III.

*Von der Messung der Höhen vermittelt
des Barometers,*

von

Herrn DE LA PLACE,

Kanzler des Senats, Großofficier der Ehren-
legion und Mitglied des Nat. - Inst. *)

Mit Erläuterungen von Gilbert,

Die Messung der Höhen vermittelt des Barometers hängt eben so, wie die Theorie der Strahlenbrechung, von dem Gesetze ab, nach welchem die höhern Schichten der Atmosphäre an Dichtigkeit abnehmen. Es sey ρ die Dichtigkeit eines Lufttheilchens, das sich in einer Entfernung $a + r$ vom Mittelpunkte der Erde befindet; und zwar bedeute a die Entfernung der untern Station der Beobachtung von dem Mittelpunkte der Erde. Ferner bezeichne g die Schwere, und p den Luftdruck, beide an der Stelle, in welcher das Lufttheilchen sich befindet. Alsdann ist

$$dp = - g \rho \cdot dr \text{ . **)}$$

Der

*) Eine Uebersetzung des vierten Kapitels des zehnten Buchs des *Traité de mécanique céleste*, t. 4, (Paris 1805,) p. 289 f. Gilb.

**) Denn vermindert man die Entfernung vom Mittel-

Der Luftdruck p selbst, ist der Dichtigkeit ρ des Lufttheilchens proportional, *) multiplicirt mit der Wärme desselben, **) die wir mit z bezeichnen wollen. Bedeutet daher K einen beständigen Coefficienten, so ist

$$p = K \rho \cdot z \quad (I) \quad ***)$$

Hieraus folgt $\frac{dp}{p} = - \frac{g dr}{K z},$

telpunkte der Erde unendlich wenig, so nimmt der Druck um das Gewicht der Luftmasse zu, welche nun zu der, die zuvor durch ihr Gewicht den Druck erzeugte, hinzu gekommen ist. *Gilb.*

*) Das Mariottische Gesetz. *Gilb.*

**) Denn unter übrigens gleichen Umständen ist die Elasticität der Luft der Wärme proportional. *Gilb.*

***) Dieser constante Coefficient K muß sich also aus einer einzigen Beobachtung der Dichtigkeit der Luft, bei einem bestimmten Drucke und einer bekannten Wärme finden lassen. Hält z. B. der Luftdruck bei 0° Wärme, dem Druck einer Quecksilbersäule von $0^m,76$ das Gleichgewicht, und die Luft ist bei dieser Wärme und unter diesem Drucke Δ Mal specif. leichter als das Quecksilber, so würde eine $\Delta \cdot 0^m,76$ hohe Säule Luft, von der Dichtigkeit ρ und der Wärme 0° , durch ihre Schwere denselben Druck ausüben, den jedes Lufttheilchen durch seine Spannung äußert; und also $\Delta \cdot 0^m,76 \cdot \rho = K \cdot \rho$ oder $K = \Delta \cdot 0^m,76$ seyn. Dieser constante Coefficient hängt also ab von dem Verhältniß der specifischen Gewichte zwischen dem Quecksilber und der Luft bei einem Drucke und einer Wärme, die bekannt sind. *Gilb.*

welches integrirt giebt

$$\int \frac{g \, dr}{z} = K \cdot \log \frac{(p)}{p}, \quad (\text{II})$$

wenn (p) den Druck der Atmosphäre in der untern Station bedeutet, wo die Werthe von r und des Integrals anfangen. *)

Bezeichnet man die Schwere an dieser untern Station mit (g) , so ist

$$g = (g) \cdot \frac{a^2}{(a+r)^2}, \text{ sehr nahe } = (g) \cdot \left(1 - \frac{2r}{a}\right)$$

und setzt man endlich noch $r \cdot \left(1 - \frac{r}{a}\right) = r'$, so hat man

$$\int \frac{g \, dr}{z} = (g) \cdot \int \frac{dr'}{z} \quad (\text{III})$$

Diese Functionen lassen sich nicht anders integrieren, als wenn man z durch eine Function von r' auszudrücken weiß, [und es kommt daher auf das Gesetz an, wonach die Wärme in den höhern Schichten der Atmosphäre abnimmt.] Da indeß der Werth dieser Integrale nur für einen Zwischenraum verlangt wird, der im Vergleich mit der ganzen Höhe der Atmosphäre sehr klein ist, so wird hier jede Function zulässig, welche die Temperatur der untern und der obern Station zugleich darstellt, und der gemäß die Temperatur von der einen Station bis zur andern ungefähr in einer arithmetischen Progression abnimmt. Und unter diesen Functionen

