Hülfe der Theorie der simultanen, partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung behandelt und umgekehrt als eine Anwendung derselben verwerthet werden kann. Es ist nämlich offenbar identisch mit der Aufgabe, eine Function f von $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu bestimmen, welche den Differentialgleichungen genügt:

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3\pi p^2$$

$$\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \eta_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3\pi q_x^2$$

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3\rho r_x^2,$$

wozu noch die Bedingung der Homogenität tritt:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3f.$$

Die Integration dieses Systems simultaner, partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung ergibt sich aus einem von Herrn Mayer*) bewiesenen Satze, (der die Grundlage der Lie'schen Integrationsmethode bildet und) dem in Rücksicht auf den vorliegenden Fall die Form gegeben werden kann:

„Sind $F_1, \dots, F_{m-1}$ solche $m-1$ Functionen von $q_1, \dots, q_n, p_{m+1}, \dots, p_n, f$, (wo p_x zur Abkürzung für $\frac{\partial f}{\partial q_x}$ gesetzt ist), welche „den Bedingungsgleichungen:

*) Math. Annalen Bd. VI, p. 188, Satz IX. Statt desselben kann man ebenso bequem auch die Jacobi-Mayer'sche Methode (Math. Annalen Bd. V, p. 466) anwenden, die in dem vorliegenden Falle mit der du Bois-Reymond'schen Methode zur Integration derjenigen linearen totalen Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht (Borchardt's Journal Bd. 70, p. 312), zusammenfällt.

$$n(\alpha) \quad (F_i - p_i, F_\lambda - p_\lambda) = \sum_i^n \left\{ \frac{\partial (F_i - p_i)}{\partial q_\lambda} \frac{\partial (F_\lambda - p_\lambda)}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial (F_i - p_i)}{\partial p_\lambda} \frac{\partial (F_\lambda - p_\lambda)}{\partial q_\lambda} \right\} = 0$$

„identisch genügen, so besitzen die $m - 1$ partiellen Differentialgleichungen mit zusammen n unabhängigen Variablen:

$$n(\beta) \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} = F_{m-1}$$

„eine gemeinsame vollständige Lösung mit $n - m + 2$ willkürlichen „Constanten, und diese Lösung lässt sich durch vollständige Integration „einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit nur „noch $n - m + 1$ unabhängigen Variablen in folgender Weise finden:

„Man führe an Stelle von $q_1 \dots q_{m-1}$ die Grössen $xx_1 \dots x_{m-1}$ als „neue Variable durch die Gleichungen:

$$n(\gamma) \quad \begin{cases} q_1 = a_1 + (x - a) x_1, \\ \vdots \\ q_{m-1} = a_{m-1} + (x - a) x_{m-1} \end{cases}$$

„ein, in denen $aa_1 \dots a_{m-1}$ unbestimmte Constanten sind; hierdurch „verwandeln sich die Gleichungen (α) in folgende:

$$n(\delta) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{m-1} x_\lambda F_\lambda, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = F_1 (x - a), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = F_{m-1} (x - a).$$

„Ist nun $V = \psi (xx_1 \dots x_{m-1} q_m \dots q_n b_m \dots b_n b)$ eine beliebige „vollständige Lösung der ersten Gleichung (δ) , in der $x_1 \dots x_{m-1}$ als „Constante zu betrachten sind, so setze man $V = \psi + \sum_{n=m}^n c_n a_n$ und substituirt darin für $a_m \dots a_n b_m \dots b_n$ ihre Werthe aus den $2(n - m + 1) + 1$ „Gleichungen:

$$n \quad \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial b_\lambda}}{\frac{\partial \psi}{\partial b_\lambda}} = \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial b}}{\frac{\partial \psi}{\partial b}}, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial a_\lambda} = c_\lambda \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial b}}{\frac{\partial \psi}{\partial b}}, \quad \psi' = c, \quad \lambda = m, \dots, n,$$

„worin ψ' durch die Substitution $x = a, q_m = a_m, \dots, q_n = a_n$ aus ψ „entsteht.

„Man erhält hierdurch eine Function V von $xx_1 \dots x_{m-1} q_m \dots q_n$ „und den willkürlichen Constanten $c_m \dots c_n c$, die eine gemeinschaftliche, vollständige Lösung von (δ) ist und daher durch die umgekehrte „Substitution (γ) übergeht in eine vollständige Lösung der gegebenen „Gleichungen (β) “.

Wendet man diesen Satz auf das vorliegende System von 4 partiellen Differentialgleichungen mit 4 unabhängigen Variablen an, so ergeben die Gleichungen (α) als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer gemeinsamen Lösung wiederum die obigen 12 Gleichungen (2^a), die die Grössen ξ_i , η_i , ζ_i in der angegebenen Weise bestimmen. Um nach Vorschrift des Satzes die vollständige Lösung selbst zu finden, löse man zunächst das System nach $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}$ auf; dies giebt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{3}{\tau_x} \left[f \cdot \tau_i - \{ \pi p_x^2 (\eta \xi x)_i + \kappa q_x^2 (\xi \xi x)_i + \varrho r_x^2 (\xi \eta x)_i \} \right], \quad i=1, 2, 3, 4,$$

wo $\tau_i = (\xi \eta \xi)_i$ ist. Sodann wende man die Substitution:

$$x_1 = y_1 + t \cdot t_1, \quad x_2 = y_2 + t \cdot t_2, \quad x_3 = y_3 + t \cdot t_3, \quad x_4 = y_4 + t \cdot t_4$$

auf die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_1^4 t_i \cdot \frac{3}{\tau_x} \left\{ f \cdot \tau_i - [\pi p_x^2 (\eta \xi x)_i + \kappa q_x^2 (\xi \xi x)_i + \varrho r_x^2 (\xi \eta x)_i] \right\}$$

