VII. Zur mathematischen Theorie des Ferromagnetismus¹⁾; von H. E. J. G. du Bois.

§ 1. *Einleitung.* Im Jahre 1882 schrieb Hr. G. Wiedemann: „Ehe die Magnetisirung der Körper genügend theoretisch behandelt werden kann, sind ihre Aenderungen zunächst experimentell zu untersuchen.“²⁾ Angesichts einer, der Vollständigkeit sich nähernden, Ausdehnung, wie sie unsere Kenntnisse auf diesem Gebiete im seitdem verflossenen Jahrzehnt gewonnen haben, darf es jetzt zeitgemäss erscheinen, die alte mathematische Theorie einer, wenn auch in den meisten Punkten nur geringfügigen, so doch nothwendigen Revision zu unterziehen.

Schon Kirchhoff³⁾ legte 1853 den Grund hierzu, indem er die ursprünglichen Poisson'schen Integralgleichungen neu gestaltete und einige wichtige Specialfälle löste. Die Anwendbarkeit der ersteren ist aber eine beschränkte und wird durch Duhem's⁴⁾ Wiederaufnahme des analytischen Problems auf Grundlage des thermodynamischen Potentials kaum ausgedehnt. Im Folgenden soll eine mehr geometrische Behandlung der neuen Theorie versucht werden; dabei sollen mehrere Sätze klar formulirt und scharf bewiesen werden, die als Princip neuerer Methoden in den Vordergrund traten; daran reiht sich endlich die Besprechung zweier weiterer Fälle von praktischem Interesse.

§ 2. *Bezeichnungen.* Von Quaternionenausdrücken sind nur Scalar, Vector, Tensor (numerischer Werth eines Vectors), sowie der Laplace'sche Operator ∇^2 angewandt; Vektoren

1) Die Bezeichnung „ferromagnetisch“, welche von manchen Autoren unterschiedslos mit „paramagnetisch“ gebraucht worden ist, bliebe wohl besser auf das besondere Verhalten von Fe, Co, Ni, Fe₃O₄ und etwa noch aufzufindender ähnlicher Substanzen beschränkt, da jenes sich in jeder Hinsicht von demjenigen der paramagnetischen wie der diamagnetischen Körper unterscheidet.

2) G. Wiedemann, *Electricität* 3, § 416 Schlusssatz.

3) Kirchhoff, *Gesamm. Abhandl.* p. 217.

4) Duhem, de l'aimantation par influence, Thèse Nr. 642, Paris 1888.

im allgemeinen sind mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Um die überflüssige Häufung der benutzten Buchstaben zu umgehen, sind den Vektoren die Richtungsindices x, y, z, v, τ angehängt, um deren Componenten nach den X, Y, Z -Axen, die Normalcomponenten und die Tangentialcomponenten an bestimmten Flächen zu bezeichnen. Bei mehreren Indices kommen diejenigen der Richtung zuletzt; eine derartige Bezeichnung ist für Zwangscomponenten in der Elasticitätstheorie längst üblich; sie fördert, wie mir scheint, Kürze und Uebersichtlichkeit zugleich.

Es bedeutet ferner wie üblich: $\mathfrak{J}$, Magnetisirung; $\mathfrak{B}$, Induction; $\mathfrak{H}$, magnetische Intensität; T , magnetisches Potential; κ , Susceptibilität; μ , Permeabilität; N , Entmagnetisirungsfactor (vgl. § 10); L , Strecke auf Integrationswegen; m , Dimensionsverhältniss der Länge zum Durchmesser von Cylindern. Mittelwerthe sind durch Horizontalbalken über dem Buchstaben bezeichnet; ist letzterer gestrichen, so wird die betreffende Grösse innerhalb der ferromagnetischen Substanz betrachtet. Die Grössen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ und T sind mit den Indices i oder e versehen, je nachdem sie von der Magnetisirung des betrachteten Körpers selbst oder von irgend einem anderen Agens herrühren. Die Summe der beiden so angedeuteten Glieder erhält den Index t (total); so ist z. B.:

$$\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_i.$$

Von manchen Autoren wird diese Zergliederung als künstlich verworfen; indessen scheint mir ohne sie eine präzise Behandlung undurchführbar.

