Sur les séries de fonctions de Stirling.

(Par NIELS NIELSEN, à Copenhague.)

§ 1. REMARQUES GÉNÉRALES CONCERNANT LES POLYNOMES $\psi_n(x)$.

Dans mon Mémoire: *Recherches sur les nombres et les polynomes de STIRLING* (*) j'ai défini la fonction $\psi_n(x)$ du rang n de STIRLING comme le polynome entier de x qui satisfait à cette équation aux différences finies partielles

$$(x+2) \cdot \psi_n(x+1) = (x-n) \cdot \psi_n(x) + (x+1) \cdot \psi_{n-1}(x) \quad (1)$$

avec la condition initiale (**)

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}. \quad (1 \text{ bis})$$

J'ai introduit les polynomes $\psi_n(x)$ pour pouvoir calculer directement les nombres de STIRLING de première et de seconde espèce, savoir les nombres positifs entiers C_{n+1}^r et $\mathbb{G}_{n+1}^r$ définis comme suit:

C_{n+1}^r est la somme des $\binom{n}{r}$ produits possibles qui contiennent r facteurs différents pris parmi les nombres 1, 2, 3, ..., n , tandis que

$$\mathbb{G}_{n+1}^r = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^{n+r}.$$

En effet, supposons connus les polynomes $\psi_n(x)$, nous aurons ces deux

(*) *Annali di Matematica*, t. ¹⁰9, p. 287-318; 1904.

(**) Les conditions relatives aux valeurs de $\psi_n(0)$ indiquées dans le Mémoire susdit, p. 309, sont superflues.

formules

$$C_{n+1}^r = \frac{(n+1)!}{(n-r)!} \cdot \psi_{r-1}(n), \quad r \geq 1 \quad (2)$$

$$\mathfrak{G}_{n+1}^r = (-1)^{r-1} \frac{(n+r)!}{(n-1)!} \cdot \psi_{r-1}(-n-1), \quad r \geq 1. \quad (2 \text{ bis})$$

Dans mon autre Mémoire sur cette matière: *Note sur quelques applications analytiques de polynomes de Stirling* (*) j'ai introduit la série de puissances

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(x) \cdot \alpha^s, \quad |\alpha| < 2\pi \quad (3)$$

qui joue un rôle assez fondamental dans plusieurs questions de l'Analyse.

En effet, dans mon troisième Mémoire sur ce sujet: *Ueber die Stirlingschen Polynome und die Gammafunktion* (**) j'ai exprimé sous forme très simple, à l'aide des polynomes $\psi_n(x)$, les coefficients des séries de factorielles de BINET concernant la fonction gamma.

Posons particulièrement dans (3) $x = n-1$, où n désigne un positif entier plus grand que l'unité, la formule (2) nous conduira immédiatement à un résultat indiqué par SYLVESTER (***).

Dans le second des trois Mémoires susdits j'ai considéré aussi la série de puissances

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \chi_s(x) \alpha^{2s+2}, \quad |\alpha| < \pi, \quad (4)$$

où les coefficients $\chi_n(x)$ sont très analogues aux polynomes de STIRLING.

En effet, posons

$$\mathfrak{G}_{n+1}^{2p} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{s} (n-2s)^{n+2p},$$

nous aurons

$$\mathfrak{G}_{n+1}^{2p} = (-1)^p \frac{2^{n-1} (n+2p)!}{(n-1)!} \cdot \chi_{p-1}(-n-1), \quad p \geq 1. \quad (5)$$

(*) *Annali di Matematica*, t. 9, p. 319-325; 1904.

(**) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. 16, p. 135-140; 1905.

(***) *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. 15, p. 195; 1883.

Dans le Mémoire que voici je détermine les valeurs de $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ pour n extrêmement grand, ce qui nous conduira à des résultats singuliers relatifs aux séries de fonctions $\psi_n(x)$ ou de $\chi_n(x)$, séries parmi lesquelles (3) et (4) sont des exemples.

Or, tous les résultats que nous venons d'indiquer rendent très désirable une connaissance approfondie des propriétés des deux groupes de polynômes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$; c'est pourquoi je me suis proposé de donner dans les deux paragraphes suivants un nombre de relations élémentaires entre $\psi_n(x)$, $\chi_n(x)$ et les polynômes $\varphi_n(x)$ de BERNOULLI, formules qui nous seront utiles dans nos recherches suivantes.