an, wodurch dieselbe übergeht in:

$$(\tau_y + t \cdot \tau_t) \frac{\partial f}{\partial t} - 3 \tau_t \cdot f = -3 (A_1 + 2 A_2 t + A_3 t^2),$$

wo zur Abkürzung:

$$\pi p_y^2 (t \eta \xi y) + \kappa q_y^2 (t \xi \xi y) + \varrho r_y^2 (t \xi \eta y) = A_1,$$

$$\pi p_y p_t (t \eta \xi y) + \kappa q_y q_t (t \xi \xi y) + \varrho r_y r_t (t \xi \eta y) = A_2,$$

$$\pi p_t^2 (t \eta \xi y) + \kappa q_t^2 (t \xi \xi y) + \varrho r_t^2 (t \xi \eta y) = A_3$$

gesetzt ist, und integriere diese Gleichung, wo t allein als unabhängige Variable zu betrachten ist. Die Lagrange'sche Methode der Variation der Constanten giebt dann als vollständige Lösung:

$$f = b(\tau_y + t \cdot \tau_t)^3 + \frac{A_3}{\tau_t^3} (\tau_y + t \cdot \tau_t)^2 + \frac{1}{\tau_t^2} (A_2 + A_3 t) (\tau_y + t \cdot \tau_t) + \frac{1}{\tau_t} (A_1 + 2 A_2 t + A_3 t^2) = \psi(t t_1 t_2 t_3 t_4 b).$$

Es erübrigt jetzt nur noch, für b seinen Werth aus

$$\psi' = \psi(0 \ t_1 t_2 t_3 t_4 b) = b \tau_y^3 + \frac{A_3 \tau_y^2}{\tau_t^3} + \frac{A_2 \tau_y}{\tau_t^2} + \frac{A_1}{\tau_t} = c$$

in $f = \psi$ einzusetzen und schliesslich die Substitution:

$$t_1 = \frac{x_1 - a_1}{t}, \quad t_2 = \frac{x_2 - a_2}{t}, \quad t_3 = \frac{x_3 - a_3}{t}, \quad t_4 = \frac{x_4 - a_4}{t}$$

zu machen, so ergibt sich als vollständige Lösung des vorliegenden Problems ganz in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (10) und (9):

$$f \cdot (\xi \eta \xi y)^3 = c (\xi \eta \xi x)^3 + [\pi p_x^2 \cdot (x \eta \xi y) + \alpha q_x^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_x^2 (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi y)^2 \\ + [\pi p_x p_y (x \eta \xi y) + \alpha q_x q_y (x \xi \xi y) + \varrho r_x r_y (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi y) (\xi \eta \xi x) \\ + [\pi p_y^2 (x \eta \xi y) + \alpha q_y^2 (x \xi \xi y) + \varrho r_y^2 (x \xi \eta y)] (\xi \eta \xi x)^2.$$

§ 5.

Um die algebraische Bedeutung der für das behandelte Problem fundamentalen Combinante $\Lambda = (q r q' r') (r p r' p') (p q p' q')$ klar zu Tage treten zu lassen, soll ihr Zusammenhang mit anderen Combinanten des Netzes aufgesucht werden. Dass Λ in der That eine Combinante ist, ergibt sich rein algebraisch unmittelbar aus einem Satze von Herrn Gordan*). Gelegentlich und ohne Beweis theilt Frahm**) mit, dass sich sämtliche Combinanten des Netzes als invariante Bildungen der beiden Combinanten $L = p_x q_x r_x (p q r u)$ und $M = (q r u v) (r p u v) (p q u v)$ darstellen lassen, was sich mittelst eines Verfahrens leicht bewahrheiten lässt, analog einem von Herrn Prof. Rosanes bei ähnlicher Gelegenheit angewendeten***).

Bekanntlich†) ist jede Combinante der Formen p_x^2, q_x^2, r_x^2 eine Invariante, Covariante, etc. der Form $R = \sum \pm p_x^2 q_y^2 r_z^2$. Es braucht also nur gezeigt zu werden, dass sich diese Form R durch die Coefficienten der Formen L und M allein darstellen lässt. Zu diesem Zwecke mögen für die Formen L, M eigene Symbole eingeführt werden, und zwar:

$$(11) \quad L = p_x q_x r_x (p q r u) = l_x^3 u_x,$$

$$(12) \quad M = (q r u v) (r p u v) (p q u v) = (m n u v)^3 \dagger \dagger).$$

Durch Polarisation erhalten wir:

$$(\alpha) \quad 3 l_x^2 l_y u_x = (p q r u) (p_y q_x r_x + q_y r_x p_x + r_y p_x q_x)$$

$$(\beta) \quad 3 (m n u v) (m_x n_y - m_y n_x)^2 = (q r u v) (r_x p_y - r_y p_x) (p_x q_y - p_y q_x) \\ + (r p u v) (p_x q_y - p_y q_x) (q_x r_y - q_y r_x) \\ + (p q u v) (q_x r_y - q_y r_x) (r_x p_y - r_y p_x).$$

Multiplizieren wir (α) mit v_y und wenden rechts die aus (I) fließende Identität an:

*) Gordan, über Combinanten; Math. Ann. Bd. V. p. 116.

**) A. a. O.

*** Math. Ann. Bd. VI, p. 278 f.

†) Gordan a. a. O.