*) Und wo also ist $0 = K \cdot \log \frac{1}{(p)} + \text{Const}$, daher $\text{Const} = K \cdot \log (p)$ seyn muß. *Gilb.*

nen ist es erlaubt, die auszuwählen, welche die Rechnung am einfachsten macht. Ich will daher annehmen, es sey

$$z = \sqrt{q^2 - ir'}.$$

wobei q die Wärme an der untern Station bedeutet, und i so zu nehmen ist, daß dieser für z gesetzte Ausdruck die Wärme an der obern Station giebt. *) Wir haben dann

*) Das Resultat der sorgfältigen Untersuchungen, welche Herr Freiherr von Humboldt über das Gesetz, wonach die Wärme in den höhern Regionen der Atmosphäre abnimmt, angestellt, und in Band XXIII dieser *Annalen* mitgetheilt hat, ist: daß für je 121,1 Toisen, um welche wir uns höher in der Atmosphäre erheben, die Wärme sich um 1° R. vermindert. Dieses giebt 97^t für jeden Grad Wärmeabnahme nach dem Centesimal-Thermometer, und folglich $q - z = \frac{r}{97}$, wenn q und z nach dem Centesimal-Thermometer und r in Toisen ausgedruckt werden. Diesem zu Folge ist $z = q - \frac{r}{97}$ und $q^2 - z^2 = (q + z)(q - z) = \frac{2qr}{97} - \left(\frac{r}{97}\right)^2$. Herr Laplace setzt $q^2 - z^2 = ir'$; und r' ist um eine so geringe Gröfse von r verschieden, daß wir hier beide für gleich nehmen können. Dies giebt

folgenden Werth für $i = \frac{2q - \frac{r}{97}}{97}$. Eigentlich ist also

i mit r variabel. Herr Laplace sieht aber i als constant an, und zwar nimmt er dafür den Werth, der für den Abstand r der beiden Stationen und für die Temperatur in der untern Station q , in

$$\int \frac{dr'}{z} = \frac{2r'}{q+z} *) \quad (IV)$$

und folglich, [wenn man in (III) die Werthe der Integrale aus (II) und (IV) substituirt,]

$$r' = \frac{(q+z)}{2} \cdot \frac{K}{(g)} \cdot \log \frac{(p)}{p} \quad (V)$$

dem beobachteten Falle gilt: ein Werth, der zwar für jede Beobachtung ein anderer, auch, da er von r abhängt, unbekannt ist; der aber doch in der That für jeden der Rechnung unterworfenen Fall als constant angenommen wird, da man ihn für alle Zwischenwerthe von r geltend denkt. Soll dieses aber erlaubt seyn, so muß dieser Werth die Wärmeabnahme zwischen beiden Stationen sehr nahe so geben, wie sie sich nach dem Gesetze des Herrn von Humboldt verhält. Es sey der Abstand der beiden Stationen oder $r = b \cdot 97$ Toisen, also, wenn alles in der Regel ist, der Unterschied der Wärme an beiden Stationen b Grad, so ist für diesen Fall $i = \frac{2q-b}{97}$ und $z = \sqrt{q^2 - \frac{(2q-b)r}{97}}$. Setzt man hier r nach der Reihe $b, 2b, 3b$ etc.; so finden sich für z freilich die Werthe $q-1, q-2, q-3$ nicht genau, sondern mit Abweichungen, die bis auf ganze Grade steigen; dieses scheint indess doch hinzureichen, um die Annahme hier zulässig zu machen.

Gilb.

*) Es ist nämlich $ir' = q^2 - z^2 = (q+z)(q-z)$ und $d(ir') = -2z \cdot dz$; daher $\int \frac{d(ir')}{z} = 2(q-z) = \frac{2ir'}{q+z}$; also auch, da i als eine Constante betrachtet wird, $\int \frac{dr'}{z} = \frac{2r'}{q+z}$.