Einige meist wohlbekannte Sätze über Raumvertheilungen von Vektoren¹⁾ seien hier in theilweise modificirter Fassung zusammengestellt:

I. Vectorvertheilungen im allgemeinen.

§ 3. *Solenoidale Vertheilung* besitzt ein Vector innerhalb eines Raumgebietes, wenn er in jedem Punkte, wo seine Com-

1) Vgl. namentlich Sir Wm. Thomson (jetzt Lord Kelvin) Repr. Pap. Electr. and Magn. §§ 504—523; jene Entwicklungen und Benennungen sind zwar ursprünglich für rein electrische, resp. magnetische Grössen durchgeführt, können aber ganz allgemein aufgefasst werden, wie dies z. B. Maxwell (Treatise 2. Ed. I. p. 21) thut.

ponenten stetig bleiben, der räumlichen Continuitätsgleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} = 0$$

und an jeder Unstetigkeitsfläche der oberflächlichen Continuitätsgleichung $\mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}_v'$ genügt; beide sind nothwendige und genügende Bedingungen. Das Gebiet zerfällt in Vectorröhren, deren Querschnitt dem Tensor $\mathfrak{F}$ umgekehrt proportional ist. Das Oberflächenintegral des Vectors über eine geschlossene Fläche schwindet stets.

§ 4. *Lamellare Vertheilung.* Nothwendige und genügende Bedingung sind die Irrotationalitätsgleichungen:

$$(2) \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x}.$$

Allgemeine Grenzbedingungen für Unstetigkeitsflächen sind nicht anzugeben; sie richten sich nach dem besonderen Fall. Der Ausdruck $\mathfrak{F}_x dx + \mathfrak{F}_y dy + \mathfrak{F}_z dz$ ist ein exactes Differential, dessen Integral das scalare Potential des Vectors darstellt. Das Gebiet zerfällt in durch Aequipotentialflächen begrenzte Lamellen, deren Dicke dem Tensor $\mathfrak{F}$ umgekehrt proportional ist. Einer geschlossenen Curve entlang ist das Linienintegral des Vectors Null oder gleich einer Constanten, je nachdem die Curve in einem acyclischen oder cyclischen Raume verläuft.

§ 5. *Complex lamellare Vertheilung.* Nothwendige und genügende Bedingungsgleichung:

$$(3) \quad \mathfrak{F}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} \right) + \mathfrak{F}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} \right) + \mathfrak{F}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} \right) = 0.$$

Der Ausdruck $\mathfrak{F}_x dx + \mathfrak{F}_y dy + \mathfrak{F}_z dz$ ist kein exactes Differential, kann aber durch einen scalaren integrirenden Divisor $f(x, y, z)$ in ein solches verwandelt werden, dessen Integral $\Phi(x, y, z)$, einer Anzahl constanter Parameter $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_n$ gleichgesetzt, eine zum Vector orthogonale Flächenschaar darstellt. Beziehungen zum Tensor gibt es in diesem Falle nicht.

§ 6. *Lamellar-solenoidale Vertheilung.* Nothwendige und genügende Bedingung für das Potential ist die Laplace'sche Gleichung $\nabla^2 = 0$. Das betrachtete Gebiet zerfällt in Zellen, deren Volum dem Tensorquadrat umgekehrt proportional ist.

§ 7. *Complex lamellar-solenoidale Vertheilung.* Nothwendige und genügende Bedingung für den variablen Flächenparameter Φ ist, wie leicht zu beweisen, die Gleichung:

$$(4) \quad f' \nabla^2 \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

worin f den integrierenden Divisor bedeutet.

§ 8. *Allgemeine Sätze.*

I. *Wenn ein Vector irgend einer der angeführten Bedingungen genügt, so erfüllt sein Product in eine constante scalare Grösse sie ebenfalls.*

II. *Die Superposition zweier oder mehrerer solenoidaler oder lamellarer Vertheilungen ergibt wieder eine solenoidale, resp. lamellare Resultirende.*

Denn die betreffenden Bedingungsgleichungen enthalten die Ableitungen der Vectorcomponenten nach den Coordinaten nur linear. Bei complex lamellarer Vertheilung ist dies nicht mehr der Fall und trifft daher der Superpositionssatz im allgemeinen nicht zu.

II. Magnetische Vectorvertheilungen.

§ 9. *Stromloses Ferromagneticum.* Dieses werde als homogen und isotrop vorausgesetzt und sei auch frei von Hysteresis des Werthes wie der Richtung, indem man es sich dazu beispielsweise Erschütterungen oder superponirten abnehmenden Wechsel Feldern ausgesetzt denken kann.¹⁾ Kirchhoff stellte bereits a. a. O. den neuen Ansatz auf, dass aus Symmetriegründen $\mathfrak{S}$ eine Function von $\mathfrak{H}$ und damit gleichgerichtet sein müsse. Dasselbe gilt für $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{S}$; daher ist $\mathfrak{S} = \kappa(\mathfrak{H})\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B} = \mu(\mathfrak{H})\mathfrak{H}$; sämmtlich Vektorgleichungen, welche auch für die Componenten gelten. Diese Bezeichnung $\kappa(\mathfrak{H})$ und $\mu(\mathfrak{H})$ besagt, dass nach den gemachten Voraussetzungen κ und μ nur Functionen von $\mathfrak{H}$ sind, und zwar rein empirische, deren Haupteigenschaft darin besteht, dass sie bei unbegrenztem Anwachsen ihres Argumentes gegen 0 bez. 1 convergiren. Der bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse geringeren Bedeutung jener, für Ferromagnetica variablen, Functionen entsprechend werden sie im Folgenden kaum Verwendung finden.