§ 2. LES POLYNÔMES DE STIRLING ET DE BERNOULLI.

Étudions d'abord la formule (3), appliquons l'identité évidente

$$e^{\alpha(x+y+1)} \cdot \left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right)^{x-1} = e^{\alpha y} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{x-1},$$

puis introduisons au lieu des quatre fonctions qui y figurent les séries de puissances correspondantes, les multiplications s'effectueront d'après la règle de CAUCHY, et nous aurons, en comparant les termes des deux membres de la formule ainsi obtenue qui contiennent la puissance α^{n+1} , cette première formule

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x+y+1)^{n+1}}{(n+1)!} - (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (x+y+1)^{n-s}}{(n-s)!} \cdot \psi_s(x) &= \\ = \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{y^{n-s}}{(n-s)!} \cdot \psi_s(x), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

de laquelle nous avons à étudier les trois cas particuliers suivants:

1.° $y=0$, ou bien $y=-x-1$, ce qui donnera ces deux formules

$$2 \psi_{2p}(x) = \frac{(x+1)^{2p}}{(2p+1)!} - \sum_{s=0}^{s=2p-1} \frac{(-1)^s (x+1)^{2p-s}}{(2p-s)!} \cdot \psi_s(x) \quad (7)$$

$$\frac{(x+1)^{2p-1}}{(2p)!} = \sum_{s=0}^{s=2p-2} \frac{(-1)^s (x+1)^{2p-s-1}}{(2p-s-1)!} \cdot \psi_s(x), \quad (7 \text{ bis})$$

2.° $y = -1$, ou bien $y = -x$, nous aurons

$$2 \psi_{2p}(x) = \frac{x^{2p+1} + 1}{x+1} \cdot \frac{1}{(2p+1)!} - \sum_{s=0}^{s=2p-1} \frac{(-1)^s (x^{2p-s} + 1)}{(2p-s)!} \cdot \psi_s(x) \quad (8)$$

$$\frac{x^{2p} - 1}{x+1} \cdot \frac{1}{(2p)!} = \sum_{s=0}^{s=2p-2} \frac{(-1)^s (x^{2p-s-1} - 1)}{(2p-s-1)!} \cdot \psi_s(x). \quad (8 \text{ bis})$$

3.° $y = -\frac{x+1}{2}$; supposons impair l'indice n , la formule ainsi obtenue se réduit à une identité formelle, tandis que l'hypothèse $n = 2p$ donnera

$$2^{2p+1} \cdot \psi_{2p}(x) = \frac{(x+1)^{2p}}{(2p+1)!} - \sum_{s=0}^{s=2p-1} \frac{(-1)^s 2^{s+1} (x+1)^{2p-s}}{(2p-s)!} \cdot \psi_s(x), \quad (9)$$

formule qui est très remarquable en comparaison avec (7).

Prenons ensuite comme point de départ l'autre identité évidente

$$\frac{e^{\alpha x} \cdot \alpha}{1 - e^{-\alpha}} \cdot \left(\frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \right)^{-x \cdot y - 1} = \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \right)^{-x-1} \cdot \left(\frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \right)^{-y-1},$$

puis appliquons cette série de puissances

$$\frac{e^{\alpha x} \cdot \alpha}{1 - e^{-\alpha}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi_s(x) \alpha^s, \quad |\alpha| < 2\pi, \quad (10)$$

où les $\varphi_n(x)$ sont les fonctions de BERNOULLI avec la définition que j'ai proposée dans le premier de mes Mémoires susdits (*); le même procédé donnera cette autre formule générale:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) - (x+y+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \psi_s(x+y) \cdot \varphi_{n-s}(x) = \\ = (x+1) \psi_n(x) - (-1)^n (y+1) \cdot \psi_n(y) - \\ - (x+1)(y+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \psi_s(y) \cdot \psi_{n-s-1}(x), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

de laquelle nous avons à étudier ces trois cas particuliers:

1.° $y = -1$; nous aurons, en mettant $x+1$ au lieu de x ,

$$\varphi_{n+1}(x+1) - (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \psi_s(x) \cdot \varphi_{n-s}(x+1) = (x+2) \cdot \psi_n(x);$$

(*) Loc. cit., p. 291.

or, la formule (10) donnera

$$\varphi_r(x+1) - \varphi_r(x) = \frac{(x+1)^{r-1}}{(r-1)!},$$

appliquons ensuite les deux formules (7) puis la définition (1), nous trouverons entre les polynomes de STIRLING et ceux de BERNOULLI cette relation élégante :

$$\varphi_{n+1}(x) - (x-n) \cdot \psi_n(x) = (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \psi_s(x) \cdot \varphi_{n-s}(x). \quad (12)$$

2.^o $y = -x - 1$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= (x+1) \cdot \psi_n(x) + (-1)^n \cdot x \cdot \psi_n(-x-1) + \\ &+ x(x+1) \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \psi_s(-x-1) \cdot \psi_{n-s-1}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

3.^o $y = 0$ nous aurons, en vertu de (12), la formule récursive pour le calcul successif des polynomes $\psi_n(x)$ que je viens de démontrer dans mon second Mémoire(*) en appliquant l'identité

$$\left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^{-x-1} \cdot \left(\frac{1-e^{-\sigma}}{z}\right)^{-y-1} = \left(\frac{1-e^{-\sigma}}{z}\right)^{-x-y-2}.$$

§ 3. LES TROIS POLYNOMES $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ ET $\chi_n(x)$.

Quant à la formule (4), appliquons l'identité

$$\left(\frac{\sin \alpha}{z}\right)^{-x-1} \cdot e^{i\alpha(x+y+1)} = e^{i\alpha y} \cdot \left(\frac{1-e^{-2\sigma i}}{2\alpha i}\right)^{-x-1},$$

il résulte la formule générale

$$\begin{aligned} \frac{(x+y+1)^n}{n!} + (x+1) \cdot \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (x+y+1)^{n-2s}}{(n-2s)!} \cdot \chi_{s-1}(x) &= \left(\right. \\ &= \frac{y^n}{n!} + (x+1) \cdot \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2^s \cdot y^{n-s}}{(n-s)!} \cdot \psi_{s-1}(x), \end{aligned} \quad (14)$$

(*) Loc. cit., p. 321.

ce qui donnera pour $y = 0$ et en mettant $n + 1$ au lieu de n :

$$2^{n+1} \cdot \psi_n(x) = \frac{(x+1)^n}{(n+1)!} - \sum_{s=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s (x+1)^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!} \cdot \chi_s(x), \quad (15)$$

tandis que l'hypothèse $y = -(x+1)$ donnera ces deux autres formules plus particulières (*)

$$\frac{(x+1)^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{(-1)^s 2^{2n-s+1} \cdot (x+1)^s}{s!} \cdot \psi_{2n-s}(x) \quad (16)$$

$$(-1)^{n+1} \chi_n(x) = \frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+2)!} + \sum_{s=0}^{s=2n+1} \frac{(-1)^s 2^{2n-s+2} \cdot (x+1)^s}{s!} \cdot \psi_{2n-s+1}(x). \quad (16 \text{ bis})$$

Appliquons ensuite cette autre identité

$$\frac{e^{\frac{y-x-1}{2} \alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \right)^{-x} = e^{\frac{y\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha i}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha i}{2}\right)} \right)^{-x-2},$$

nous aurons de même

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1}\left(\frac{y-x-1}{2}\right) + x \cdot \sum_{s=0}^{s=2n} \psi_s(x-1) \cdot \varphi_{n-s}\left(\frac{y-x-1}{2}\right) = \\ = \left[\frac{y^{n+1}}{(n+1)!} - (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s y^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!} \cdot \chi_s(x) \right] \cdot 2^{-n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Posons dans (17) $y = 0$, il résulte

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{-x-1}{2}\right) + x \cdot \sum_{s=0}^{s=2n} \varphi_{2n-s}\left(\frac{-x-1}{2}\right) \cdot \psi_s(x-1) = 0 \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(-1)^n (x+1)}{2^{2n}} \cdot \chi_{n-1}(x) = \varphi_{2n}\left(\frac{-x-1}{2}\right) + \\ + x \cdot \sum_{s=0}^{s=2n-1} \psi_s(x-1) \cdot \varphi_{2n-s-1}\left(\frac{-x-1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (18 \text{ bis})$$

