ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 964.

Über die anomalistische und azimuthale Bewegung des Pendels in einer Kegelfläche von nahe kreisförmiger Basis, mit Rücksicht auf die stetige Verminderung der Elongationen durch den der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand der Atmosphäre, von Herrn Dr. *Lehmann*.

(Fortsetzung der Abhandlung, welche denselben Gegenstand in Beziehung auf das gebundene und auf das freihängende, in sehr länglichen Ellipsen schwingende Pendel behandelt).

§ 26.

Die hieher gehörige Untersuchung im 36^{ten} Artikel der *Hansen'schen* Preisschrift setzt in den Integrationen durchgängig ω constant. Diese Annahme gewährt eine der möglichen Genauigkeit der Beobachtungen angemessene Genauigkeit, wenn der Pendel-Versuch nicht länger dauert als $\frac{16}{5(\epsilon)^2}$ Zeit-Secunden; denn da ω sich nicht auf die azimuthale, sondern auf die anomalistische Bewegung bezieht, so wird dieselbe Anzahl von Schwingungen vom Elongations-Maximum bis wieder zum Maximum, welche im luftleeren Raum bei constantem Elongations-Maximum (ϵ) und constantem Minimum (ϵ') zusammen $\frac{16}{5(\epsilon)^2} \left(1 + \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2}{16} + \dots \right)$ Zeit-Secunden dauert, bei einem zweiten eben so langen Pendel, welches neben dem mit constantem Elongations-Maximum (ϵ) und constantem Minimum (ϵ') schwingenden Pendel Schwingungen von unendlich-kleiner Ausdehnung macht, in dem Zeitraum $\frac{16}{5(\epsilon)^2}$ vollendet werden; der Unterschied beider Zeiträume ist (da (ϵ') sehr wenig verschieden von (ϵ) angenommen wird) sehr nahe $= \frac{16}{5(\epsilon)^2} \cdot \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2}{16} = 0,4$ Zeit-Secunden und daher unmerklich; im luft-erfüllten Raum ist (was auch das Gesetz des Widerstandes sein mag) wegen der stetigen Verminderung der Elongationen die Dauer von eben so viel Schwingungen des eben so langen Pendels, welches mit dem Elongations-Maximum (ϵ) und dem Minimum (ϵ') zu schwingen anfängt, $< \frac{16}{5(\epsilon)^2} \left(1 + \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2}{16} + \dots \right)$, aber $> \frac{16}{5(\epsilon)^2}$, übrigens aber von $\frac{16}{5(\epsilon)^2}$ um weniger als 0,4 Zeit-Secunden verschieden; um so weniger merklich ist der Unterschied der Dauer gleichvieler Schwingungen dieser drei Pendel, wenn die Pendel-Bewegung weniger als $\frac{16}{5(\epsilon)^2}$ Zeit-Secunden dauert. Wir wollen unsere Untersuchung

nicht über den Zeitraum von 2^h,243 ausdehnen, welches die mittlere Dauer der oben erwähnten Pariser Versuche war; da nun der Gleichung $\frac{16}{5(\epsilon)^2} = 2^h,243 = 8074,8$ der Werth (ϵ) = 1° 8' 26"2 genügt, so wird es, um ω als constant betrachten zu können, erlaubt sein, die anfängliche Elongation = 1° 8' 26"2 anzunehmen.

§ 27.

Die im 32^{ten} Artikel der Preisschrift aufgestellten Ausdrücke für $\frac{d\epsilon}{dt}$, $\frac{d\epsilon'}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ sind hier streng genug; denn obgleich darin θ^3 gegen 0 vernachlässigt ist, so müssen wir doch bedenken, dass, wenn θ nicht $> 1^\circ 8' 26''2$ angenommen wird, θ^3 nicht $> 1''62727$ und daher unmerklich ist. Aus den genannten Ausdrücken werden nun im 36^{ten} Artikel die Ausdrücke für $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dl}{dt}$, $\frac{d\alpha'}{dt}$ abgeleitet. Das mit $\mu + \frac{1}{2}\mu'$ multiplicirte Glied von $\frac{d\beta}{dt}$ ist näherungsweise $= -k \cdot \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} \beta$, also sein Integral absolut genommen $< k \cdot \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} (\beta)t$, also, wenn man