1) Gerosa und Finzi, Rend. R. Ist. Lomb. **24**, p. 149. 1891; Rend. R. Lincei (8) **7**, p. 253. 1891; Beibl. **16**, p. 229. 1892.

Wenden wir uns zur Vertheilungsart der drei magnetischen Hauptvectoren $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$.

§ 10. *Die Intensität.* $\mathfrak{S}_e$ ist lamellar-solenoidal vertheilt; an einer geschlossenen, mit dem Strome I q -fach verschlungenen Curve entlang beträgt das Linienintegral $4\pi q I$.

$\mathfrak{S}_i$ ist lamellar, im allgemeinen nicht solenoidal: an jeder geschlossenen Curve entlang schwindet das Linienintegral. Betrachten wir eine solche näher, die theils im Ferromagneticum, theils im Interferricum¹⁾ liegen möge (vgl. Fig. 1). Nun ist in Fe

Fig. 1.

$$\int_E^A \mathfrak{S}_i' dL$$

das Linienintegral der selbstentmagnetisirenden Intensität; dagegen in Int

$$\int_A^E \mathfrak{S}_i dL = {}^E_A T_i,$$

d. h. der magnetische Potentialzuwachs von der Aus- bis zur Eintrittsstelle der Curve, sofern dieser von der eigenen Magnetisirung des Fe herrührt. Da nun

$$\int_A^A \mathfrak{S}_i dL = 0 = \int_A^E \mathfrak{S}_i dL + \int_E^A \mathfrak{S}_i' dL,$$

folgt

$$(5) \quad {}^E_A T_i = - \int_E^A \mathfrak{S}_i' dL,$$

d. h.: III. Zwischen zwei beliebigen Punkten E und A der Grenzfläche ist der Antheil ${}^E_A T_i$ des magnetischen Potentialzuwachses im Interferricum numerisch gleich dem Linienintegral der selbstentmagnetisirenden Intensität im Ferromagneticum.

1) Dieser Ausdruck bezieht sich auf alle nicht ferromagnetischen Raumtheile und ist dem französischen „entrefer“ des Hrn. Hospitalier nachgebildet, welches sich seiner Bequemlichkeit wegen allgemein eingebürgert hat.

Die Verwendbarkeit dieses Satzes wird weiter unten zu Tage treten. Falls $\mathfrak{S}_i' = N\mathfrak{S}$, wo N constant, wird das Linienintegral in Fe

$$N \int_E^A \mathfrak{S} \cos(\mathfrak{S}, L) dL.$$

Dies trifft in aller Schärfe nur bei Ellipsoiden zu, welche in Richtung einer Axe magnetisirt sind; in einer Anzahl von Fällen weicht aber $\mathfrak{S}$ von einem mittleren Werthe $\bar{\mathfrak{S}}$ nur wenig ab; legen wir nun den Integrationsweg einer $\mathfrak{S}$ -Linie entlang, so können wir

$$(6) \quad \int_E^A \mathfrak{S}_i' dL = \bar{N} \bar{\mathfrak{S}}^A(L)$$

setzen; die hierdurch definirte Zahl $\bar{N}$ nennen wir den *mittleren Entmagnetisirungsfactor*; es ist nicht ausgeschlossen, dass dieser sich mit der Magnetisirung ändere, namentlich in der Nähe des Maximalgebietes jener Grösse.

$\mathfrak{S}_i$ ist als Summe der beiden lamellaren Vektoren $\mathfrak{S}_e$ und $\mathfrak{S}_i$ ebenfalls lamellar (§ 8. II). Ferner:

$$\int_A^A \mathfrak{S}_i dL = \int_A^A \mathfrak{S}_e dL + 0 = 4\pi q I$$

(erstes Princip der Hopkinson'schen Theorie magnetischer Kreise).

An Grenzflächen zwischen Ferromagneticum und Interferrium ist das Potential T_i stetig, mithin $\mathfrak{S}_{i\tau} = \mathfrak{S}_{i\tau}'$; dagegen $\mathfrak{S}_{i\nu} = \mathfrak{S}_{i\nu}' + 4\pi \mathfrak{S}_\nu$ (Princip der Ewing-Low'schen „Isthmus-Methode“).