L'hypothèse $y = x + 1$ nous conduira à (15); posons enfin $x = -1$,

(*) Loc. cit., p. 323.

puis remarquons que la formule (3) nous donne immédiatement la valeur de $\psi_n(-2)$, nous aurons, en mettant $2x$ au lieu de y , ce développement très connu

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \cdot \varphi_{n-s}(x). \quad (19)$$

§ 4. LES POLYNOMES $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ POUR n TRÈS GRAND.

Pour déterminer maintenant la valeur des deux polynomes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ pour n très grand, considérons d'abord $\psi_n(x)$.

A cet effet, supposons $\Re(x) < -1$, puis désignons par C la circonférence du cercle $|x| = 2\pi$, prise dans le sens direct, le théorème fondamental de CAUCHY donnera (*)

$$\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^{-x-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{(1-e^{-z})^{-x-1}}{(z-x)z^{-x-1}} \cdot dz; \quad (20)$$

car l'hypothèse $\Re(x) < -1$ nous permet de faire usage du chemin d'intégration C , quoiqu'il contient les deux points singuliers $z = \pm 2\pi i$.

Or, la formule (3) donnera, en vertu de (20),

$$(x+1) \cdot \psi_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{(1-e^{-z})^{-x-1}}{z^{n-x+1}} dz;$$

posons ensuite

$$z = 2\pi \cdot e^{\theta i},$$

où θ désigne un angle réel, il résulte

$$(x+1) \psi_n(x) (2\pi)^{n-x} = \int_{\omega}^{2\pi+\omega} \left(1 - e^{-2\pi e^{\theta i}}\right)^{-x-1} e^{(x-n)\theta i} d\theta, \quad (21)$$

où ω désigne un angle réel convenable; car l'intégrale qui figure au second membre de (21) est une fonction multiforme, dont la valeur dépend de ω .

(*) On voit que la formule (20) est applicable si nous supposons $\Re(x) < 0$ seulement, mais cette hypothèse ne suffit pas pour démontrer l'inégalité (22).

Ces réductions faites, une intégration par parties donnera, en vertu de (21), cette proposition, essentielle dans ce qui suit :

Supposons $\Re(x) < -1$, il est possible de choisir le positif entier n si grand que

$$|(2\pi)^n \cdot n^\rho \cdot \psi_n(x)| < \sigma, \quad (22)$$

où σ désigne une quantité positive, donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, tandis que $\rho < 1$.

Dans ce qui suit nous désignons toujours par le symbole

$$|f(n)| < \sigma$$

qu'il est possible de choisir le positif entier n si grand que la valeur absolue $|f(n)|$ ne dépasse pas à une certaine quantité positive, donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.

Cela posé prenons comme point de départ ces deux valeurs limites (*)

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} \cdot \varphi_{2n}(x) &= 2 \cos(2\pi x) + \delta_n, & |\delta_n| < \sigma, \\ (-1)^{n-1} (2\pi)^{2n+1} \cdot \varphi_{2n+1}(x) &= 2 \sin(2\pi x) + \varepsilon_n, & |\varepsilon_n| < \sigma, \end{aligned} \quad (23)$$

puis appliquons la formule suivante (**):

$$\Phi_{n+1}(x) + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \Phi_{n-s+1}(x), \Psi_{2s}(x) + (-1)^n n \cdot \Psi_{2n}(x) = 0, \quad (24)$$

où nous avons posé pour abréger

$$\begin{aligned} \Phi_{r+1}(x) &= r! \left(\varphi_{r+1}(x) - \varphi_{r+1}(0) \right) \\ \Psi_{2r}(x) &= (x+1) \cdot x(x-1) \dots (x-r+1) \cdot \psi_{r-1}(x); \end{aligned}$$

mettons ensuite

$$\begin{aligned} (2\pi)^r \left(\varphi_r(x) - \varphi_r(0) \right) &= f_r(x) \\ \Gamma_r(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1) \cdot r^x}{x(x+1) \dots (x+r-1)}, \end{aligned}$$

de sorte que nous aurons, pourvu que x soit ni nulle ni négatif entier, cette

(*) Loc. cit., p. 296.