$$\frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{\omega} = 98604, \quad (\beta) = 1^\circ 8' 26''2, \quad t = 2^h,243$$

setzt, $< 0''6568$, also unmerklich. Das mit $\mu + \frac{1}{2}\mu'$ multiplicirte Glied von $\frac{dh}{dt}$ ist näherungsweise $= -k \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} \beta \sin 2\omega t$, also sein Integral absolut genommen $< k \cdot \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} (\beta)t$, also ebenfalls unmerklich; ebenso wird die Unmerklichkeit des mit $\mu + \frac{1}{2}\mu'$ multiplicirten Gliedes von $\frac{dl}{dt}$ bewiesen. Die mit l^2 , hl und h^2 multiplicirten Glieder von $\frac{dh}{dt}$ und $\frac{dl}{dt}$ aber lassen sich auch so ausdrücken:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{kl}{2\beta} \sin(2\omega t + 2\eta); \quad \frac{dl}{dt} = \frac{kh}{2\beta} \sin(2\omega t + 2\eta).$$

Diese beiden Gleichungen sind den Gleichungen

$$\frac{d\beta'}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{k\beta'}{4\beta} \sin(2\omega t + 2\eta)$$

gleichgeltend. Der auf diese Art gefundene Theil von $\frac{d\eta}{dt}$ ist während des ersten anomalistischen Umlaufs nicht merklich von

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{k(\beta')}{4(\beta)} \sin 2\omega t$$

verschieden, und giebt also der Grösse ω einen periodisch-veränderlichen Corrections-Factor, der aber von der Einheit um weniger als $\frac{k(\beta')}{4(\beta)}$, d. i. (wenn man $\frac{(\epsilon) \sim (\epsilon')}{(\epsilon)} = \frac{1}{9}$ und also $\frac{(\beta')}{(\beta)} = \frac{1}{17}$ setzt) um weniger als $\frac{1}{17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 12}$, also nicht merklich, verschieden ist. Lässt man nun aus den Ausdrücken für $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dl}{dt}$ die mit $\mu + \frac{1}{2}\mu'$, l^2 , hl und h^2 multiplicirten Glieder weg, so zeigt der genannte Artikel, dass, wenn für $t=0$ auch $\eta=0$ sein soll, bis auf unmerkliche Kleinigkeiten

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta) e^{-\frac{1}{2}kt} + (\beta') \frac{k}{4\omega} e^{-\frac{1}{2}kt} \sin 2\omega t, \\ h &= -(\beta) \frac{k}{4\omega} e^{-\frac{1}{2}kt} + (\beta') \frac{k}{4\omega} e^{-\frac{1}{2}kt} \cos 2\omega t, \\ l &= (\beta') e^{-\frac{1}{2}kt} + (\beta) \frac{k}{4\omega} e^{-\frac{1}{2}kt} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

sein muss. Aber auch $\frac{(\beta)k}{2\omega}$ ist ein unmerklicher Bogen, nämlich (wenn man $(\beta) = 1'' 8' 26'' 2$ und $\omega = 0,7003$ setzt)

$$\sin 2\omega t = -\frac{2k\omega}{4\omega^2 + k^2} \cdot \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2 \pm \sqrt{((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2 - \frac{k^2(\epsilon)^2(\epsilon')^2}{\omega^2}}}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}.$$

Hieraus geht hervor, dass die anomalistische Umlaufszeit des Pendels durch den Widerstand nicht geändert wird, und dass alle Elongations-Maxima nach gleichen Zeit-Intervallen, und alle Minima nach gleichen Zeit-Intervallen erreicht werden.

