VI.

Beweis des allgemeinen Theorems des Hrn. De La Place, über die Geschwindigkeit des Schalls in verschiedenen Mitteln,

von dem

Prof. TRALLES, Secr. d. math. Kl. d. Ak. d. Wiss. in Berl.

Vor einigen Jahren machte Hr. de la Place folgendes von ihm gefundenes Theorem über die Geschwindigkeit des Schalls in den festen, tropfbar-flüssigen und luftförmigen Körpern bekannt: „Es wird vorausgesetzt, man habe durch Versuche die Gröfse bestimmt, bei *festen* Körpern, um welche ein horizontal liegender 1 Meter langer Stab sich verlängert, wenn er an dem einen Ende befestigt ist, und an dem andern Ende durch ein dem feinigem gleiches Gewicht nach der Länge gezogen wird; bei *flüssigen* Körpern aber die Gröfse, um welche eine horizontale 1 Meter lange Säule derselben, durch ein dem ihrigen gleiches Gewicht zusammengedrückt wird *). Wenn man durch diese Verlängerung oder Verkürzung das Doppelte

*) „Ich habe mich, sagte Hr. de la Place, in dem einen Monat später in der Pariser Akademie vorgelesenen Aufsätze (ebendaf. S. 243) seitdem überzeugt, daß man nicht bloß die lineare Raum - Verminderung, durch Compression, sondern die ganze Verminderung dieses [letztern] Raums in Anschlag bringen müsse.“ *Gilb.*

der Zahl von Meter dividirt, welche ein schwerer Körper in der ersten (Sexagesimal-) Sekunde durchfällt, so giebt die Quadratwurzel dieses Quotienten die Zahl von Metern, welche der Schall während 1 Sekunde in diesem Körper durchläuft.“ Der Aufsatz steht in diesen Annalen Jahrg. 1817 St. 10, oder Bd. 57 S. 234; und auf ihn bezieht sich die folgende Auseinandersetzung des Hrn. Prof. Tralles, welche mir zwar erst jetzt, aber, wie alles, was von diesem ausgezeichneten Physiker herrührt, immer noch sehr erwünscht zukömmt, da sie ein interessantes Theorem, das recht sehr der Erklärung bedurfte, auf eine eben so lichtvolle als einfache Weise erläutert und beweist. *Gilb.*

In dem kürzlich erschienenen 10. Hefte dieses Jahrgangs (1817) der Annalen der Physik findet sich ein vom Herrn de la Place angegebenes „*allgemeines Theorem* über die Geschwindigkeit des Schalls in verschiedenen Mitteln,“ aber ohne Beweis. Dieser läßt sich jedoch leicht aus dem, was man von der Geschwindigkeit des Schalls in der atmosphärischen Luft weiß, ableiten, und es dürfte Naturforschern angenehm seyn, diese Ableitung zu kennen und dadurch jenes allgemeine Theorem besser einzusehen.

Der Mathematiker sieht, wenn er die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft untersucht, bloß auf die Elasticität derselben; auf die besondere Natur der Luft als Materie, nimmt er gar keine Rücksicht. Das Resultat wird also für alle Materien gleichgültig, ja dasselbe seyn, und sich nur im absolut Numerischen, nach Maaßgabe des verschiedenen Grades der Elasticität bei verschiedenen Materien, unterscheiden. Das auffal-

lende im Theorem des Hrn. de la Place liegt nur darin, wie diese Theorie der Fortpflanzung des Schalls bei festen und flüssigen Körpern in Anwendung kommen könne, da bei diesen Körpern von der Elasticität gewöhnlich abstrahirt wird. Daß dieses aber nicht in jeder Hinsicht erlaubt sey, giebt die Erfahrung eben dadurch zu erkennen, daß der Schall sich durch feste Körper nicht augenblicklich fortpflanzt; es muß mithin in den Theilen eines solchen Körpers die Materie, eben so wie in den elastischen Flüssigkeiten, ihre Dichtigkeit an verschiedenen Stellen successiv ändern. Auch geben die Raum-Veränderungen der Körper durch Wärme, die Gestalt-Änderung derselben durch Biegung und Rücktritt nach aufgehobener Kraft in ihre erste Gestalt, hinlänglich zu erkennen, daß die Theile eines festen Körpers gegen einander beweglich sind, und daß diese Körper sich nicht so wohl durch eine absolute Starrheit von den flüssigen und flüssig-elastischen Materien, als vielmehr dadurch unterscheiden, daß in ihnen nicht so leicht wie in diesen, eine veränderte Ordnung der Theile in Beziehung auf den sie begrenzenden Raum, Statt findet.

Es ist die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft, d. h. der Weg, den derselbe in einer Zeitekunde zurücklegt, nach der reinen Theorie, in welcher die Elasticität der Luft durch ihre Verdichtung sich nicht verändernd angenommen wird,

$$= \sqrt{Hg},$$

wenn H die Höhe bedeutet, welche die Atmosphäre haben würde, wenn sie ihre Elasticität verlöre, und in eine bloße Flüssigkeit von der Dichtigkeit, welche sie an der Erdoberfläche hat, verwandelt würde; g aber

die Geschwindigkeit bedeutet, welche ein frei fallender Körper nach Verfluß einer Zeitssekunde annimmt *).