(**) Loc. cit., 305.

valeur limite

$$\Gamma_n(x) = \Gamma(x) + R_n, \quad |R_n| < \sigma;$$

la formule (24) s'écrit, après un simple calcul, sous cette autre forme plus commode pour les recherches qui nous occupent ici :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) + \frac{x+1}{\Gamma_n(-x)} \cdot (2\pi)^{n+1} \cdot n^{-x} \cdot \psi_{n-1}(x) = \\ = -(x+1) \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(-1)^s f_{n-s+1}(x)}{\Gamma_s(-x)} \cdot \frac{(2\pi)^{s+1} \cdot s^{-x} \cdot \psi_{s-1}(x) \cdot (s-1)!}{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Supposons maintenant $-1 > \Re(x) > -3$, la formule (22) montre qu'il est possible de choisir n si grand que la valeur absolue de second membre de (25) deviendra plus petits que σ . En effet, les valeurs absolues de tous les termes possèdent la propriété susdite et c'est la même chose avec les termes multipliés par n , le premier et le dernier exclus.

Cela posé, appliquons la formule *eulérienne*

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

nous aurons, en vertu de (23), ces deux formules analogues

$$\left. \begin{aligned} \frac{(2\pi)^{2n+1} \cdot \psi_{2n}(x)}{(-1)^n \cdot (2n)^x} &= \frac{2 \sin \pi x}{\Gamma(x+2)} + \delta'_n, \quad |\delta'_n| < \sigma, \\ \frac{(2\pi)^{2n+2} \cdot \psi_{2n+1}(x)}{(-1)^n \cdot (2n+1)^x} &= \frac{2 \cos \pi x}{\Gamma(x+2)} + \varepsilon'_n, \quad |\varepsilon'_n| < \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Revenons maintenant à la définition (1), nous aurons

$$\begin{aligned} (x+2) \psi_n(x+1) (2\pi)^{n+1} \cdot n^{-x-1} &= \frac{x-n}{n} \cdot (2\pi)^{n+1} \cdot n^{-x} \cdot \psi_n(x) + \\ &+ \frac{2\pi(x+1)}{n} \cdot (2\pi)^n \cdot n^{-x} \cdot \psi_{n-1}(x), \end{aligned}$$

ce qui donnera, en vertu de (22), cette valeur limite

$$(x+2) \cdot \lim_{n=\infty} \left((2\pi)^{n+1} \cdot n^{-x-1} \cdot \psi_n(x+1) \right) = - \lim_{n=\infty} \left((2\pi)^{n+1} \cdot n^{-x} \cdot \psi_n(x) \right),$$

valable, pourvu que $\Re(x) < -1$, c'est-à-dire que les formules (24) sont vraies aussi dans ce cas. De plus, nous verrons que les formules (26) sont

vraies encore pour $\Re(x) < 0$ et ainsi de suite, c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général:

Les valeurs limites (26) sont vraies pour une valeur finie quelconque de x .

Quant au polynôme $\chi_n(x)$, appliquons la formule (16 bis), un simple calcul donnera, en vertu de (26), ce théorème analogue au précédent:

Supposons x fini, nous aurons la valeur limite:

$$\frac{\pi^{2n+2} \cdot \chi_n(x)}{(2n+1)^x} = \frac{2}{\Gamma(x+2)} + \delta'_n, \quad |\delta'_n| < \sigma. \quad (27)$$

§ 5. SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS $\psi_n(x)$ ET $\chi_n(x)$.

Les valeurs limites que nous venons de développer nous permettent de déduire quelques propriétés des séries infinies des formes suivantes, où les coefficients a_n et b_n sont indépendants de x :

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \psi_s(x) \quad (28)$$

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \chi_s(x), \quad (28 \text{ bis})$$

séries de polynômes qui présentent des analogies avec les séries de factorielles, ce qui est très singulier, ce me semble.