§ 11. *Die Magnetisirung.* Da nach unserem Ansatz die $\mathfrak{S}$ -Linie überall mit der $\mathfrak{S}_i$ -Linie gleichgerichtet ist, mithin senkrecht zur Aequipotentialfläche $T_i = \text{const.}$ verläuft, leuchtet ein, dass $\mathfrak{S}$ mindestens complex lamellar sein muss. Nach der alten Theorie ist bekanntlich diese Grösse lamellar-solenoidal; der oben ausgesprochene abweichende neue Satz kann wie folgt analytisch bewiesen werden. Es ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial y} \right) &= \kappa \mathfrak{H}_{tx} \left(\kappa \frac{\partial \mathfrak{H}_{ty}}{\partial x} + \mathfrak{H}_{ty} \frac{\partial \kappa}{\partial x} - \kappa \frac{\partial \mathfrak{H}_{tz}}{\partial y} - \mathfrak{H}_{tz} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) \\ \mathfrak{Z}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial z} \right) &= \kappa \mathfrak{H}_{ty} \left(\kappa \frac{\partial \mathfrak{H}_{tz}}{\partial x} + \mathfrak{H}_{tz} \frac{\partial \kappa}{\partial x} - \kappa \frac{\partial \mathfrak{H}_{tx}}{\partial z} - \mathfrak{H}_{tx} \frac{\partial \kappa}{\partial z} \right) \\ \mathfrak{Z}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial x} \right) &= \kappa \mathfrak{H}_{tz} \left(\kappa \frac{\partial \mathfrak{H}_{tx}}{\partial y} + \mathfrak{H}_{tx} \frac{\partial \kappa}{\partial y} - \kappa \frac{\partial \mathfrak{H}_{ty}}{\partial x} - \mathfrak{H}_{ty} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

In obigen drei Klammerausdrücken zur Rechten heben sich je das erste und dritte Glied wegen der Lamellarität von $\mathfrak{H}_i$ auf; da die übrige Summe rechts identisch Null wird, schwindet die Summe links ebenfalls und ist dadurch die complex lamellare Bedingungsgleichung (3) für $\mathfrak{Z}$ erfüllt; dabei tritt die Susceptibilität als integrierender Divisor auf. Es gelten ferner nach der neuen Theorie folgende Sätze, die sich öfters brauchbar erweisen.¹⁾

IV. Ein Körper sei so gestaltet, dass in einer gegebenen Richtung eine gleichförmige Magnetisirung eine gleichförmige, ihr entgegengerichtete, entmagnetisirende Intensität erzeugen würde; dann inducirt ein äusseres, jener Richtung paralleles, gleichförmiges Feld, eine derartige Magnetisirung.

V. Ein beliebig gestalteter, ferromagnetischer Körper befinde sich in einem beliebig vertheilten äusseren Felde. Falls dann die Intensität des Letzteren in's Unendliche wächst, nähert sich überall die Richtung der Magnetisirung derjenigen des Feldes und ihr Werth dem Maximalwerthe für die Substanz (Kirchhoff).

§ 12. Die Induction. $\mathfrak{B}_e$ ist mit $\mathfrak{H}_e$ identisch, folglich lamellar-solenoidal. $\mathfrak{B}_i$ ist nach einem bekannten Fundamentalsatze stets solenoidal, wie auch $\mathfrak{Z}$ vertheilt sein möge. Folglich ist $\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}_e + \mathfrak{B}_i$, ebenfalls solenoidal (§ 8. II). Nebenbei ist $\mathfrak{B}_t$ complex lamellar, was man in derselben Weise wie für $\mathfrak{Z}$ zeigen kann, nur dass als integrierender Divisor μ an Stelle von κ tritt. Schliesslich ist also die totale Induction complex lamellar-solenoidal; sie hat ein Vectorpotential, dagegen kein scalares Potential. An Grenzflächen gilt:

$$\mathfrak{B}_{tv} = \mathfrak{B}_{tv}'; \text{ dagegen } \mathfrak{B}_{tt'} = \mathfrak{B}_{tt'} + 4\pi \mathfrak{Z}.$$

(Princip der magneto-optischen Messmethode), woraus das Tangentengesetz für die Brechung der Inductionslinien

$$\tan \alpha' = \mu \tan \alpha$$

1) Vgl. du Bois, Wied. Ann. **31** pp. 946, 949, 1887.

abgeleitet werden kann, wo α' und α die Neigung jener Linien zur Normalen im Ferromagneticum, resp. im Interfericum bedeuten.

In einer grossen Anzahl der praktisch vorkommenden Fälle erreicht $\mathfrak{S}_i$ nur wenige Hundert C. G. S.-Einheiten und es ist dann mit genügender Annäherung:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}_i$$

sodass die Magnetisirung ebenfalls als solenoidal betrachtet werden kann (§ 8. I). Der andere extreme Fall ist der (§ 11. V) angenommene.