††) In Betreff der Zulässigkeit der letzteren, symbolischen Darstellung eines Complexes vgl. Clebsch, Math. Ann. Bd. II, p. 1 ff.

$$-v_x(pqru) = p_x(qruv) + q_x(rpuv) + r_x(pquv) - u_x(pqrv),$$

subtrahiren von der so erhaltenen Gleichung die aus ihr durch Vertauschung von u und v entstehende und schliesslich noch die Gleichung (β), so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad & 3l_x^2 l_y (u_y v_\lambda - v_y u_\lambda) - 3(m n u v) (m_x n_y - m_y n_x)^2 \\ & = (qruv) (2p_y^2 q_x r_x + p_x^2 q_y r_y) + (rpuv) (2q_y^2 r_x p_x + q_x^2 r_y p_y) \\ & + (pquv) (2r_y^2 p_x q_x + r_x^2 p_y q_y). \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2 und zieht dann von ihr diejenige Gleichung ab, die aus (γ) durch Vertauschung von x und y folgt, so erhält man:

$$\begin{aligned} (13) \quad & p_y^2 q_x r_x (qruv) + q_y^2 r_x p_x (rpuv) + r_y^2 p_x q_x (pquv) \\ & = 2l_x^2 l_y (u_y v_\lambda - v_y u_\lambda) - l_x l_y^2 (u_x v_\lambda - v_x u_\lambda) (m_x n_y - m_y n_x)^2 (m n u v). \end{aligned}$$

Wird diese Gleichung nach z_i polarisirt und schliesslich $(uv)_{ik} = (zx)_{ik}$ gesetzt, so wird endlich:

$$(14) \quad R = 4l_x l_y l_z (xyz\lambda) + 2(m_y n_z - m_z n_y) (m_z n_x - m_x n_z) (m_x n_y - m_y n_x).$$

Hiermit ist die gewünschte Darstellung geliefert; Λ muss sich daher als Invariante von L und M darstellen lassen; ganz direct erkennt man sofort, dass:

$$(15) \quad \Lambda = (m n m' n')^3$$

ist, wo m' , n' neue Symbole der Form M sind. Die Combinante Λ ist somit auch eine sehr einfache Invariante der Form M und zwar in ihren Coefficienten ebenfalls quadratisch. Ihre Bildungsweise kann einfach dahin angegeben werden: man bilde neben $M = (qruv)(rpuv)(pquv)$ auch M in den Coordinaten $(xy)_{\lambda\lambda} = (uv)_{\lambda\lambda}$, dann entsteht Λ , wenn die Producte entsprechender Coefficienten beider Formen addirt werden. Die Bedeutung des Verschwindens derartig aus den Coefficienten zweier Formen gleichen Grades mit contragredienten Variablen gebildeter Invarianten ist z. B. für ternäre quadratische Formen von Herrn Prof. Rosanes einer eingehenden Behandlung*) unterworfen worden. Bei Complexgleichungen reicht, da eine solche sowohl in Coordinaten $(uv)_{\lambda\lambda}$, als $(xy)_{\lambda\lambda}$ geschrieben werden kann, schon eine einzige zur Bildung einer derartigen Invariante hin. Das aus dem Verschwinden derselben resultirende Verhalten eines Complexes scheint bisher einer Untersuchung noch nicht unterworfen worden zu sein; ein linearer Complex wird in diesem Falle zu einem speciellen.

*) Math. Ann. Bd. VI, p. 264—312; für Formen mit mehreren Variablen und von beliebigem Grade vgl. Rosanes, Borch. J. Bd. 76.

Die geometrische Bedeutung der Gleichung $M = 0$ ist eine zwiefache; einerseits stellt sie, wie das Clebsch'sche Uebertragungsprincip*) sofort ergibt, den Inbegriff sämtlicher Geraden dar, die die Flächen des Netzes in involutorischen Punktreihen schneiden, andererseits den sämtlicher Tangenten an dieselben.

Die Formel (13) liefert die Mittel die Form $q_\pi r_\pi (qruv)$, die gleich Null gesetzt die Polgerade von $p_x^2 = 0$ darstellt, allein durch die Coefficienten von p_x^2 und den Combinanten L und M auszudrücken; hierzu hat man nur die ganz beliebigen Grössen x_i mit den Symbolen π_i zu identificiren. Nun ist aber, wie schon früher (Gl. (ω) des § 3.) gezeigt worden ist, $p_x p_\pi u_\pi = \frac{1}{2} p_\pi^2 \cdot u_x$; ersetzt man hierin x_i durch (quv) ; und u_i durch q_i , so ergibt sich:

$$p_\pi q_\pi (pquv) = 0$$

und ebenso:

$$r_\pi p_\pi (rpuv) = 0.$$

Daher geht in diesem Falle (13) über in:

$$p_y^2 \cdot q_\pi r_\pi (qruv) = 2 l_\pi^2 l_y (u_y v_\lambda - u_\lambda v_y) \quad l_\pi l_y^2 (u_\pi v_\lambda - u_\lambda v_\pi) \\ - (m_\pi n_y - m_y n_\pi)^2 (mnuv),$$

wo y_i willkürliche Grössen sind; hiermit ist die geforderte Darstellung geliefert.

§ 6.

Besonders interessant erweist sich das betrachtete Flächennetz zweiter Ordnung dadurch, dass die Beschränkung, der es unterworfen ist, ebenso hinreichend, als nothwendig für eine andere Forderung ist, die an ein Flächennetz zweiter Ordnung gestellt werden kann. Zwei quadratische quaternäre Formen lassen sich stets als Summen derselben 4 Quadrate darstellen, und zwar in eindeutiger Weise; dagegen ist eine gleichzeitige Darstellung von drei quadratischen Formen als Summen derselben 5 Quadrate im Allgemeinen nicht ausführbar.