Gilb.

Die Logarithmen bedeuten hier die natürlichen. Statt ihrer wollen wir die Briggischen nehmen; dieses verändert weiter nichts, als den Werth der Constante K . Ferner wollen wir die Temperatur des natürlichen Frostoppunkts mit l bezeichnen, und die Temperaturen der untern Station, $t = l + t$, die an der obern, $t' = l + t'$ setzen. Dadurch verwandelt sich unsere Formel in folgende:

$$r' = l \cdot \left\{ 1 + \frac{(t + t')}{2l} \right\} \cdot \frac{K}{(g)} \cdot \log \frac{(p)}{p} \quad (\text{VI})$$

Herr R a m o n d hat durch Vergleichung einer großen Menge Messungen von Bergen vermittelt des Barometers, mit ihrer trigonometrisch bestimmten Höhe, gefunden, daß unter 50° Breite der Coefficient $\frac{Kl}{(g)} = 18336$ Mètres ist. *)

Um die beständige Gröfse l zu bestimmen, wollen wir annehmen, t und t' bedeuten Grade des hunderttheiligen Queckfilber - Thermometers von dem Nullpunkte an gerechnet. Wenn ein Luftvolumen von der Temperatur Null erwärmt wird, so wächst für jeden Grad Wärme, um den die Tempe-

*) Bedeutet M den Modulus des Briggischen logarithmischen Systems, so ist $\log \text{ natur. } N = M \cdot \log \text{ Brigg. } N$. Zuvor war aber der Werth der Constante K , wie wir gesehen haben, $\Delta \cdot 0,00076$. Jetzt verwandelt er sich also in folgenden $K = M \cdot \Delta \cdot 0,00076$, und dieser Coeffic. ist für 0° Wärme $= \frac{M \cdot \Delta \cdot 0,00076}{(g)}$, voraus gesetzt, daß Δ sich auf 0° Wärme und $0,00076$ Druck bezieht. Gillb.

ratur desselben zunimmt, die elastische Kraft desselben, oder der Druck, den es ausübt. Diese Zunahme des Drucks beträgt für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers sehr nahe 0,00375. Bezeichnet man daher den Druck oder die elastische Kraft der Luft bei 0° Wärme mit (p) , so dürfen wir annehmen, daß dieser Druck für jeden Thermometergrad zunimmt um $0,00375 \cdot (p)$. Der Druck, den die Luft ausübt, war aber nach (I) gleich $K \cdot (l + t) \cdot p$. Folglich haben wir $(p) = Kl p$, und die Zunahme des Drucks für einen Thermometergrad $= Kl p \cdot \frac{1}{t} = (p) \cdot \frac{1}{t}$. Es muß also $\frac{1}{t} = 0,00375$, oder $t = \frac{100000}{375}$ feyn. Werden diese Werthe in die Formel (VI) gesetzt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$r' = 18336^M \cdot \left\{ 1 + \frac{(t + t')}{2} \cdot 0,00375 \right\} \cdot \log \frac{(p)}{p} \quad (\text{VII})$$

Den Luftdruck p in der obern und (p) in der untern Station, erhält man durch den Stand des Barometers in beiden Stationen, wenn man ihn auf *einerlei Temperatur* reducirt hat. Ich habe durch einen genauen Versuch gefunden, daß das Quecksilber sich um $\frac{1}{5412}$ tel für jeden Thermometergrad ausdehnt. Man muß daher die an der kältern Station beobachtete Barometerhöhe um so viel $\frac{1}{5412}$ tel vermehren, als Centesimalgrade Unterschied zwischen den Temperaturen des im Barometer enthaltenen Quecksilbers an beiden Stationen Statt findet. Da die Temperatur des Quecksilbers im Barometer

nicht immer genau dieselbe ist, als die Temperatur der umgebenden Luft, so bestimmt man sie nach einem in dem Barometerbrette angebrachten Thermometer.