§ 13. *Stromdurchflossenes Ferromagneticum.*¹⁾ In einem, electricische Strömungen $\mathfrak{C}$ (techn. „Stromdichte“) leitenden, Körper ist bekanntlich $\mathfrak{S}_e$ noch solenoidal, indess nicht mehr lamellar. Unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$4\pi \mathfrak{C}_x = \frac{\partial \mathfrak{S}_{ez}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_{ey}}{\partial z}, \quad 4\pi \mathfrak{C}_y = \frac{\partial \mathfrak{S}_{ex}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{S}_{ez}}{\partial x}, \quad 4\pi \mathfrak{C}_z = \frac{\partial \mathfrak{S}_{ey}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}_{ex}}{\partial y},$$

woraus unmittelbar das Gesagte hervorgeht, wäre die complex lamellare Bedingungsleichung für $\mathfrak{S}_e$

$$\mathfrak{C}_x \mathfrak{S}_{ex} + \mathfrak{C}_y \mathfrak{S}_{ey} + \mathfrak{C}_z \mathfrak{S}_{ez} = \mathfrak{C} \mathfrak{S}_e \cos(\mathfrak{C}, \mathfrak{S}_e) = 0$$

welche verlangt, dass $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}_e$ in jedem Punkte senkrecht zu einander verlaufen. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall²⁾, folglich ist $\mathfrak{S}_e$ nicht einmal complex lamellar. Zwar ist $\mathfrak{S}_i$ immer noch lamellar, die Summe $\mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}_e + \mathfrak{S}_i$ aber entspricht nun keiner besonderen Vertheilungsart mehr; ebensowenig ist dies daher für die Magnetisirung der Fall.³⁾

Da $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{S}_e$, ebenso wie $\mathfrak{B}_i$ nach wie vor solenoidal ist, bleibt es auch ihre Summe $\mathfrak{B}_t$. Die Continuität des Inductionstromes, die Grundlage der ganzen Theorie der Inductionsröhren, bildet daher ein völlig allgemeines Fundamentalprincip.

Dies wurde neuerdings auch von Hrn. Janet⁴⁾ in einer Arbeit über Magnetisirung in „nicht conservativen“ Feldern

1) Vgl. Kirchhoff, l. c. p. 230—237.

2) Vielmehr lassen sich leicht Anordnungen ersinnen, wo beide Grössen beliebige Winkel mit einander bilden, wie Hr. Prof. Planck mir anzugeben die Güte hatte.

3) Man kann solche willkürliche Vertheilungen als complex solenoidale bezeichnen; cf. Sir Wm. Thomson l. c. § 509.

4) P. Janet, Journal de physique (2) 9. p. 500. 1890.

hervorgehoben. Im weitem Verlaufe seiner Erörterungen constatirt der Verfasser die Complicirtheit und Unlösbarkeit der Differential- oder Integralgleichungen, welche man bei Einführung variabler Susceptibilität erhält und setzt diese Grösse daher einfach constant, wie viele vor ihm. Indessen scheint es mir principiell ungerechtfertigt, bei eintretendem Versagen der Analyse ihr zu Hülfe Naturgesetzen derart Gewalt anzuthun. Trotzdem werden Hrn. Janet's interessante Folgerungen über das Verhalten transversal magnetisirter stromdurchflossener Cylinder elliptischen Querschnitts innerhalb eines beschränkten Bereichs ungefähr zutreffen; denn das im letzten Absatz des § 12 bemerkte dürfte auch bei seinen Versuchen gelten.

§ 14. *Die Sätze Sir W. Thomson's*¹⁾ über ähnliche electromagnetische Systeme mit Strömen proportional den Linear-dimensionen bleiben in der neuen Theorie unverändert, was hier nicht bewiesen werden soll, und erweisen sich bei der Bearbeitung mancher praktischer Fragen sehr nützlich.

III. Magnetische Kreise.

§ 15. *Geschlitzter Ring.* Wegen der nach dem Obigen ganz allgemein stattfindenden Solenoidalität der Induction bestehen alle electromagnetischen Systeme ohne Unterschied aus Schaaren geschlossener Inductionsröhren, können daher als magnetische Kreissysteme aufgefasst werden (zweites Princip der Hopkinson'schen Theorie). Dabei wird es ganz von dem betrachteten Specialfalle abhängen, ob es sich empfiehlt, auf jene Eigenschaft das Hauptgewicht zu legen, wie es für die technisch benutzten Gebilde mit Erfolg durchgeführt ist. Im Folgenden soll an einem typischen Beispiele gezeigt werden, wie man zu den so gewonnenen Ergebnissen auf rein physikalischem Wege gelangen kann.²⁾

Der einfache Typus magnetischer Kreise im gebräuchlichen engern Sinne ist ein radial geschlitzter dünner Ring, welcher

1) Sir Wm. Thomson, l. c. § 564.