Ist nämlich:

$$p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_{ix}^2, \quad q_x^2 = \sum_1^5 q_i g_{ix}^2, \quad r_x^2 = \sum_1^5 r_i g_{ix}^2,$$

wo $g_{ix} = g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + g_{i3}x_3 + g_{i4}x_4$ ist, so verschwindet hierfür Λ von selbst. Denn durch Einführung der wirklichen Coefficienten dieser kanonischen Formen an Stelle der Symbole geht Λ über in:

$$\Lambda = (qrq'r')(rpp'r')(pqp'q') \\ = - \sum p_\pi p_\lambda q_\mu q_\nu r_\sigma (g_\pi g_\lambda g_\mu g_\nu) (g_\mu g_\nu g_\sigma g_\sigma) (g_\sigma g_\sigma g_\pi g_\lambda)^{**},$$

*) Borch. J. Bd. 59.

**) Für eine solche Ueberführung vergl. Gordan: über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. Bd. V, p. 365 u. 366.

wo die Summation über alle Indices von 1 bis 5 zu erstrecken ist. Dass aber diese Summe verschwindet, ist auf den ersten Blick zu erkennen; es wird dies nämlich für jeden ihrer Terme der Fall sein, in dem zwei Indices gleiche Nummern bedeuten; denn dann verschwindet immer wenigstens eine der drei in jedem Gliede enthaltenen viergliedrigen Determinanten; um also nicht zu verschwinden, müsste ein solches 6 verschiedene Indices enthalten; da aber nur über 5 verschiedene Indices verfügt werden kann, verschwinden sämtliche Terme und somit Λ selbst.

Aber $\Lambda = 0$ ist nicht bloss eine notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung für die in Rede stehende Darstellbarkeit. Dies zu beweisen, macht insofern mehr Schwierigkeiten, als von dem Satze, dass jede cubische quaternäre Form sich als Summe von 5 Cuben darstellen lässt, nicht Gebrauch gemacht, vielmehr hierfür in dem Folgenden ein neuer Beweis gegeben werden soll.

Ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung durch 5 Quadrate darstellbar $p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_i^2 x$, so heisst bekanntlich das von den 5 Ebenen $g_{1x} = 0, \dots, g_{5x} = 0$ gebildete Pentaeder ein Pentaeder der Fläche $p_x^2 = 0$. Man erhält durch Polarisierung $p_x p_y = \sum_1^5 p_i g_{ix} g_{iy}$; setzt man hierin an Stelle von y_i die Coordinaten einer Pentaederecke, z. B. die, in der sich die Ebenen $g_{3x} = 0, g_{4x} = 0, g_{5x} = 0$ schneiden, so ergibt sich:

$$p_x (p g_3 g_4 g_5) = p_1 g_{1x} (g_1 g_3 g_4 g_5) + p_2 g_{2x} (g_2 g_3 g_4 g_5).$$

Daraus folgt: Die Polare einer Pentaederecke geht durch die ihr gegenüberliegende Kante. — Dieser Satz gestattet die Umkehrung: Hat ein Pentaeder die Eigenschaft, dass die Polaren seiner Ecken in Bezug auf ein und dieselbe Oberfläche zweiter Ordnung durch die gegenüberliegenden Kanten gehen, so ist es ein Pentaeder dieser Fläche. Unter Zugrundelegung der in der Annahme dieses Satzes geforderten Gleichungen $(p g_h g_i g_k)(p g_l g_m u) = 0$, wo die Indices die Zahlen 1, ..., 5 in jeder möglichen Reihenfolge bedeuten und die u_i ganz beliebige Grössen sind, lässt sich nämlich p_x^2 namentlich unter Anwendung der Identität (I) (§ 1.) in höchst einfacher Weise als Summe der 5 mit gewissen Constanten multiplicirten Quadrate g_{ix}^2 darstellen*).

Hieraus ist klar, dass der geforderte Nachweis geliefert sein wird, wenn gezeigt wird, dass unter der Voraussetzung $\Lambda = 0$ wenigstens ein Pentaeder von der Art existirt, dass die Polaren seiner Ecken in Bezug auf räumliche Flächen des Netzes durch die gegenüberliegenden Kanten gehen.

*) Derartige Darstellungen findet man bei Gordan, Math. Annalen Bd. V, p. 361 f., und bei Rosanes, ibid. Bd. VI. p. 307 ff. und Borch. J. Bd. 76.

Zu diesem Zwecke werde zunächst ein *Hilfssatz* bewiesen, der gleichzeitig eine interessante Eigenschaft des betrachteten Netzes liefert; derselbe basirt hauptsächlich auf der Darstellung von Λ , wie sie in der Formel (4) des § 3. gegeben ist; danach kann die Bedingung $\Lambda = 0$ auch ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & (q_\alpha^2 q_{\beta'}^2 r_\gamma^2 r_{\delta'}^2 + q_\gamma^2 q_{\delta'}^2 r_\alpha^2 r_{\beta'}^2) (p_\alpha p_{\beta'} - p_\beta p_{\alpha'}) (p_\gamma p_{\delta'} - p_\delta p_{\gamma'}) \\
 & + (q_\alpha^2 q_{\gamma'}^2 r_\delta^2 r_{\beta'}^2 + q_{\delta'}^2 q_{\beta'}^2 r_\alpha^2 r_{\gamma'}^2) (p_\alpha p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\alpha'}) (p_\delta p_{\beta'} - p_\beta p_{\delta'}) \\
 & + (q_\alpha^2 q_{\delta'}^2 r_{\beta'}^2 r_{\gamma'}^2 + q_{\beta'}^2 q_{\gamma'}^2 r_\alpha^2 r_{\delta'}^2) (p_\alpha p_{\delta'} - p_\delta p_{\alpha'}) (p_\beta p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\beta'}) = 0,
 \end{aligned}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Ecken des gemeinschaftlichen Poltetraeders von $q_x^2 = 0$ und $r_x^2 = 0$ bedeuten; ausserdem ist identisch:

$$(\beta) \quad 0 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_{\alpha'} & p_{\beta'} & p_{\gamma'} & p_{\delta'} \\ p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_{\alpha'} & p_{\beta'} & p_{\gamma'} & p_{\delta'} \end{vmatrix} = (p_\alpha p_{\beta'} - p_\beta p_{\alpha'}) (p_\gamma p_{\delta'} - p_\delta p_{\gamma'}) \\
 + (p_\alpha p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\alpha'}) (p_\delta p_{\beta'} - p_\beta p_{\delta'}) \\
 + (p_\alpha p_{\delta'} - p_\delta p_{\alpha'}) (p_\beta p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\beta'}).$$