Diese Correction wegen der Temperatur reicht indess noch nicht hin. Man muß die beobachteten Barometerhöhen auch auf *einerlei Schwere* reduciren. Es mögen (h) und h die auf einerlei Temperatur reducirten Barometerhöhen an der untern und an der obern Station bezeichnen, so werden sie, da $(g) = g \cdot \frac{a^2}{(a+r)^2}$ ist, wenn man die Barometerhöhe der obern Station auf die Schwere in der untern Station reducirt, (h) und $\frac{h}{\left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}$; also

$$\log \frac{(p)}{p} = \log \frac{(h)}{h} + 2 \log \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

Oder, da $\frac{r}{a}$ eine sehr kleine Gröfse, und daher $\log \text{nat} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$ von $\frac{r}{a}$, folglich $\log \text{Brigg.} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$ von $0,4342945 \cdot \frac{r}{a}$ nicht merklich verschieden ist,

$$\log \frac{(p)}{p} = \log \frac{(h)}{h} + 0,868589 \cdot \frac{r}{a} \quad (\text{VIII})$$

Der Coefficient 18336^{Met.} ist nur unter dem Parallelkreise von 50° ganz genau. Er verändert sich mit der Breite, und zwar im verkehrten Verhältnisse mit der Schwere (g) . Nach dem dritten Buche der *Méc. céleste*, No. 42, ist aber, wenn $[g]$

die Schwere unter dem Aequator, und ψ die Breite bedeutet, unter welcher die Schwere (g) ist,

$$(g) = [\underline{g}] \cdot \left\{ 1 + \frac{0,004208}{0,739502} \cdot \sin.^2 \psi \right\}$$

und hieraus folgt, daß der Coefficient, welcher unter 50° Breite 18336^{Mét.} ist, unter einer Breite ψ seyn müsse 18336^{M.} $\cdot (1 + 0,002845 \cdot \cos. 2\psi)$. (IX)

Setzen wir nun alle diese Correctionen in die Formel (VII), und statt r' seinen Werth durch r ausgedruckt, so haben wir

$$r = 18336^M \cdot \left\{ 1 + 0,002845 \cdot \cos. 2\psi \right\} \cdot \left(1 + \frac{(\ell' + \ell)}{2} \cdot 0,00375 \right) \cdot \left\{ \left(1 + \frac{r}{a} \right) \cdot \log \frac{(h)}{h} + \frac{r}{a} \cdot 0,868589 \right\} \quad (X)$$

Für den Werth von r nehme man in dem vierten Factor rechts vom Gleichheitszeichen, den Werth, welchen die Formel X giebt, wenn man in diesem Factor $r = 0$ setzte; und man setze $a = 6366198^m$. Beides läßt sich ohne merklichen Fehler thun.

Die Correctionen, welche auf den Veränderungen der Schwere mit der Breite und mit der Höhe beruhen, sind sehr klein. Da sie aber gewiß sind, so ist es nützlich, sie mitzunehmen, damit in der Rechnung nur die unvermeidlichen Fehler der Beobachtungen mit eingehen, und die, welche von den nicht bekannten Anziehungen der Berge herühren, von dem hygrometrischen Zustande der Luft, (auf den es nöthig wäre mit zu sehen,) und endlich von der Hypothese, die wir über die Abnahme der Wärme in der Atmosphäre gemacht haben.

Der hygrometrische Zustand der Luft ließe sich dadurch mit in Anschlag bringen, daß man den Coefficienten von $\frac{t+t'}{2}$ in der vorstehenden Formel etwas vermehrte. Denn der Wasserdampf ist leichter als die Luft, und wenn die Temperatur wächst, so nimmt auch die Menge desselben zu, wenn die übrigen Umstände dieselben bleiben. Ich finde, daß den Beobachtungen im Ganzen genommen ziemlich gut Genüge geschieht, wenn man in dieser Formel statt $\frac{(t+t')}{2} \cdot 0,00375$ die Größe $\frac{2(t+t')}{1000}$ setzt; *) wodurch die Formel zu folgender wird:

$$r = 18336^M : \left\{ 1 + 0,002845 \cdot \cos. 2\psi \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right\} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{r}{a}\right) \cdot \log \frac{(h)}{h} + \frac{r}{a} \cdot 0,868589 \right\}. \text{ (XI.) **)$$

*) Mehreres hierüber im folgenden Aufsatze. G.

**) Eine Vergleichung dieser Formel mit der De Lüc'schen in Aufsatz V. G.