En effet, il est évident que les formules (26) et (27) nous donnent cette première proposition:

Supposons finis tous les termes de $\mathfrak{F}(x)$ ou de $\mathfrak{G}(x)$, les séries $\mathfrak{F}(y)$ ou $\mathfrak{G}(y)$ seront certainement absolument convergentes, pourvu que

$$\Re(y - x) < -1.$$

De plus, supposons convergentes les deux séries

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} |a_s \psi_s(x)|, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} |b_s \chi_s(x)|, \quad (29)$$

puis désignons par λ une quantité réelle et négative, il est évident que ces

deux autres séries

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} |a_s \psi_s(x + \lambda)|, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} |b_s \chi_s(x + \lambda)|, \quad (30)$$

seront *convergentes* aussi. Inversement, supposons que les séries (24) soient *divergentes*, tandis que λ soit une quantité réelle et *positive*, les deux séries (30) seront *divergentes* aussi, d'où la proposition suivante :

Le domaine de convergence absolue d'une série $\mathfrak{F}(x)$ ou $\mathfrak{G}(x)$ est un demi-plan situé à gauche d'une certaine ligne droite, perpendiculaire à l'axe des nombres réels.

Cela posé, les formules (26) (27) nous donnent immédiatement ces deux conditions suffisantes et nécessaires pour la convergence de séries qui nous occupent :

1.^o Supposons que les séries de puissances

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s x^s, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s x^s \quad (31)$$

ayont ses rayons de convergence plus grands que 2π , respectivement π^2 , les deux séries $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$ seront *convergentes* pour une valeur finie quelconque de x , de sorte que $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$, sont des fonctions transcendantes entières.

2.^o Supposons que les rayons de convergence des séries de puissances (31) soient 2π , respectivement π^2 , la convergence de la série $\mathfrak{F}(x)$, respectivement $\mathfrak{G}(x)$, exige que les coefficients a_s et b_s satisfont aux conditions

$$|a_n| < K \cdot (2\pi)^n \cdot n^\omega, \quad |b_n| < K \pi^{2n} \cdot n^\omega, \quad (32)$$

où K désigne un nombre positif fini, tandis que l'exposant ω est une quantité réelle finie; dans ce cas nos deux séries $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$ sont certainement absolument convergentes, pouron que $\Re(x) < -\omega - 1$.

Il est évident que les deux formules (3) (4) nous fournissent l'exemple le plus simple d'une série $\mathfrak{F}(x)$, respectivement $\mathfrak{G}(x)$, savoir

$$\left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(x) \cdot \alpha^{s+1}, \quad |\alpha| < 2\pi. \quad (3)$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \chi_s(x) \cdot \alpha^{2s+2}, \quad |\alpha| < \pi. \quad (4)$$

Étudions maintenant ces deux séries pour $|x| = 2\pi$, respectivement $|\alpha| = \pi$, il résulte de (26) (27):

Supposons $\Re(x) < -1$, les deux séries (3) (4) sont absolument convergentes dans tous les points des circonférences de leurs cercles de convergence.

Supposons, au contraire $0 > \Re(x) > -1$, les séries (3) et 4 seront convergentes mais non absolument, dans les points susdits à l'exception des points singuliers $\alpha = \pm 2\pi i$, respectivement $\alpha = \pm \pi$.

Posons dans (3) $x = \pm 2\pi i$, nous aurons ces deux autres développements

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2\pi)^{s+2} \cdot \psi_{2s+1}(x) \quad (33)$$

$$0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2\pi)^{2s} \cdot \psi_{2s}(x), \quad (34)$$

séries qui sont convergentes, et cela absolument, pourvu que $\Re(x) < -1$.

La formule (34) montre évidemment que les séries $\mathfrak{F}(x)$ admettent, en tous cas, un *développement de zéro*.

Posons encore dans (4) $x = \pm \pi$, il résulte une formule analogue à (33), savoir

$$\frac{1}{1+x} = - \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\pi)^{2s+2} \cdot \chi_s(x), \quad (35)$$

qui est applicable, pourvu que $\Re(x) < -1$.

Il est digne de remarque que plusieurs des formules élémentaires développés dans le § 2, 3 nous donnent, comme des limites, les trois formules particulières (33), (34) et (35).

Copenhague, le 30 janvier 1905.