Wird überdies $(p_\alpha p_{\beta'} - p_\beta p_{\alpha'}) (p_\gamma p_{\delta'} - p_\delta p_{\gamma'}) = 0$ vorausgesetzt, so gehen (α) und (β) in folgende Gleichungen über:

$$\begin{aligned}
 & (q_\alpha^2 q_{\gamma'}^2 r_\delta^2 r_{\beta'}^2 + q_{\delta'}^2 q_{\beta'}^2 r_\alpha^2 r_{\gamma'}^2) (p_\alpha p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\alpha'}) (p_\delta p_{\beta'} - p_\beta p_{\delta'}) \\
 & + (q_\alpha^2 q_{\delta'}^2 r_{\beta'}^2 r_{\gamma'}^2 + q_{\beta'}^2 q_{\gamma'}^2 r_\alpha^2 r_{\delta'}^2) (p_\alpha p_{\delta'} - p_\delta p_{\alpha'}) (p_\beta p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\beta'}) = 0, \\
 & (p_\alpha p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\alpha'}) (p_\delta p_{\beta'} - p_\beta p_{\delta'}) + (p_\alpha p_{\delta'} - p_\delta p_{\alpha'}) (p_\beta p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\beta'}) = 0.
 \end{aligned}$$

Beachtet man, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} q_\alpha^2 q_{\gamma'}^2 r_\delta^2 r_{\beta'}^2 + q_{\delta'}^2 q_{\beta'}^2 r_\alpha^2 r_{\gamma'}^2 & q_\alpha^2 q_{\delta'}^2 r_{\beta'}^2 r_{\gamma'}^2 + q_{\beta'}^2 q_{\gamma'}^2 r_\alpha^2 r_{\delta'}^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (q_\alpha^2 r_\beta^2 - q_\beta^2 r_\alpha^2) (q_{\gamma'}^2 r_{\delta'}^2 - q_{\delta'}^2 r_{\gamma'}^2)$$

nicht verschwindet — denn es müssten dann zwei Ecken des Poltetraeders $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zusammenfallen —, so erkennt man als nothwendige Folge dieser beiden Gleichungen:

$$(p_\alpha p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\alpha'}) (p_\delta p_{\beta'} - p_\beta p_{\delta'}) = 0, \quad (p_\alpha p_{\delta'} - p_\delta p_{\alpha'}) (p_\beta p_{\gamma'} - p_\gamma p_{\beta'}) = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultates ist eine sehr einfache. Einem beliebigen Punkte α des Raumes ist nämlich in Bezug auf das Netz ein ganz bestimmter Punkt *conjugirt*, d. i. der Schnittpunkt seiner Polarebenen in Bezug auf sämmtliche Flächen des Netzes, dessen Coordinaten sich aus den Gleichungen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$ ergeben; ist aber α die Spitze eines der im Netze vorhandenen Kegel, so haben die drei Ebenen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$ eine Gerade gemein; den *Kegelspitzen* des Netzes ist demnach nicht je ein Punkt, sondern je eine *Gerade conjugirt*; dieselben erfüllen bekanntlich eine Raumcurve 6. Ordnung C_6 . Die Ecken des Poltetraeders, das den Flächen eines im Netze enthaltenen Büschels gemeinsam angehört,

sind gleichzeitig Kegelspitzen des Netzes. Sind nun $\alpha\beta\gamma\delta$, wie bisher, die Spitzen der in dem Büschel $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ enthaltenen Kegel, so erhält man die Bedingung, unter der sich die conjugirten Geraden zweier derselben, z. B. α und β treffen, durch Elimination von x_1, x_2, x_3, x_4 aus den vier Gleichungen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $p_\beta p_x = 0$, $q_\beta q_x = 0$ zunächst in der Gestalt: $p_\alpha q_\alpha p_\beta' q_\beta' (p q p' q') = 0$. Multiplicirt man diese Gleichung mit der im Allgemeinen nicht verschwindenden Determinante $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und benutzt die in § 3. abgeleitete Gleichung (4^a):

$$q_\alpha q_\beta' (p p' q q') (\alpha\beta\gamma\delta) = q_\alpha^2 q_\beta'^2 (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma'),$$

so wird, da $q_x^2 = 0$ als ohne Doppelpunkt vorausgesetzt werden darf, jene Bedingung identisch mit $p_\alpha p_\beta' (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = 0$ oder auch:

$$(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = 0.$$

Aus dieser für das Treffen der conjugirten Geraden von α und β nothwendigen und hinreichenden Bedingung ergibt sich für das allgemeine Netz beiläufig der Satz: Schneiden sich die conjugirten Geraden zweier Kegelspitzen, so treffen sich auch die conjugirten Geraden derjenigen zwei Kegelspitzen, die mit jenen zusammen ein Quadrupel bilden. Unter *Quadrupel* sollen nämlich vier Kegelspitzen des Netzes verstanden werden, die einem seiner Büschel angehören.