Wenn nun die Excentricität der Schwingungs-Ellipse irgend merklich ist, also $(\epsilon) - (\epsilon') > \text{Arc. } 24''$, so ist

$$\sin 2\omega t = -\frac{2k\omega}{4\omega^2 + k^2} \cdot \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2 \pm \left((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2 - \frac{k^2(\epsilon)^2(\epsilon')^2}{2\omega^2((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)} \right)}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}.$$

$= 1'' 1155$. Es bleiben also nur folgende merkliche Glieder übrig:

$$\beta = (\beta) e^{-\frac{1}{2}kt}, \quad h = 0, \quad l = (\beta') e^{-\frac{1}{2}kt},$$

woraus $\beta' = (\beta') e^{-\frac{1}{2}kt}$, also $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{(\beta')}{(\beta)}$ folgt. Hieraus ergibt sich, dass während der Pendelbewegung nie ein Zeitpunkt eintritt, wo die mit l^2 , hl , h^2 multiplicirten Glieder von $\frac{dh}{dt}$ und $\frac{dl}{dt}$ merklich werden, und so ist das ganze bisherige Raisonement gerechtfertigt. Der Werth $h=0$ aber zeigt, dass auch η unmerklich bleibt. Aus $\beta = (\beta) e^{-\frac{1}{2}kt}$ und $\beta' = (\beta') e^{-\frac{1}{2}kt}$ folgt, dass, wenn man die Zeit in arithmetischer Reihe wachsen lässt, sowohl ϵ als ϵ' in geometrischer Reihe abnimmt, und dass die Ellipse sich ähnlich bleibt.

§ 28.

Das Differential der Gleichung

$$\theta^2 = \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2}{2} e^{-kt} + \frac{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}{2} e^{-kt} \cos 2\omega t$$

ist:

$$\theta \frac{d\theta}{dt} = -\omega \cdot \frac{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}{2} e^{-kt} \sin 2\omega t - \frac{1}{2} k \theta^2.$$

Hieraus folgt bei genau kreisförmiger Basis $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} k \theta$, also stets negativ. Ist aber die Basis etwas excentrisch, so ist $\frac{d\theta}{dt} = 0$, wenn

$$\left(\sin 2\omega t + \frac{k}{2\omega} \cdot \frac{(\epsilon)^2 + (\epsilon')^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2} \right)^2 = \frac{k^2}{4\omega^2} - \frac{k^2}{4\omega^2} \sin^2 2\omega t.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind:

$$\frac{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}{2\omega^2} \pm \frac{\sqrt{((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2 - \frac{k^2(\epsilon)^2(\epsilon')^2}{\omega^2}}}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}.$$

$$(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2 > 48''(\epsilon); \text{ da aber } \frac{k(\epsilon')}{\omega} < \frac{0,0003805}{0,7003} 1'' 8' 26'' 2,$$

$$\text{d. i. } < 2'', 2311 \text{ angenommen wird, so ist } \frac{k(\epsilon)(\epsilon')}{\omega} < 2'', 2311(\epsilon),$$

$$\text{also } (\epsilon)^2 - (\epsilon')^2 \text{ mehr als } 21\frac{1}{2} \text{ mal so gross als } \frac{k(\epsilon)(\epsilon')}{\omega},$$

$$\text{also } ((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2 \text{ mehr als } 462 \text{ mal so gross als } \frac{k^2(\epsilon)^2(\epsilon')^2}{\omega^2};$$

folglich ist sehr nahe

Das giebt folgende zwei Werthe:

$$\sin 2\omega t = -\frac{4k\omega}{4\omega^2 + k^2} \cdot \frac{(\epsilon)^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2} + \frac{k^3}{4\omega^3 + k^2\omega} \cdot \frac{(\epsilon)^2(\epsilon')^2}{((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2},$$

$$\sin 2\omega t = -\frac{4k\omega}{4\omega^2 + k^2} \cdot \frac{(\epsilon')^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2} - \frac{k^3}{4\omega^3 + k^2\omega} \cdot \frac{(\epsilon)^2(\epsilon')^2}{((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2},$$

wofür wir auch

$$\sin 2\omega t = -\frac{k}{\omega} \cdot \frac{(\epsilon)^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2} + \frac{k^3}{4\omega^3} \cdot \frac{(\epsilon)^4}{((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2},$$

$$\sin 2\omega t = -\frac{k}{\omega} \cdot \frac{(\epsilon')^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2} - \frac{k^3}{4\omega^3} \cdot \frac{(\epsilon')^4}{((\epsilon)^2 - (\epsilon')^2)^2}$$

schreiben können. Substituirt man diese beiden Werthe in das $= 0$ gesetzte Differential