Diese GröÙe H aber wird sich durch folgende Hilfs-Vorstellung leicht bestimmen lassen. Wir wollen uns 1 Kubikfuß der untersten Luft im elastischen Zustande, unter dem der Höhe H entsprechenden Drucke denken, und nun annehmen, es drücke auf sie außer der H Fuß hohen bloß flüssigen, nicht elastischen Luft, noch ein Kubikfuß Luft bloß durch sein Gewicht. Dies wäre eben so viel, als ob die bloß flüssige Luftsäule von gleichförmiger Dichtigkeit, welche über sie stünde, um einen Fuß höher, und gleich $H+1$ Fuß würde.

Dadurch aber müßte in Folge des Gesetzes der Elasticität, die Luft in einen geringern Raum zusammengedrückt werden, und nur einen Raum von $1-E$ Kubikfuß einnehmen, so daß seyn müßte

$$\frac{1-E}{1} = \frac{H}{H+1}, \text{ oder } (1-E)(H+1) = H.$$

Hieraus folgt
$$H = \frac{1-E}{E} = \frac{1}{E} - 1;$$

wofür man, wenn E sehr klein ist, setzen kann,

$$H = \frac{1}{E}.$$

Wohl zu bemerken: es ist E der *kubische* Raum überhaupt, um welchen sich die elastische Masse durch eine ihr am Gewicht gleiche Kraft zusammendrücken läßt.

*) Das Doppelte des Fallraums in der ersten Sekunde von der Ruhe ab, betragend zu Paris 9,8088 Meter. Gilb.

Setzt man diesen Werth von H in die Formel für die Geschwindigkeit des Schalles, so wird dieselbe

$$= \sqrt{\frac{g}{E}}$$

und drückt nun das Theorem aus, wie es Hr. de la Place ausspricht. Und es ist klar, daß es mathematisch für alle Körper gilt, welche man physisch in Beziehung auf den Schall der Luft sich ähnlich verhaltend annimmt. Und es ist zugleich ganz klar, daß Hr. de la Place seinen ersten Ausdruck daß man für E die Linear-Aenderung der Ausdehnung oder Contraction der Masse durch eine Kraft gleich ihrem Gewicht nehmen solle, mit Recht dahin verbessert hat, daß es die *körperliche* Aenderung seyn müsse *).

*) Hr. Markis de la Place giebt an dem angef. Orte zwei Beispiele der Anwendung seines allgemeinen Theorems. Nach Versuchen Canton's wird *reines Wasser* bei 0,76 Meter Barometerstand und 10° C. Wärme durch den Druck der Atmosphäre in seinem Raume um 0,0000425 vermindert; folglich eine Wassersäule von 1 Fuß Höhe durch das Gewicht einer gleich hohen Wassersäule nur um $\frac{1}{25}$ dieser Größe, in so fern man den Druck der Atmosphäre mit Hrn. de la Place (unstreitig bei obigen Barometer- und Thermometerständen) dem einer Wassersäule von 10,325 Meter Höhe gleich setzt. Da folglich Wasser durch den Druck eines dem seinigen gleichen Gewichts um 0,000004116 in seinem Raume vermindert wird, so haben wir nach Hrn. de la Places Theorem die Geschwindigkeit, mit der sich der Schall durch Wasser von 10° C. Wärme fortpflanzt, $= \sqrt{\frac{9,808}{0,00004116}} = 1543,7$ Meter. —

Bei festen Körpern läßt sich die Elasticität nicht durch Wirkungen im Zusammendrücken, wohl aber durch den Widerstand messen, den der Körper leistet, wenn man seinen Raum

Es ist $\sqrt{2Hg}$ die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, der von der Höhe H herabfällt, oder diejenige, mit welcher die Luft, wenn sie durchgehends einerlei Dichte hätte, und also ohne Elasticität wie Wasser gedacht würde, aus einem mit der gleich dichten Atmosphäre gleich hohen Gefäßs, aus einer Oeffnung an der Erde, in den leeren Raum ausströmen würde. Also hat man das Verhältniß der Schall-Geschwindigkeit zu derjenigen, mit welcher die Luft einen leeren Raum zu erfüllen strebt,^l wie

$$\sqrt{Hg} : \sqrt{2Hg}, \text{ d. i. wie } 1 : \sqrt{2};$$

oder der Schall hat die Geschwindigkeit eines Körpers, der aus der halben Höhe der gleich dichten Atmosphäre auf die Erde fällt.

Tralles.

der Länge nach zu erweitern strebt. Und da er hierbei nur nach *einer* Dimension Widerstand leistet, so kömmt nur seine Raum-Vermehrung *nach der Länge* in Anschlag, in so fern sein Raum nach den beiden andern Dimensionen dadurch nicht verändert wird. Da nun Borda gefunden hat, daß ein 37 Unzen wiegendes und $11\frac{1}{2}$ Fufs langes messingenes Lineal, durch ein Gewicht von 24 Pfund um 0,0000575 Toisen verlängert wurde, also bei 1 Meter Länge durch die Wirkung seines eigenen Gewichts um 0,0000077379 Meter verlängert worden wäre, so ergiebt sich die Geschwindigkeit, womit sich der Schall durch Messing fortpflanzt,

$$= \sqrt{\frac{9,808}{0,000007739}} = 3560,4 \text{ Meter.}$$

Aus der Höhe des Tons der Längen-Schwingungen in Messing, hatte sie Chladni = 3596,58 Meter bestimmt.

Gibb,