2) Einige mehr elementare Resultate dieses Abschnitts habe ich bereits mehrfach ohne Beweis angeführt und auf technische Probleme angewandt; Verh. physik. Ges. Berlin 9. p. 81. 1890; Phil. Mag. (5) 30. p. 335. 1890; Verh. Electrotechn. Congr. Frankfurt 11. Sept. 1891; The Electrician 27. p. 634. 1891.

dem Einfluss eines äusseren, gleichmässig peripherischen, Feldes unterliegt. Es sei (Fig. 2) r_1 der Radius des Centralkreises, r_2 derjenige des kreisförmigen Querschnitts, d die Schlitzweite.

Fig. 2.

Wenden wir die Betrachtungen des § 10 an, indem wir die Ringsubstanz als stromlos annehmen und wählen wir den Centralkreis als Integrationsweg, so wird nach (5) und (6):

$$(7) \quad {}^E_A \mathcal{R}_i = \bar{N} \bar{\mathfrak{S}} (2 \pi r_1 - d)$$

Nehmen wir nun in erster Annäherung die Magnetisirung über den ganzen Ringquerschnitt constant und überall peripherisch gerichtet an,

so sind die beiden Stirnflächen mit fictiven „Fluidis“ belegt zu denken, deren Flächendensität gleichförmig und zwar $= \pm \mathfrak{S}$ ist. Es wird dann, wie leicht gezeigt werden kann,

$$(8) \quad {}^E_A \mathcal{R}_i = 2 \int_0^d \frac{x dx}{\sqrt{r_2^2 + x^2}} = 4 \pi \mathfrak{S} (d + r_2 - \sqrt{d^2 + r_2^2})$$

Daher aus (7) und (8)

$$(9) \quad \bar{N} = \frac{2(d + r_2 - \sqrt{d^2 + r_2^2})}{r_1 - \frac{d}{2\pi}}$$

Die hier behufs erster Annäherung gemachte Annahme trifft bei unendlichem äusseren Felde zu (§ 11. V); dem gefundenen Ausdrucke (9) werden sich daher die in Wirklichkeit gemessenen Werthe von IV. bei genügender Steigerung des magnetisirenden Stromes nähern müssen.

§ 16. *Zweite Annäherung.* Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die fictiven Fluida sich auch auf die Ringfläche verbreiten, jedoch immer noch am dichtesten in der Nähe der Stirnflächen bleiben werden. In vielen Fällen wird die Magnetisirung genügend nahe solenoidal sein (§ 12), das Auftreten der Fluida sich daher auf die Oberfläche beschränken. Da r_1 gross gegen

r_2 vorausgesetzt ist, wird die Krümmung des Ringes zu vernachlässigen sein, mithin die Vertheilung nahe den Stirnflächen dieselbe sein, als wenn zwei halb unendliche Cylinder vom Radius r_2 sich in der Entfernung d gegenüberständen. Der Berechnung ist dieser Fall nicht ohne Weiteres zugänglich, man kann jedoch behaupten, dass

$$(10) \quad \sum_A \mathcal{R}_i = 4 \pi \bar{\mathfrak{S}} d n \left(\frac{d}{r_2} \right)$$

Die Zahl n ist nur Function des Verhältnisses d/r_2 . Sie entspricht ungefähr dem Reciprok des von Hopkinson definirten „Streuungscoefficienten“ $\nu^{1)}$, welches experimentell bestimmt werden könnte; sei es direct auf magnetischem Wege, sei es aus Widerstandsmessungen ähnlicher galvanischer oder aus Capacitätsbestimmungen ähnlicher electrostatischer Gebilde. Letzteres auf Grund der bekannten mathematischen Analogie in jene Gebieten. Man erhält nun aus (7) und (10)

$$(11) \quad \bar{N} = \frac{2 d n \left(\frac{d}{r_2} \right)}{r_1 - \frac{d}{2 \pi}}$$

Bei unendlich engem Schlitz wird $n = 1$, daher

$$(12) \quad N = \frac{2 d}{r_1}$$

Der Ausdruck (9) reducirt sich ebenfalls auf die einfache Gleichung (12), wenn d/r_1 unbegrenzt abnimmt. Bei zunehmender Schlitzweite wird $n < 1$; überdies muss diese Zahl ebenso wie $\bar{N}$ (§ 10) anfangen, sich mit $\bar{\mathfrak{S}}$ zu ändern, sobald letztere Grösse einen gewissen Werth übersteigt (für Eisen etwa $\bar{\mathfrak{S}} > 1000$). Im hiesigen Institute sind Untersuchungen an geschlitzten Ringen im Gange, über die nach Abschluss berichtet werden soll. Die erhaltenen Resultate können mit der nöthigen Umsicht auch auf weniger einfach gestaltete Gebilde annähernd angewandt werden.