Das obige Resultat lässt sich daher nun dahin interpretiren: *Erfüllt ein Flächennetz zweiter Ordnung die durch $\Lambda = 0$ dargestellte Bedingung, und treffen sich zwei von den den Punkten eines Quadrupels conjugirten Geraden, so liegen überhaupt sämmtliche, den Punkten dieses Quadrupels conjugirte Geraden in ein und derselben Ebene.*

Mit Hülfe dieses Satzes wird es nun leicht sein, die Existenz nicht bloß einer, sondern unendlich vieler Pentaeder, die den Flächen des der Bedingung $\Lambda = 0$ unterworfenen Netzes gemeinsam sind, nachzuweisen. Es ist von vornherein klar, dass die Ecken eines solchen Kegelspitzen sein müssen; denn nur diese besitzen die den Pentaeder-ecken nothwendig zukommende Eigenschaft, dass ihre Polarebenen in Bezug auf alle Flächen des Netzes eine Gerade gemein haben.

Zuvörderst sollen nun einige Sätze über die Kegelspitzen eines allgemeinen Netzes vorausgeschickt werden*). Aus einer ganz allgemeinen, algebraischen Betrachtung wird leicht klar, dass von einem beliebigen Punkte der Kegelspitzencurve C_6 und überhaupt jeder Raumcurve eine endliche Anzahl von Geraden möglich ist, die sie ausserdem noch in zwei Punkten treffen. Seien daher α, β, γ drei in einer Geraden liegende Kegelspitzen des durch $p_x^2 = 0$, $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ definirten Netzes und zwar — wie, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu

*) Vgl. Sturm, über das Flächennetz zweiter Ordnung; Borch. J. Bd. 70, p. 212–240.

thun, vorausgesetzt werden darf, α die Spitze der als Kegel angenommenen Oberfläche $p_x^2 = 0$ und β, γ zwei Kegelspitzen des durch $q_x^2 = 0, r_x^2 = 0$ definirten Büschels, α', α'' die beiden übrigen Kegelspitzen desselben: dann bestehen Identitäten von folgender Form:

$$(16) \quad p_\alpha p_x = 0, \quad q_\beta q_x - \mu r_\beta r_x = 0, \quad q_\gamma q_x - \nu r_\gamma r_x = 0, \quad q_\alpha q_x - \lambda' r_{\alpha'} r_x = 0, \\ q_{\alpha''} q_x - \lambda'' r_{\alpha''} r_x = 0$$

und ausserdem die Gleichungen:

$$(17) \quad l\alpha_i + m\beta_i + n\gamma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

und es ist — allgemein unter G_x die conjugirte Gerade einer Kegelspitze x verstanden — die Gerade

G_α definirt durch die Gleichungen $q_\alpha q_x = 0, r_\alpha r_x = 0$,

G_β „ „ „ „ „ $p_\beta p_x = 0, q_\beta q_x - \mu r_\beta r_x = 0$,

G_γ „ „ „ „ „ $p_\gamma p_x = 0, q_\gamma q_x - \nu r_\gamma r_x = 0$,

$G_{\alpha'}$ „ „ „ „ „ $p_{\alpha'} p_x = 0, q_{\alpha'} q_x - \lambda' r_{\alpha'} r_x = 0$,

$G_{\alpha''}$ „ „ „ „ „ $p_{\alpha''} p_x = 0, q_{\alpha''} q_x - \lambda'' r_{\alpha''} r_x = 0$.

Aus der Bedeutung der Punkte $\beta, \gamma, \alpha', \alpha''$ ergeben sich sofort die Gleichungen

$$q_\alpha q_\beta = 0, \quad q_{\alpha'} q_\gamma = 0, \quad q_{\alpha''} q_\beta = 0, \quad q_{\alpha''} q_\gamma = 0$$

und hieraus in Folge von (17):

$$q_\alpha q_{\alpha'} = 0, \quad q_{\alpha''} q_\alpha = 0;$$

da nun wegen (16) auch $p_\alpha p_\alpha = 0, p_{\alpha'} p_\alpha = 0$ ist, so ist ersichtlich, dass $G_{\alpha'}$ und $G_{\alpha''}$ durch α gehen, und weiter, dass G_α durch α' und α'' geht.

Aus der Verbindung von (16) und (17) gehen die Identitäten:

$$A = mp_\beta p_x - np_\gamma p_x,$$

$$B = l(q_\alpha q_x - \mu r_\alpha r_x) - n(q_\gamma q_x - \nu r_\gamma r_x),$$

$$C = l(q_\alpha q_x - \nu r_\alpha r_x) - m(q_\beta q_x - \nu r_\beta r_x)$$

hervor. Wie hieraus, aus den Gleichungen von G_α, G_β und G_γ und (16) ersichtlich ist, geht die Ebene $A = 0$ durch G_β, G_γ und α , ebenso die Ebene $B = 0$ durch G_γ, G_α und β und die Ebene $C = 0$ durch G_α, G_β und γ ; und hieraus folgt, da $A=0, B=0, C=0$ verschiedene Ebenen darstellen, dass $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$ sich in einem Punkte θ treffen müssen; die Gleichungen von G_α, G_β und G_γ liefern dann:

$$p_\alpha p_0 = 0, \quad q_\alpha q_0 = 0, \quad r_\alpha r_0 = 0,$$

$$p_\beta p_0 = 0, \quad q_\beta q_0 = 0, \quad r_\beta r_0 = 0,$$

$$p_\gamma p_0 = 0, \quad q_\gamma q_0 = 0, \quad r_\gamma r_0 = 0;$$

d. h. die drei Ebenen $p_0 p_x = 0, q_0 q_x = 0, r_0 r_x = 0$ schneiden sich in ein und derselben Geraden $(\alpha\beta\gamma)$; mit andern Worten: θ ist eine

