Bemerkung über ganzzahlige irreductible Gleichungen.

Von Dr. W. Wirtinger.

Liegen die n Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die wir alle verschieden voraussetzen, sämmtlich innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises mit dem Radius R , so ist

$$|\Delta| \leq r^2 (2R)^{n(n-1)-2}$$

wo Δ die Discriminante, und r die dem absoluten Betrage nach kleinste Differenz zweier Wurzeln der Gleichung bezeichnet.

Daraus folgt, dass in einem Kreise mit dem Radius $\varrho < \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{(2R)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$ höchstens eine Wurzel der Gleichung liegen

kann.*)

Beschränkt man sich nun auf ganzzahlige Gleichungen, in denen der Coefficient der höchsten Potenz gleich Eins ist, so muss $|\Delta| \geq 1$ sein und man kann daher auch setzen

$$\varrho < \frac{1}{2(2R)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

Betrachtet man nun das Product zweier solcher im Bereich der natürlichen ganzen Zahlen irreductibler ganzzahliger Gleichungen n^{ten} Grades, deren Wurzeln sämmtlich innerhalb des Kreises mit dem Radius R liegen, so erhält man das Resultat:

In einem Kreise mit dem Radius

$$\varrho < \frac{1}{2(2R)^{n(2n-1)-1}}$$

liegt höchstens eine einzige Wurzel einer einzigen ganzzahligen Gleichung der erwähnten Beschaffenheit.

*) Diese Bemerkung verdanke ich einem Vortrage des Herrn Strassmann im math. Verein der Universität Berlin.

Man sieht also, dass eine im Bereich der natürlichen ganzen Zahlen irreductible Gleichung n^{ten} Grades der angegebenen Beschaffenheit vollständig bestimmt ist durch die obere Grenze aller Wurzeln und eine approximativ gegebene specielle Wurzel, wobei der erforderliche Grad der Approximation eine Function der oberen Grenze und des Grades der Gleichung ist.

Aus der Definition der Irreductibilität fließt bekanntlich der Satz, dass eine irreductible Gleichung schon durch eine einzige Wurzel vollständig bestimmt ist.

Das Vorstehende zeigt, dass die vollständige Kenntnis der Wurzel nicht mehr nöthig ist, sondern eine ganz bestimmte Approximation immer ausreicht, wenn Grad und obere Grenze aller Wurzeln gegeben sind.

Wir bemerken noch, dass man zu einer oberen Grenze der Anzahl der irreductiblen Gleichungen eines vorgegebenen Grades und einer gegebenen oberen Grenze der Wurzel durch Theilung des Kreises mit dem Radius R in solche Gebiete, in denen nur eine Wurzel liegt, allerdings gelangen kann, dass aber die so erhaltene Zahl bedeutend größer ist, als die Zahl der Gleichung, deren Coefficienten dem absoluten Betrag nach kleiner sind als die entsprechenden von $(x - R)^n$, so dass also diese Bestimmung wertlos ist. Zugleich zeigt dies, dass nicht in jedem Theilgebiete eine Wurzel liegen kann. Für $R = 2$, $n = 2$ ist z. B. die Anzahl der Theilgebiete viel größer als drei Millionen, während die Zahl der Gleichungen kleiner als 100 ist.