$$0 = -\omega \frac{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}{2} c - kt \sin 2\omega t - \frac{1}{2} k \theta^2,$$

so erhält man das Quadrat des Elongations-Maximums:

$$\theta^2 = \epsilon^2 - \frac{k^2}{4\omega^2} \frac{(\epsilon)^2 \epsilon^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2},$$

und das Quadrat des Minimums:

$$\theta^2 = \epsilon'^2 + \frac{k^2}{4\omega^2} \cdot \frac{(\epsilon')^2 \epsilon'^2}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2},$$

also das Maximum und Minimum selbst:

$$\theta = \epsilon - \frac{k^2}{8\omega^2} \cdot \frac{(\epsilon)^2 \epsilon}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}; \quad \theta = \epsilon' + \frac{k^2}{8\omega^2} \cdot \frac{(\epsilon')^2 \epsilon'}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}.$$

Da aber gezeigt worden, dass $(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2 > 48''(\epsilon)$, so ist $\frac{k^2}{8\omega^2} \cdot \frac{(\epsilon)^2 \epsilon}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2} < \frac{k^2}{8\omega^2} \cdot \frac{(\epsilon) \epsilon}{48''}$, also um so mehr $< \frac{k^2}{8\omega^2} \cdot \frac{(1^\circ 8' 26'', 2)^2}{48''}$, also (wenn man $\omega = 0,7003$ setzt) $< \frac{1}{7}$, Bogen-Secunde, also völlig unmerklich. Um so weniger

$$\frac{d\alpha'}{dt} = k \cdot \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \sin(2\omega t + 2\eta) = k \cdot \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} \cdot \frac{(\beta')}{(\beta)} \sin(2\omega t + 2\eta);$$

sein Integral ist also, absolut genommen, $< k \cdot \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{2\omega} \cdot \frac{(\beta')}{(\beta)} t$,

also (wenn wir $\frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{\omega} = \frac{1}{98164}$, $\frac{(\beta')}{(\beta)} = \frac{1}{17}$ und $t = 2^h 24^m 3$ setzen) $< 1'' 9408$ und daher unmerklich. Substituiren wir aber in den von $\mu + \frac{1}{2}\mu'$ unabhängigen Theil von $\frac{d\alpha'}{dt}$ die

oben gefundenen Werthe $\beta = (\beta) c^{-\frac{1}{2}kt}$, $t = (\beta') c^{-\frac{1}{2}kt}$ und $h = 0$, so wird

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -\frac{1}{2} k \frac{(\beta')}{(\beta)} \sin 2\omega t,$$

also δx (für $t = 0$ verschwindend) $= \frac{k(\beta')}{4\omega(\beta)} (\cos 2\omega t - 1)$,

merklich ist $\frac{k^2}{8\omega^2} \cdot \frac{(\epsilon')^2 \epsilon'}{(\epsilon)^2 - (\epsilon')^2}$. Man fehlt also auch mit

Rücksicht auf den Widerstand nicht merklich, wenn man sagt, das Elongations-Maximum finde statt, wenn $\theta = \epsilon$, d. i. wenn $t = 0, \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \dots$, und dieses Maximum sei $= (\epsilon) c^{-\frac{1}{2}kt}$,

und das Minimum finde statt, wenn $\theta = \epsilon'$, d. i. wenn $t = \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{5\pi}{2\omega}, \dots$, und dieses Minimum sei $= (\epsilon') c^{-\frac{1}{2}kt}$.

Hieraus folgt, dass die successiven Maxima der Elongation, desgleichen die successiven Minima, eine geometrische Reihe bilden, und dass alle anomalistischen Halb-Schwingungen von gleicher Dauer sind.

§ 29.