IV. Endlicher Cylinder.

§ 17. *Entmagnetisirungsfactoren.* Trotz der vielen seit Green (1828) über die Magnetisirung endlicher Cylinder veröffentlichten, einerseits theoretischen, andererseits rein empirischen

1) J. u. E. Hopkinson, Phil. Trans. 177. I. p. 331. 1886.

rischen Untersuchungen liegen Angaben über deren Selbstentmagnetisirung meines Wissens nicht vor. Nun würde es bei magnetischen Messungen zwar stets den Vorzug verdienen, an Ovoiden Beobachtungen anzustellen; und diese sind auf der Drehbank kaum umständlicher herzustellen, als Cylinder mit senkrechten Endflächen. Dennoch sind weitaus die Mehrzahl der zum Theil sehr werthvolleren Experimentaluntersuchungen mit Cylindern ausgeführt. Auch dürfte dies in Zukunft noch häufig geschehen, trotzdem die so erhaltenen Resultate bez. Curven schwerlich ohne Weiteres interpretirbar sind und dadurch an Werth verlieren.

Es soll darum eine Bestimmung von Entmagnetisirungsfactoren für Cylinder aus schon vorhandenem Beobachtungsmaterial der Hrrn. Ewing und Tanakadaté versucht werden; dies steht allerdings mit dem Vorhergehenden in etwas losem Zusammenhang, möge aber aus Zweckmässigkeitsgründen hier einen Platz finden. Sobald jene Factoren als Function des Dimensionsverhältnisses bekannt sind, lassen sich alle Beobachtungsergebnisse auf den eigentlichen Normalfall endloser Gestalten zurückführen, bez. die allein charakteristische Normalcurve des untersuchten Materials feststellen. Am bequemsten geschieht dies mittels des Rayleigh-Ewing'schen Scheerungsverfahrens.¹⁾

§ 18. *Berechnung.* Nach dem oben Ausgeführten bildet zwar auch ein Cylinder mit seiner umgebenden Kraftlinienschaar ein magnetisches Kreissystem; ist dabei aber das beste Beispiel eines Falles, wo man deren Theorie nicht erfolgreich anwendet. Man muss sich vielmehr auf andere specielle Weise helfen; dabei beschränken wir uns auf den gewöhnlichen Fall, dass $\mathfrak{H}$ gering, mithin $\mathfrak{J}$ solenoidal ist (§ 12). Betrachten wir nun einen Kreiscylinder von der Länge 2, dem Radius $1/m$, dem Querschnitt π/m^2 . Falls m einen erheblichen Werth erreicht, sagen wir 100, so ist die Magnetisirung ziemlich gleichförmig und fällt nur nahe an den Enden rasch ab; lassen wir jetzt m noch weiter wachsen, indem wir unsern Cylinder bei constanter Länge verdünnen.

Nehmen wir vorläufig an, die relative lineare Vertheilung

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 22. p. 175. 1886. Das Verfahren ist von Ewing beschrieben und erläutert in „Magnetic Induction in iron etc.“ §§ 48. 64. London 1892. Uebersetz. Berlin 1892.

ändere sich weiter nicht, dann ist die entmagnetisirende Intensität $\mathfrak{S}_i'$ in einem beliebigen Punkte proportional der „Lineardensität“ der fictiven Fluida nach der Längsaxe. Die mittlere Magnetisirung bleibe stets die gleiche $\overline{\mathfrak{S}}$, so ist das Moment $2\pi \overline{\mathfrak{S}}/m^2$; mithin Letzteres und damit die Lineardensität umgekehrt proportional dem Quadrat des Dimensionsverhältnisses; dasselbe gilt für den Werth von $\mathfrak{S}_i'$ in jedem beliebigen Punkte, folglich auch für den Mittelwerth $\overline{\mathfrak{S}_i}'$ oder, da $\overline{\mathfrak{S}_i}' = \overline{N\mathfrak{S}}$ und $\overline{\mathfrak{S}}$ constant bleiben sollte

$$\overline{N}m^2 = C = \text{const. (für } m > 100).$$

§ 19. *Beobachtungsmaterial.* Hr. Ewing¹⁾ hat eine Reihe durchaus vergleichbarer Curven gegeben, welche den Einfluss des Dimensionsverhältnisses veranschaulichen; aus diesen findet man durch Rückscheerung

Nr.	m		x	C
1	300	$\overline{N}_{300} =$	$+ x$	45
2	150	$\overline{N}_{150} = 0,0014 + x$	0,00047	43
3	100	$\overline{N}_{100} = 0,0041 + x$	0,00051	46
4	75	$\overline{N}_{75} = 0,0075 + x$	0,00050	45
5	50	$\overline{N}_{50} = 0,0156 + x$	—	—
Mittel 0,0005				45

Indem man $\overline{N}_{300}$ als Unbekannte betrachtet und die Relation $\overline{N}m^2 = C$ zu Grunde legt, findet man aus der Combination von 1 mit 2, 3 und 4 die Werthe in den beiden letzten Spalten. Diese stimmen genügend überein, um unsere oben gemachte Annahme zu rechtfertigen; mittelst ihr kann man nun weitere Werthe von $\overline{N}$ für $300 < m < \infty$ berechnen.