Kegelspitze und die Gerade $(\alpha\beta\gamma)$ ihre conjugirte Gerade. Da $(\alpha\beta\gamma)$ eine beliebige, die Kegelspitzencurve dreimal treffende Gerade ist, so folgt hieraus der Satz: *Jede die Kegelspitzencurve dreifach treffende Gerade ist die conjugirte Gerade einer Kegelspitze und zwar derjenigen, in der sich die conjugirten Geraden derjenigen Kegelspitzen schneiden, in denen jene Gerade die Kegelspitzencurve trifft; und weiter, da α eine beliebige Kegelspitze ist und G_α durch θ , α' , α'' , geht: Jede einer Kegelspitze conjugirte Gerade trifft die Kegelspitzencurve in drei Punkten.*

Aus alledem ergibt sich nun folgender Satz: Ist θ irgend eine Kegelspitze, so trifft G_θ die Kegelspitzencurve in drei Punkten α, β, γ , deren conjugirte Geraden $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$ sich in dem Punkte θ treffen. Durch diese drei Geraden lassen sich daher drei Ebenen legen, je eine durch G_β und G_γ , G_γ und G_α , G_α und G_β , die von G_θ bez. in den Punkten α, β, γ geschnitten werden. Zwei Kegelspitzen bestimmen zwei andere, die jene zu einem Quadrupel ergänzen; bilden nun $\beta\gamma\alpha'\alpha''$, $\gamma\alpha\beta'\beta''$, $\alpha\beta\gamma'\gamma''$ je ein Quadrupel, so liegen die Punktepaare $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ auf der Geraden G_α resp. G_β, G_γ , so dass:

die durch G_β und G_γ gehende Ebene die Kegelspitzencurve in den

6 Punkten $\theta \alpha \beta' \beta'' \gamma' \gamma''$,

die durch G_γ und G_α gehende Ebene die Kegelspitzencurve in den

6 Punkten $\theta \beta \gamma' \gamma'' \alpha' \alpha''$,

die durch G_α und G_β gehende Ebene die Kegelspitzencurve in den

6 Punkten $\theta \gamma \alpha' \alpha'' \beta' \beta''$

schneidet; endlich gehen $G_{\alpha'}$, $G_{\alpha''}$ durch α , $G_{\beta'}$, $G_{\beta''}$ durch β , $G_{\gamma'}$, $G_{\gamma''}$ durch γ .

Die so definirten 10 Punkte $\theta \alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma' \alpha'' \beta'' \gamma''$ lassen sich im Allgemeinen nicht als Ecken eines Pentaeders auffassen; denn sonst müsste auch das allgemeine Flächennetz ein Pentaeder besitzen; hierdurch würde aber die Bedingung $\Lambda=0$ erfüllt werden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dagegen soll gezeigt werden, dass die Bedingung $\Lambda=0$ ausreicht, um jene Auffassung zu ermöglichen. Nach dem bewiesenen Hilfssatze werden nämlich in diesem Falle, da $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$ sich in einem Punkte treffen und $\beta \gamma \alpha' \alpha''$, $\gamma \alpha \beta' \beta''$, $\alpha \beta \gamma' \gamma''$ je ein Quadrupel bilden, folgende drei mal vier Gerade je in einer Ebene liegen:

$$G_\beta G_\gamma G_{\alpha'} G_{\alpha''}; \quad G_\gamma G_\alpha G_{\beta'} G_{\beta''}; \quad G_\alpha G_\beta G_{\gamma'} G_{\gamma''}.$$

In jeder beliebigen Ebene liegen höchstens 6 Kegelspitzen, da diese sämmtlich auf einer Raumcurve 6. Ordnung enthalten sind; da nun ferner auf jeder der 4 Geraden $G_\beta G_\gamma G_\alpha G_{\alpha''}$ drei Kegelspitzen und diese Geraden selbst in einer Ebene sich befinden, in der die 6 Kegelspitzen $\theta \alpha \beta' \beta'' \gamma' \gamma''$ liegen, so ergibt sich mit Nothwendigkeit, dass

$\alpha \beta' \gamma'$ auf $G_{\alpha'}$ und $\alpha \beta'' \gamma''$ auf $G_{\alpha''}$

liegen. Ebenso liegen $\beta \gamma' \alpha'$ auf $G_{\beta'}$, $\gamma \alpha' \beta'$ auf $G_{\gamma'}$, $\beta \gamma'' \alpha''$ auf $G_{\beta''}$ und $\gamma \alpha'' \beta''$ auf $G_{\gamma''}$. Hieraus ist unmittelbar zu erkennen, dass ebenso wie $\theta \alpha \beta' \beta'' \gamma' \gamma''$, $\theta \beta \gamma' \gamma'' \alpha' \alpha''$, $\theta \gamma \alpha' \alpha'' \beta' \beta''$ auch $\alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma'$ und $\alpha \beta \gamma \alpha'' \beta'' \gamma''$ je in einer Ebene liegen, was zu zeigen war.

Die angegebene Construction des Pentaeders enthält ein willkürliches Element, den Punkt θ , der ganz beliebig auf der Kegelspitzencurve gewählt werden kann; daher folgt endlich der Satz:

Drei quaternäre quadratische Formen lassen sich immer und nur dann als Summen derselben fünf Quadrate (und zwar in einfach unendlich vielfacher Weise) darstellen, wenn sie sich als Polaren ein und derselben cubischen Form auffassen lassen.