Es bleibt uns noch übrig, zu zeigen, dass auch in dem Ausdruck für $\frac{d\alpha'}{dt}$ im 36^{ten} Artikel das mit $\mu + \frac{1}{2}\mu'$ multiplizierte Glied unmerklich ist. Dies Glied kann auch so geschrieben werden:

also absolut genommen $< \frac{k}{2\omega} \cdot \frac{(\beta')}{(\beta)}$, d. i. (wenn man

$\omega = 0,7003$ und $\frac{(\beta')}{(\beta)} = \frac{1}{17}$ setzt) $< 3'' 2962$, also mit dem

von $\mu + \frac{1}{2}\mu'$ abhängigen Theil zusammen $< 5'' 2370$ und daher unmerklich, woraus hervorgeht, dass, so wie die anomalistische, so auch die azimuthale Umlaufzeit des Pendels vom Widerstande der Luft nicht merklich geändert wird. Es findet jedoch eine indirecte Störung der azimuthalen Bewegung, in Folge der immer kleiner werdenden Elongationen, statt, und diese ist, wenigstens für die konische Pendel-Schwingung mit genau kreisförmiger Basis, eben so interessant zu erforschen als die in § 24 und 25 betrachtete

allmähliche Beschleunigung der Schwingungen des nahe in einer Vertikal-Ebene sich bewegenden Pendels.

§ 30.

Zu diesem Behuf berücksichtigen wir die strenge Formel $\pi \sqrt{\frac{\lambda \cos \theta}{g}}$, welche, wenn die Erd-Rotation nicht berücksichtigt wird, die halbe Dauer des Umschwungs durch den ganzen Kreis ausdrückt. Wir können dafür kürzer $\frac{\pi \sqrt{\cos \theta}}{(\omega_1)}$ schreiben, und diese Formel geht, zufolge der Beweisführung des 19ten Artikels der Preisschrift, bei Mit-

$$\psi = \int \frac{(\omega_1) - \mu}{\sqrt{\cos \theta}} dt = ((\omega_1) - \mu) \int \frac{dt}{\sqrt{\cos((\theta) e^{-\frac{1}{2}kt})}}$$

$$= x + ((\omega_1) - \mu) \left(t + \frac{(\theta)^2}{4} \cdot \frac{1 - e^{-kt}}{k} + \frac{7(\theta)^4}{292} \cdot \frac{1 - e^{-2kt}}{k} + \dots \right). \quad (46)$$

Wenn aber kein Widerstand statt fände, so würde der Elongation (θ) die Bewegung

$$\psi = x + \frac{(\omega_1) - \mu}{\sqrt{\cos(\theta)}} t = x + ((\omega_1) - \mu) \left(t + \frac{1}{4}(\theta)^2 t + \frac{7}{96}(\theta)^4 t + \dots \right) \quad (47)$$

entsprechen. Subtrahiren wir den Werth (47) von dem Werth (46), so finden wir die indirecte Störung der Azimuthal-Bewegung durch den Widerstand:

$$\delta \psi = ((\omega_1) - \mu) \left(\frac{1}{4}(\theta)^2 \left(\frac{1 - e^{-kt}}{k} - t \right) + \frac{7}{96}(\theta)^4 \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2k} - t \right) + \dots \right) \quad (48)$$

Hier ist das Glied

$$\delta \psi = ((\omega_1) - \mu) \cdot \frac{7(\theta)^4}{96} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2k} - t \right)$$

absolut genommen $< ((\omega_1) - \mu) \cdot \frac{7(\theta)^4}{96} \left(\frac{1}{2k} - t \right)$, also (wenn man $(\theta) = 1^\circ 8' 26'', 2$ und $t = 2^h, 243$ setzt)

$$\frac{d\psi}{(\omega_1) - \mu} < 0,300 \text{ Zeit-Secunde,}$$

also völlig unmerklich. Die Gleichung (48) kann also in

$$-\delta \psi = ((\omega_1) - \mu) \frac{(\theta)^2}{4} \left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k} \right)$$

$$\delta \left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k} \right)$$

abgekürzt werden (man bedenke, dass $\frac{1 - e^{-kt}}{k}$ positiv, für $t=0$ aber $t - \frac{1 - e^{-kt}}{k} = 0$, und folglich, wenn

t positiv, $t - \frac{1 - e^{-kt}}{k}$ positiv und desto grösser ist, je grösser t). Setzen wir wiederum $(\theta) = 1^\circ 8' 26'', 2$ und $t = 2^h, 243$, so finden wir $\frac{-\delta \psi}{(\omega_1) - \mu} = 0,5517 \text{ Zeit-Secunden.}$

Dieser Zeitraum ist merklich; versteht man aber unter Störung der azimuthalen Bewegung den Überschuss der wirklichen Azimuthal-Bewegung über diejenige, welche das Pendel annehmen würde, wenn es sich von Anfang an mit der der