Für $m = 50$ beträgt C schon merklich weniger, nämlich 40,2. Die Werthe von C wurden graphisch aufgetragen und da sie sich im Gegensatze zu $\overline{N}$ nur wenig ändern, lässt sich eine sie darstellende glatte Curve leicht ziehen. Die kurze Strecke von $m = 50$ bis $m = 39,4$ wurde graphisch extrapoliert und für letzteres $C = 38,0$, daher $\overline{N}_{39,4} = 0,0245$ gefunden.

1) J. A. Ewing, Phil. Trans. 176. II. p. 535. u. Pl. 57 Fig. 3, 1885.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLVI.

Von hier an abwärts können Curven des Hrn. Tanakadaté¹⁾ herangezogen werden, aus denen man findet:

$$\begin{array}{l|l} \bar{N}_{32,0} = 0,0104 + \bar{N}_{39,4} = 0,0349 & C = 35,7 \\ \bar{N}_{26,3} = 0,0255 + \bar{N}_{39,4} = 0,0500 & 34,7 \\ \bar{N}_{19,7} = 0,0570 + \bar{N}_{39,4} = 0,0815 & 31,6 \\ \bar{N}_{13,1} = 0,1202 + \bar{N}_{39,4} = 0,1447 & 24,9 \end{array}$$

Aus der *C*-Curve ergeben sich dann die interpolirten Werthe von $\bar{N}$ für beliebige Dimensionsverhältnisse m .

§ 20. *Tabellarische Uebersicht.* In den ersten drei Spalten der folgenden Tabelle, welche sich in manchen Fällen brauchbar erweisen dürfte, sind diese Resultate zusammengestellt; daneben wurden die N für Ovoide vom Axenverhältniss m nach bekannten Gleichungen berechnet und eingetragen. Die Werthe $m^2 N$ sind beigegeben, weil sie sich zur Interpolation besser eignen. Aus den Zahlenreihen ergibt sich, dass die N für Ovoide stets grösser sind als die $\bar{N}$ der entsprechenden Cylinder, wie zu erwarten war. Eine Gleichstellung ist daher unzulässig²⁾; vielmehr verhält sich ein Ovoid wie ein um ca. 10 bis 20 Proc. kürzerer Cylinder.

Entmagnetisirungsfactoren von Cylindern und Ovoiden.

m	Cylinder		Ovoide	
	$C = m^2 \bar{N}$	$\bar{N}$	N	$C = m^2 N$
0	0	12,5664	12,5664	0
0,5	—	—	6,5864	1,65
1	—	—	4,1888	4,19
5	—	—	0,7015	17,56
10	21,6	0,2160	0,2549	25,5
15	27,1	0,1206	0,1350	30,4
20	31,0	0,0775	0,0848	34,0
25	33,4	0,0533	0,0579	36,2
30	35,4	0,0393	0,0432 ³⁾	38,8

1) Tanakadaté, Phil. Mag. (5) **26**. p. 450. 1888.

2) Vgl. W. Weber, Electrodynam. Maassbestimm. **3**. p. 573. 1867; Kirchhoff, l. c. p. 221.

3) Bei einer früheren Gelegenheit habe ich $N_{30} = 0,052$ statt 0,043 angegeben und benutzt (Phil. Mag. (5) **29**. p. 295. 1891). Dieser Rechenfehler sei hiermit corrigirt; die Resultate jener Arbeit werden dadurch übrigens nicht merklich beeinflusst. Bei den Zahlen obiger Tabelle sind derartige Fehler, wie ich hoffe, durch graphische Controlle nach Möglichkeit vermieden.

m	Cylinder		Ovoide	
	$C = m^2 \bar{N}$	$\bar{N}$	N	$C = m^2 N$
40	38,7	0,0238	0,0266	42,5
50	40,5	0,0162	0,0181	45,3
60	42,4	0,0118	0,0132	47,5
70	43,7	0,0089	0,0101	49,5
80	44,4	0,0069	0,0080	51,2
90	44,8	0,0055	0,0065	52,5
100	45,0	0,0045	0,0054	54,0
150	45,0	0,0020	0,0026	58,3
200	45,0	0,0011	0,0016	64,0
300	45,0	0,00050	0,00075	67,5
400	45,0	0,00028	0,00045	72,0
500	45,0	0,00018	0,00030	75,0
1000	45,0	0,00005	0,00008	80,0
∞	—	0	0	—

Nach den Versuchen v. Waltenhofen's¹⁾ darf man weiter annehmen, dass ferromagnetische Prismen oder Bündel von beliebigem Profil in ihrem Verhalten wenig von Kreiscylindern gleicher Länge und gleichen Querschnitts abweichen werden.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., 25. Mai 1892.

1) v. Waltenhofen, Wien. Ber. 48. (2) p. 518. 1863.