Unter dieser Bedingung wird demnach folgende Darstellung der drei quaternären quadratischen Formen berechtigt sein:

$$p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_{ix}^2, \quad q_x^2 = \sum_1^5 q_i g_{ix}^2, \quad r_x^2 = \sum_1^5 r_i g_{ix}^2.$$

Die cubischen Formen, als deren Polaren sie sich auffassen lassen, sind nach § 4. [Gleichung (9) und (10)] gegeben durch: $A_x^3 = \mu a_x^3 + \nu (\xi \eta \xi x)^3$, wo

$$\begin{aligned} a_x^3 (\xi \eta \xi y)^3 &= \sum_1^5 \{ g_{ix}^2 (\xi \eta \xi y)^2 + g_{ix} g_{iy} (\xi \eta \xi y) (\xi \eta \xi x) + g_{iy}^2 (\xi \eta \xi x)^2 \} \\ &\quad \cdot \{ \pi p_i (x \eta \xi y) + \kappa q_i (x \xi \xi y) + \varrho r_i (x \xi \eta y) \} \\ &= \sum_1^5 \{ g_{ix}^3 (\xi \eta \xi y)^3 - g_{iy}^3 (\xi \eta \xi x)^3 \} \frac{\pi p_i (x \eta \xi y) + \kappa q_i (x \xi \xi y) + \varrho r_i (x \xi \eta y)}{g_{ix} (\xi \eta \xi y) - g_{iy} (\xi \eta \xi x)} \\ &= \sum_1^5 \{ g_{ix}^3 (\xi \eta \xi y)^3 - g_{iy}^3 (\xi \eta \xi x)^3 \} \frac{\pi p_i (x \eta \xi y) + \kappa q_i (x \xi \xi y) + \varrho r_i (x \xi \eta y)}{g_{ix} (x \eta \xi y) + g_{iy} (x \xi \xi y) + g_{iz} (x \xi \eta y)} \end{aligned}$$

ist und y_1, y_2, y_3, y_4 beliebige, aber bestimmte Werthe haben sollen. Die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i haben den Identitäten (2) des § 3. zu genügen, die jetzt lauten:

$$\begin{aligned} \sum_1^5 g_{ix} (\kappa q_i g_{iz} - \varrho r_i g_{i\eta}) &= 0, \\ \sum_1^5 g_{ix} (\varrho r_i g_{iz} - \pi p_i g_{i\zeta}) &= 0, \\ \sum_1^5 g_{ix} (\pi p_i g_{i\eta} - \kappa q_i g_{i\zeta}) &= 0. \end{aligned}$$

Zwischen den 5 Grössen $g_{1x}, \dots, g_{5x}$ besteht nur *eine* lineare, homogene Relation:

$$\sum_1^5 c_i g_{ix} \equiv \begin{vmatrix} g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & g_{4x} & g_{5x} \\ g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} & g_{51} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} & g_{52} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} & g_{53} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} & g_{54} \end{vmatrix} = 0.$$

Nach der Methode der Lagrange'schen Multiplicatoren zerlegen sich daher die eben angeführten Identitäten unter Einführung dreier neuen Unbekannten λ, μ, ν in die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \kappa q_i g_{i\zeta} - \varrho r_i g_{i\eta} + \lambda c_i &= 0, \\ \varrho r_i g_{i\xi} - \pi p_i g_{i\zeta} + \mu c_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \\ \pi p_i g_{i\eta} - \kappa q_i g_{i\xi} + \nu c_i &= 0, \end{aligned}$$

Multiplicirt man dieselben mit $g_{i\xi}$, resp. $g_{i\eta}$, $g_{i\zeta}$ und addirt, so folgen die 5 Gleichungen:

$$\lambda g_{i\xi} + \mu g_{i\eta} + \nu g_{i\zeta} = 0,$$

die, wenn nicht über das Pentaeder eine sehr beschränkende Annahme gemacht werden soll, nur durch:

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$$

befriedigt werden können. Dies liefert die höchst einfachen Beziehungen:

$$\pi p_i : \kappa q_i : \varrho r_i = g_{i\xi} : g_{i\eta} : g_{i\zeta}$$

oder hiermit gleichbedeutend:

$$\begin{aligned} \pi p_i &= \omega_i g_{i\xi}, \quad \kappa q_i = \omega_i g_{i\eta}, \quad \varrho r_i = \omega_i g_{i\zeta}, \\ i &= 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

In Folge dessen kann nun den cubischen Formen die Gestalt gegeben werden:

$$\begin{aligned} A_x^3 &= \frac{\mu}{(\xi \eta \zeta y)^3} \sum_1^5 \omega_i \left\{ g_{ix}^3 (\xi \eta \zeta y)^3 - g_{iy}^3 (\xi \eta \zeta x)^3 \right\} + \nu (\xi \eta \zeta x)^3 \\ &= \mu \sum_1^5 \omega_i g_{ix}^3 - (\xi \eta \zeta x)^3 \left\{ \frac{\mu \sum_1^5 \omega_i g_{iy}^3}{(\xi \eta \zeta y)^3} - \nu \right\}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass ξ_i, η_i, ζ_i eine einfache Mannigfaltigkeit entsprechender Werthe annehmen können; ist ξ_i, η_i, ζ_i ein beliebiger dieser Werthsysteme, so lässt sich dann $\frac{\nu}{\mu}$ so bestimmen, dass

$$\mu \frac{\sum \omega_i g_{iy}^3}{(\xi \eta \zeta y)^3} - \nu = 0$$

wird, und A_x^3 sich als Summe von 5 Cuben darstellt:

$$A_x^3 = \mu \sum_1^5 \omega_i \sigma_{ix}^3;$$

sämmtliche zweifach unendlich vielen cubischen Formen, als deren Polaren sich die drei gegebenen quadratischen Formen auffassen lassen, sind daher darstellbar als Summen von 5 Cuben; und zwar je eine einfache Mannigfaltigkeit derselben durch *dieselben* 5 Cuben.

Indem man nun von irgend drei Polaren einer cubischen quaternären Form ausgeht, wird man zu einer Darstellung derselben als Summe von 5 Cuben gelangen; dies beweist den Satz:

Jede quaternäre cubische Form lässt sich im Allgemeinen als Summe von 5 Cuben darstellen.

Dass dies stets nur auf eine einzige Weise möglich ist, lässt sich nachträglich leicht zeigen.

Lissa, im November 1876.