Berücksichtigung der Erd-Rotation in $\frac{\pi \sqrt{\cos \theta}}{(\omega_1) - \mu}$ über (hierbei ist es, wie auch im genannten 19ten Artikel geschehen ist, gestattet, (ω_1) unter allen Umständen als positiv, μ aber, wenn das Pendel von Ost durch Süd nach West sich bewegt, in der nördlichen Halbkugel der Erde als positiv und in der südlichen Halbkugel als negativ, und, wenn das Pendel von West durch Süd nach Ost schwingt, in der nördlichen Halbkugel als negativ und in der südlichen als positiv zu betrachten).

Die Formel $\frac{\pi \sqrt{\cos \theta}}{(\omega_1) - \mu}$ lehrt, dass, wenn θ sich stetig ändert,

unendlich-kleinen Schwingung entsprechenden Azimuthal-Geschwindigkeit $(\omega_1) - \mu$ bewegte, so können wir leicht die Unmerklichkeit beweisen. Denn alsdann ist

$$\delta \psi = \psi - x - ((\omega_1) - \mu) t,$$

also zufolge der Gleichung (46) sehr nahe =

$$\frac{(\omega_1) - \mu}{4} (\theta)^2 \cdot \frac{1 - e^{-kt}}{k}, \quad (49)$$

also (mit obigen numerischen Werthen) $\frac{-\delta \psi}{(\omega_1) - \mu}$ nicht $> 0,24832 \text{ Zeit-Secunden.}$

Noch unmerklicher ist die Störung der Gleichförmigkeit der Azimuthal-Bewegung überhaupt; denn aus der Gleichung (49) folgt

$$t = \frac{\psi - x}{(\omega_1) - \mu} - \frac{1}{4}(\theta)^2 \cdot \frac{1 - e^{-kt}}{k},$$

also (wenn man eine beliebige Zeit, welche $< t$ ist, mit t' , und das zugehörige Azimuth der Pendel-Axe mit ψ' bezeichnet)

$$t \frac{\psi' - x}{\psi - x} - t' = \frac{1}{4}(\theta)^2 \left(\frac{1 - e^{-kt'}}{k} - \frac{1 - e^{-kt}}{k} \cdot \frac{\psi' - x}{\psi - x} \right);$$

nun aber ist nach dem vorher Bewiesenen sowohl

$$\frac{1}{4}(\theta)^2 \cdot \frac{1 - e^{-kt'}}{k} \text{ als } \frac{1}{4}(\theta)^2 \cdot \frac{1 - e^{-kt}}{k} \cdot \frac{\psi' - x}{\psi - x} < 0,24832$$

Zeit-Secunden, also um so mehr $t \cdot \frac{\psi' - x}{\psi - x} - t' < 0,24832.$

Potsdam, den 29. Septhr. 1854.

W. Lehmann.

Bahubestimmung des von Herrn Professor *D'Arrest* am 27. Juni 1851 entdeckten periodischen Cometen nebst *Sweeping-Ephemeris* zur Erleichterung der Aufsuchung bei der nächsten Erscheinung im Jahre 1857, von Herrn Dr. *Oudemans*.

Mit den von Herrn *Von Villarceau* über diesen Gegenstand geführten Rechnungen unbekannt, fasste ich den Entschluss, auf die sämtlichen Beobachtungen dieses Cometen eine genaue Bahubestimmung zu gründen. Die Abhandlung, welche diese Untersuchung enthält, ist von der K. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam in ihren Memoiren (II. Theil) aufgenommen, und ist auch, wie alle von jener Akademie herausgegebenen Abhandlungen, bei dem Buchhändler *C. G. Van der Post* zu Amsterdam besonders zu beziehen. Ich will mich also hier nur mit einem kurzen Auszuge begnügen.

Indem ich von dem Elementensysteme ausging, welches Herr Professor *D'Arrest* in Nr. 775 der A. N. veröffentlichte, berechnete ich, mit Rücksicht auf die Jupiters- und Saturns-

Störungen, eine Ephemeride, womit ich alle Beobachtungen, welche zu meiner Kenntniss gelangt sind, 93 an Zahl, verglich. Ich benutzte die gefundenen Unterschiede zur Bildung von acht Normalörter, wobei ich so gut wie möglich auf den constanten Unterschied der Beobachter und den specifischen Werth ihrer Beobachtungen Rücksicht zu nehmen mich beflissen habe. Aus verschiedenen Gründen nämlich hielt ich es nicht für erlaubt den letzten Normalort aus den Helio-meterbeobachtungen allein zu bilden, wie Herr *Von Villarceau* bei einer seiner Lösungen gethan hat. Hier folgen die Normalörter, die Correctionen der Ephemeride und ihre mittleren Fehler:

M. Zt. Berlin.	AR. app. $\odot$	Decl. app. $\odot$	Corr. der Eph.		Mittlerer Fehler.	
			α .	δ .	α .	δ .
Juli 2,0	12° 48' 8" 2	+10° 44' 25" 4	— 2" 0	— 1" 2	± 3" 6	± 3" 6
5,5	16 37 12,6	10 49 16,3	+ 4,6	+ 6,4	4,3	4,3
26,0	36 49 48,0	9 44 12,0	+ 1,9	+ 5,2	3,2	3,2
Aug. 4,5	44 35 56,2	8 29 58,4	+ 2,5	+ 0,4	3,1	3,1
22,5	56 8 14,7	5 17 47,5	+ 4,5	+ 4,6	3,3	3,5
Sept. 3,5	61 24 37,8	+ 2 43 22,0	— 0,9	+ 1,2	3,1	3,1
25,5	65 53 1,2	— 2 22 3,1	— 11,5	— 2,5	2,7	2,7
Oct. 4,0	65 48 12,4	— 4 15 13,5	— 20,5	+ 2,7	± 2,8	± 2,8

Nach einem in der Abhandlung mitgetheilten Formelsysteme wurden 16 Gleichungen zwischen den Verbesserungen der Elemente gebildet. Ihre Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate, mit Rücksicht auf die wahrscheinlichen Fehler, scheiterte an der Kleinheit des letzten Coefficienten, weshalb ich die Correction der täglichen mittleren Bewegung unbestimmt liess und also für die anderen Verbesserungen folgende Ausdrücke fand:

$$\left. \begin{aligned} di &= -6^{\text{h}}46 - 11,8789 d\mu \\ d\Omega &= -19,18 - 34,2296 d\mu \\ d\pi &= -39,835 - 47,4821 d\mu \\ dI' &= -0',003829 - 0',0037896 d\mu \\ d\phi &= +7^{\text{h}}97 - 103,6234 d\mu \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

In die 16 Gleichungen mit gleichem Gewichte (deren mittlerer Fehler = $\pm 3^{\text{h}}16 = \sqrt{10}$ war) substituirt, blieben noch die folgenden Unterschiede übrig:

Rechnung — Beobachtung.	
AR.	Decl.
+0"82 — 0,058 $d\mu$	+5"97 + 0,1413 $d\mu$
— 3,01 + 0,106 $d\mu$	— 1,39 — 0,0163 $d\mu$
+ 3,03 + 0,007 $d\mu$	— 3,73 — 0,4018 $d\mu$
+ 1,73 — 0,205 $d\mu$	+ 0,22 — 0,2233 $d\mu$
— 4,40 — 0,054 $d\mu$	— 4,22 + 0,3075 $d\mu$
— 3,46 + 0,3605 $d\mu$	— 1,01 + 0,5815 $d\mu$
— 1,81 + 0,423 $d\mu$	+ 4,70 + 0,0983 $d\mu$
+ 4,57 — 0,526 $d\mu$	— 0,70 — 0,4621 $d\mu$

..... (II)

deren Quadratsumme = $170,33 - 7,326 d\mu + 1,5325 (d\mu)^2$ ein Minimum 161,57 wird, wenn $d\mu = +2^{\text{h}}3906$ ist. Damit wird der mittlere Fehler jeder Gleichung = $\pm 4^{\text{h}}02$, nicht erheblich verschieden von der a priori aus den einzelnen Vergleichen der Ephemeride mit den Beobachtungen geschlossenen $\pm 3^{\text{h}}16$.